

Trigonometría

15 de abril de 2007

Funciones trigonométricas inversas

Para que una función posea función inversa, esta debe ser primero biyectiva, es decir, epiyectiva e inyectiva a la vez.

Como veremos a continuación, las funciones trigonométricas al ser periódicas **no son inyectivas** en $\mathbb{R}$, es más, al ser estas acotadas tampoco son epiyectivas, lo que nos deja bien claro que estas funciones trigonométricas no son biyectivas en $\mathbb{R}$.

A continuación vamos a redefinir tanto el dominio como el codominio de estas funciones para así lograr biyectividad y poder encontrarles función inversa.

- Consideremos $f(x) = \text{sen}x$. Luego $\text{Im } f(x) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$ lo que nos dice que $f(x)$ es una función no epiyectiva.

Restringimos el codominio a $\text{Cod } f(x) = [-1, 1]$ y con esto la función $f(x)$ es epiyectiva.

Como la función no es inyectiva en $\mathbb{R}$ dado que toma infinitas veces cada valor al ser 2π periódica, vamos a restringir el dominio.

El dominio que utilizaremos será el intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$ dado que en este intervalo $f(x)$ toma solo un valor para cada x y al mismo tiempo mantenemos la epiyectividad con el codominio restringido anteriormente.

Así la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$ es biyectiva y en consecuencia posee inversa, la cual llamaremos:

Arcoseno

Llamamos arcoseno a la función inversa de f , es decir:

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $y = \arcsin x \iff x = \text{sen}y$

Funciones trigonométricas inversas

- Sea $f(x) = \cos x$. Luego $\text{Im } f(x) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$ y como vimos anteriormente, muestra no epiyectividad. Siguiendo el paso efectuado para sin, restringimos el codominio a $\text{Cod } f(x) = [-1, 1]$ y con esto logramos que la función $f(x)$ sea epiyectiva.
Al igual que sin, cos es 2π periódica por lo que no posee inyectividad en $\mathbb{R}$. A diferencia del intervalo anterior, esta vez se restringe el dominio al intervalo $[0, +\pi]$ ya que es en este intervalo en el cual $f(x)$ toma solo un determinado valor para cada x teniendo así inyectividad.
Así la función $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos(x)$ es biyectiva y en consecuencia tiene inversa, llamada:

Arcocoseno

Llamamos arcocoseno a la función inversa de f , o sea:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \text{ tal que } y = \arccos x \iff x = \cos y$$

- Sea $f(x) = \tan x$. Luego $\text{Im } (\tan x) = \mathbb{R}$ por lo que no es necesario restringir el codominio y la función $f(x)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$.
Sin embargo, la función, al ser periódica, no es inyectiva en $\mathbb{R}$, luego se restringe el dominio al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para lograr inyectividad.
Así la función $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan(x)$ es biyectiva y en consecuencia tiene inversa, llamada:

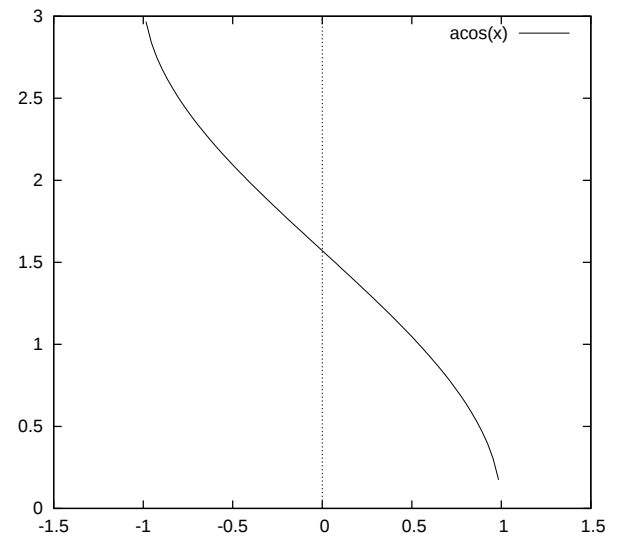
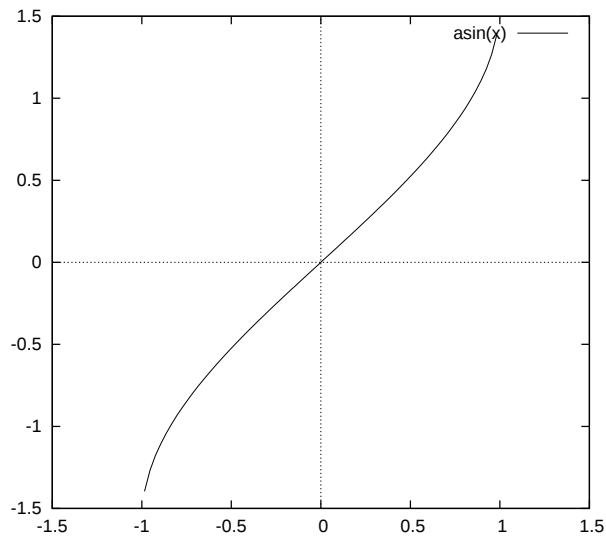
Arcotangente

Llamamos arcotangente a la función inversa de f , o sea:

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \text{ tal que } y = \arctan x \iff x = \tan y$$

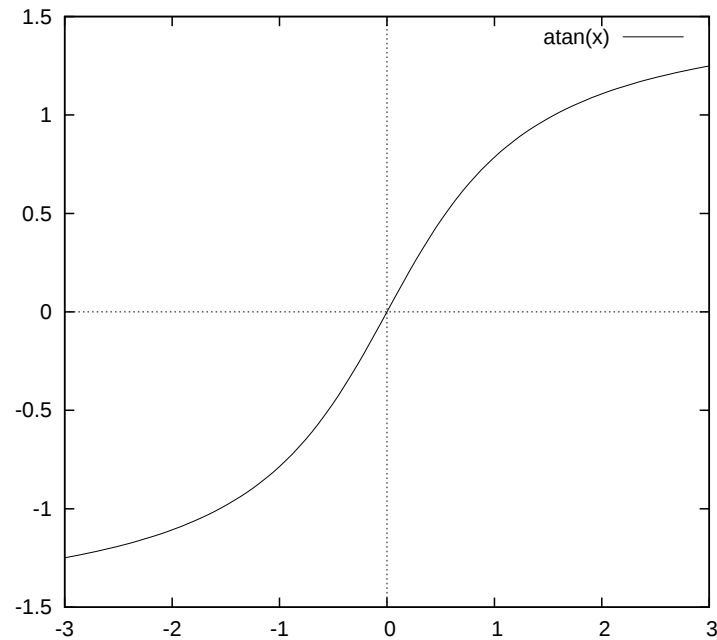
Gráficos

A continuación veamos los gráficos de estas funciones:



Gráficos

Ahora el gráfico de $\arctan$:



Ecuaciones trigonométricas

A continuación analizaremos las funciones trigonométricas cuando estas son utilizadas en ecuaciones y veremos como encontrarles solución.

1 Consideremos la ecuación $\text{sen } x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

1 $|a| > 1 \Rightarrow$ no existe solución.

2 $|a| \leq 1$, es facil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.

Sin embargo como la función sen no es epiyectiva, esta solución no es única.

La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de $\sin$.

2 Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

1 $|a| > 1 \Rightarrow$ no existe solución.

2 $|a| \leq 1$, es facil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo como la función $\cos$ no es epiyectiva, esta solución no es única.

La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de $\cos$.

3 Consideremos la ecuación $\tan x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}$, es facil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, que corresponde a $\alpha = \arctan a$.

Sin embargo como la función $\tan$ no es epiyectiva, esta no es la única solución.

La solución general suele escribirse en la ecuación

$$x = k\pi + \alpha \text{ donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplos

A continuación vamos a ver 3 ejemplos concretos de lo anterior:

1 $\text{sen}2x + \cos x = 0$

2 $1 + \text{sen}x + \cos x + \text{sen}2x + \cos 2x = 0$

3 $\text{sen}x + \cos x = 1$

Mostraremos paso a paso como poder resolver estas ecuaciones trigonométricas:

1) $\text{sen}2x + \cos x = 0$

$$\iff 2\text{sen}x \cos x + \cos x = 0$$

$$\iff \cos x [2\text{sen}x + 1] = 0$$

a) $\cos x = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

b) $2\text{sen}x + 1 = 0 \iff \text{sen}x = -1/2, \alpha = -\frac{\pi}{6}$

$$x = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

Ejemplos

$$\begin{aligned}
2) \quad & 1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow 1 + \operatorname{sen} x + \cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \\
& \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + \cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \\
& \Leftrightarrow [\operatorname{sen} x + \cos x] + 2\cos x[\operatorname{sen} x + \cos x] = 0 \\
& \Leftrightarrow [\operatorname{sen} x + \cos x][1 + 2\cos x] = 0
\end{aligned}$$

Para que esto se tenga, algunos de los siguientes casos se debe tener:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow x = -\cos x \\
& \Rightarrow \tan = -1; \alpha = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$b) \quad 1 + 2\cos x = 0 \iff \cos x = -1/2; \alpha = 2\pi/3$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

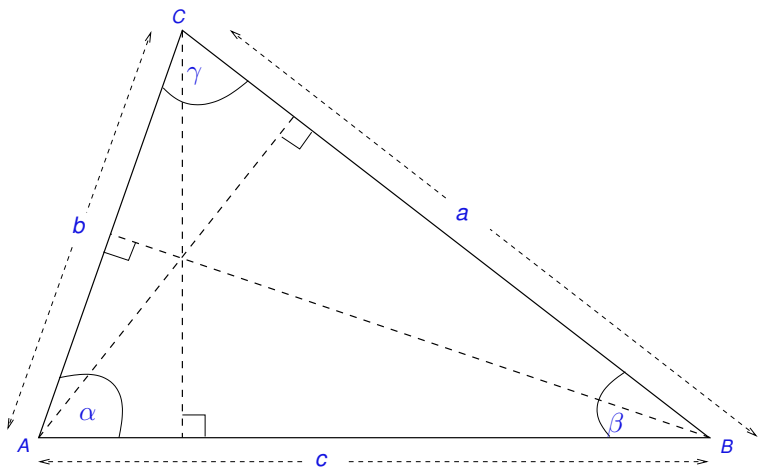
$$\begin{aligned}
3) \quad & \operatorname{sen} x + \cos x = 1 \\
& \operatorname{sen} x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
& \operatorname{sen} x + \frac{\pi}{4} = k\pi + (-1)^k \pi/4 \\
& \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \pi/4 = \pi/4
\end{aligned}$$

$$\text{si } k \text{ par, } x = 2k\pi = 2n\pi$$

$$\text{si } k \text{ impar, } x = k\pi - \pi/2 = (2n-1)\pi - \pi/2$$

Teorema del seno

Este teorema nos revelará la relación que hay entre cada ángulo y su lado opuesto dentro de cualquier triángulo. Observemos la figura siguiente:



De la figura se puede extraer bastante información. Llamemos h a la altura que va desde C hasta la base $\overline{AB}$. Como ya sabemos, $\sin\beta = h/a$. Por otra parte, veamos que $\sin\alpha = h/b$, luego $h = b\sin\alpha$, y si reemplazamos obtenemos

$$\begin{aligned}\sin\beta &= (b\sin\alpha)/a \\ \sin\beta/b &= \sin\alpha/a\end{aligned}$$

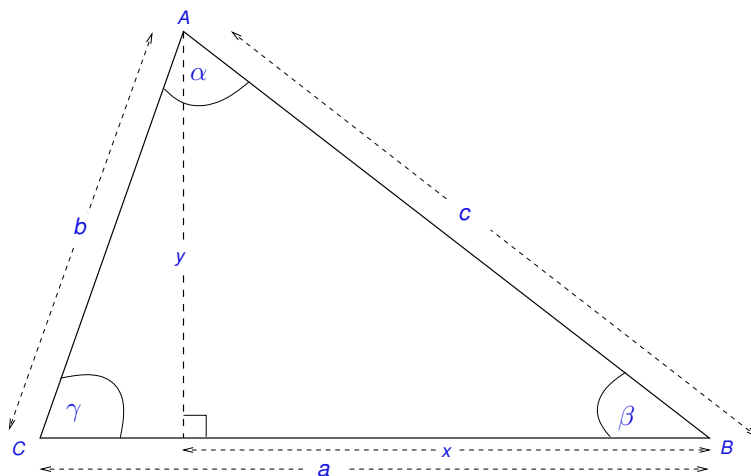
Si efectuamos el mismo proceso pero esta vez ocupando el ángulo γ entonces obtenemos la relación

$$\sin\alpha/a = \sin\beta/b = \sin\gamma/c$$

Teorema del coseno

Este teorema es una expansión del Teorema de Pitágoras, dado que nos permite encontrar una relación entre los lados del triángulo, pero sin que este sea necesariamente triángulo rectángulo.

Observemos la figura:



De la figura vemos lo siguiente:

- Caso 1: $\beta = \pi/2$, en este caso vemos que se puede ocupar pitágoras, por lo tanto, $a^2 + b^2 = c^2$.
- Caso 2: $\beta \neq \pi/2$, en este caso ocuparemos pitágoras pero con $y^2 + x^2 = c^2$

Donde $y = b \sin \gamma$, y $x = a - b \cos \gamma$.

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
 c^2 &= b^2 \sin^2 \gamma + a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2 \cos^2 \gamma \\
 &= b^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + a^2 - 2ab \cos \gamma \\
 &= b^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma
 \end{aligned}$$

Aplicaciones geométricas

- 1 Si $L : y = mx + n$ es la ecuación de una recta, entonces $m = \tan \alpha$ donde α es el ángulo formado entre la recta y en eje OX .
- 2 Si $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$ son rectas, entonces el ángulo formado entre las dos rectas puede calcularse por:
 $m_1 = \tan \beta$ y $m_2 = \tan \alpha$
$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Aplicaciones sobre triángulos:

Teorema del Seno

$$\frac{\text{sen} \alpha}{a} = \frac{\text{sen} \beta}{b} = \frac{\text{sen} \gamma}{c} = k$$

Teorema del Coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$