Ejercicios Espacios Vectoriales

1. Expresar, si es posible, el elemento indicado como combinación lineal del conjunto dado y en el espacio vectorial V dado.

   a) $(1,-1)$, $\left\{(0,-1),(\sqrt{2},1),(\frac{1}{\sqrt{2}},0)\right\}$, $V=\mathbb{R}^2$, sobre $\mathbb{Q}$.

   b) x^2+x-1, $\{x^2-1, x-1, x^2-x\}$, $V=\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   c) i, $\{1, x+x^2, x^2+1\}$, $V=\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.

   d) e^{-x}, $\{e^x+e^{-x}, e^x-e^{-x}\}$, $V=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

2. Sean $\overrightarrow{u}=(1,-3,2)$ y $\overrightarrow{v}=(-2,-1,-4)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

   a) ¿Es $(6,13,12)$ una combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{\mathrm{v}}$?

   b) Determine si existe $k\in\mathbb{R}$ (o más de uno), tal que $(3,k,6)$ sea combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{\mathrm{v}}$.

   c) Determine la ecuación que caracteriza a todos los vectores (x,y,z) que pertenecen al subespacio generado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{\mathrm{v}}$.

3. Considere los siguientes conjuntos de vectores de los espacios vectoriales reales denotados por V.

   I. $V=\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$

      (i) $C_1=\{(1,i),(2,i)\}$

      (ii) $C_2=\{(i,3),(-2,6i),(4i,12)\}$

      (iii) $C_3=\{(1,1),(-1,1),(0,1)\}$

   II. $V=\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

      (i) $C_1=\{(1,-2,1),(1,0,1)\}$

      (ii) $C_2=\{(1,1,1),(-2,-6,0),(0,-4,2)\}$

      (iii) $C_3=\{(0,-1,1),(1,1,1),(0,1,2)\}$

III. $V = \mathbf{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

(i) $C_1 = \{(1-t)^3, 1-t, 0\}$

(ii) $C_2 = \{t-1, t^2-1, t^2+1\}$

IV. $V = M_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$.

(i) $C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \right\}$

(ii) $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4i & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Para cada uno de ellos

a) Describa el subespacio que genera de la manera más simple posible.

b) Decida si son l.i. o no; justifique y redúzcalo a un conjunto l.i. si no.

4. Encontrar un conjunto l.d. de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ tal que cualquier subconjunto de dos vectores sea l.i.

5. Muestre que el conjunto B es base del espacio vectorial V y encuentre el vector coordenada $[w]_B$ si:

a) $V = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \{(4,1,0), (2,0,2), (-2,1,0)\}$ y $w = (-4,1,4)$

b) $V = \mathbf{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \{(t-2)^3, t^2, (t-1), 1\}$ y $w = t^2 + 1$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $w = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \{(1,i), (i,1), (i,i), (1,-1)\}$ y $w = (2+i, i-2)$.

6. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, los vectores $(a,1,0), (1,-1,a), (1-a,1,0)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?