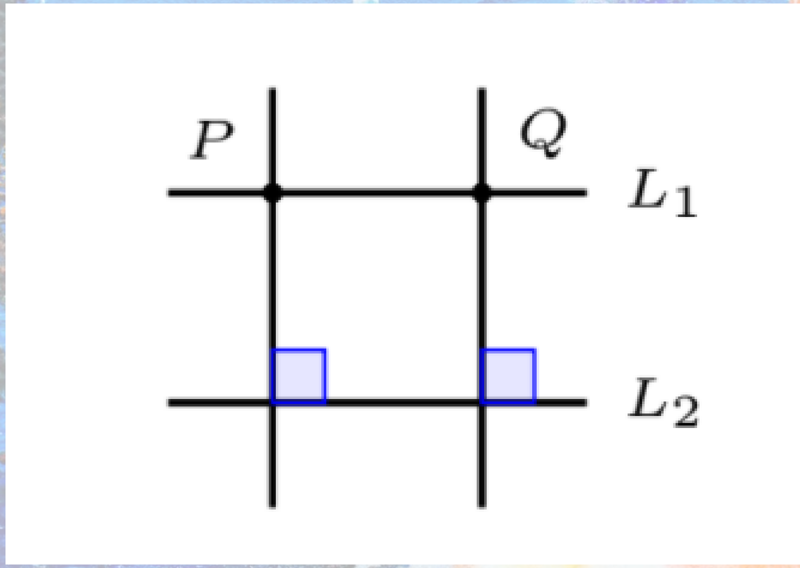
TEMA 1

teorema de thales

SCARLETE PALMA RIFO - PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

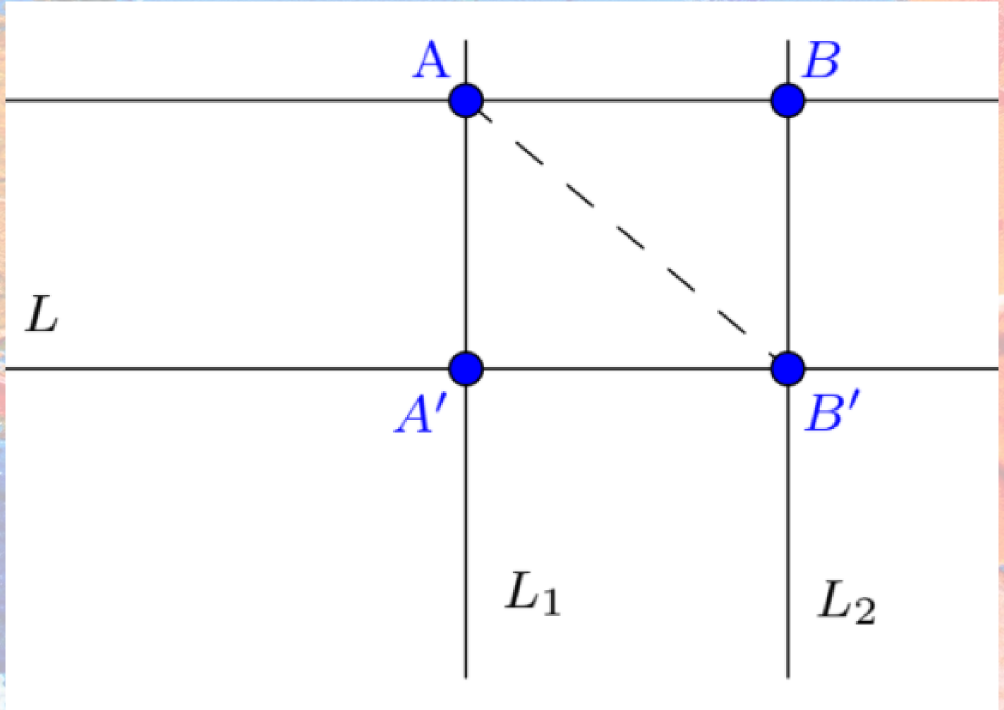
AXIOMA 1. Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas y sean P y Q dos puntos de L_1. Luego se cumple la igualdad:

$$d(P, L_2) = d(Q, L_2)$$



LEMA 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos puntos distintos en el plano y $\boldsymbol{L}$ una recta que no pasa por $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Entonces:

$$d(A,L) = d(B,L) \Leftrightarrow L_{AB} \parallel L$$



DEMOSTRACIÓN:

$\Longleftarrow$) Esta flecha se demuestra directamente con el axioma 1.

$\Longrightarrow$) Para demostrar este sentido, debemos recordar que:

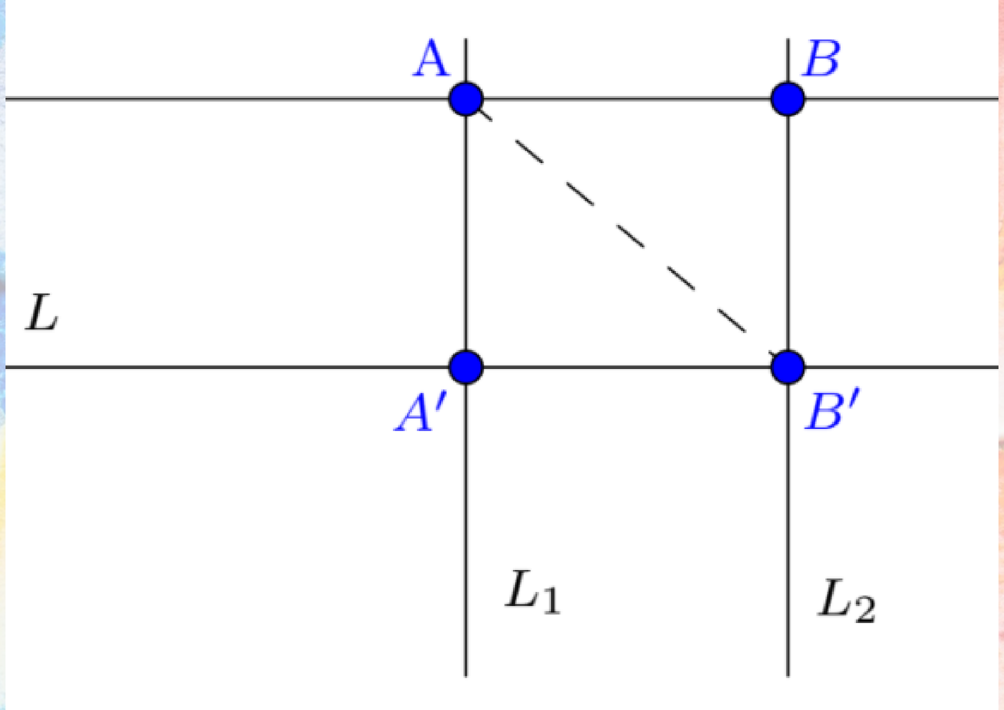
Hipótesis: $|AA'| = |BB'|$

Tesis: $L_{AB} \parallel L$.

Sean L_1 y L_2 las dos rectas perpendiculares a L y que pasan por A y B. Ponemos $A' \coloneqq L \cap L_1$ y $B' \coloneqq L \cap L_2$. Luego, por hipótesis $|AA'| = |BB'|$. Consideremos los triángulos $\Delta AA'B'$ y $\Delta B'BA$. Además, tenemos que $L_1 \parallel L_2$ pues L_1 y L_2 son perpendiculares a la misma recta L.

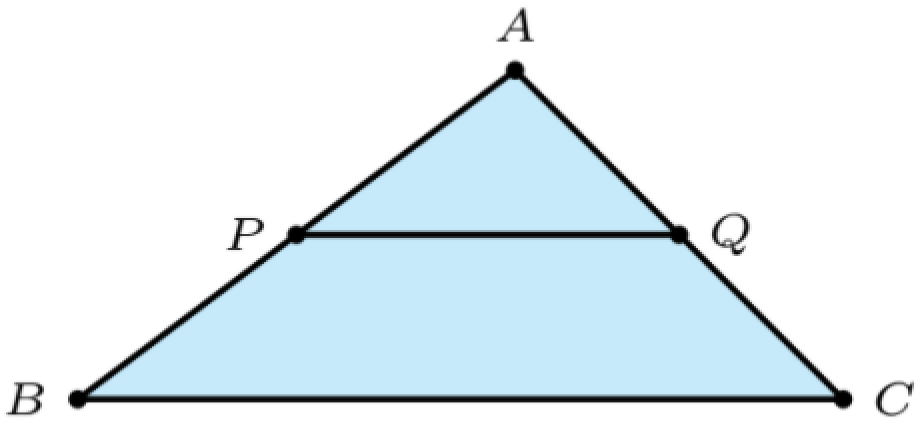
Notar que $|AA'| = |BB'|, |AB'| = |B'A|$ y $m(\measuredangle A'AB') = m(\measuredangle BB'A)$.

Por lo tanto, por el criterio LAL se deduce que los triángulos $\Delta AA'B'$ y $\Delta B'BA$ son congruentes. Luego, $m(\measuredangle AB'A) = m(\measuredangle B'AB)$ y podemos concluir que $L_{AB} \parallel L$.



TEOREMA DE THALES

TEOREMA 1. Dado un triángulo ABC y dos puntos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{AC}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:



(1) $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{BC}$,

(2) $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{|AQ|}{|QC|}$,

(3) $\dfrac{|AP|}{|AB|} = \dfrac{|AQ|}{|AC|}$.

Universidad de Concepción

DEMOSTRACIÓN:

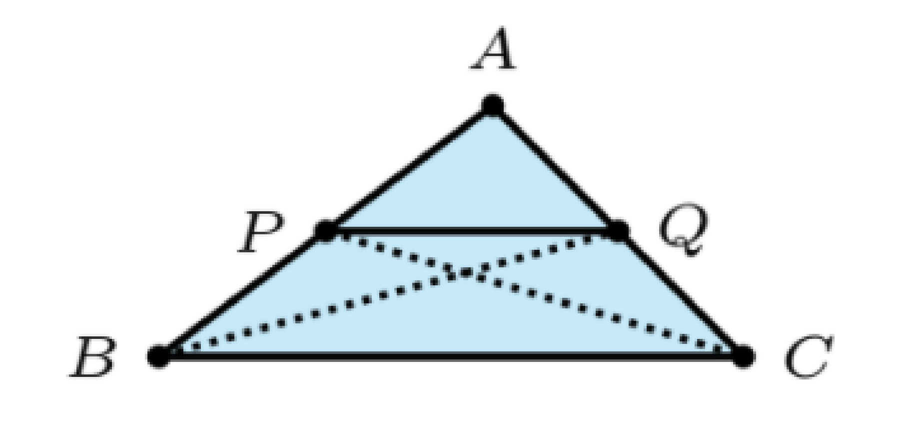
- Probamos la equivalencia de (1) con (2).

Trazamos los segmentos PC y BQ

Luego

$$\frac{|AP|}{|PB} = \frac{|AQ|}{|QC|} \quad \Leftrightarrow \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQR)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$$

$$\Leftrightarrow A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$$



Esto anterior se puede hacer porque los triángulos APQ y PQB tienen la misma atura, al considerar que los puntos de los lados que se toman como base son colineales.

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot h_{AB}\cdot|AP|}{\frac{1}{2}\cdot h_{AB}\cdot|PB|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h_{AC}\cdot|AQ|}{\frac{1}{2}\cdot h_{AC}\cdot|QC|}$$

Si recordamos que $A(\Delta APQ) = A(\Delta AQP)$, entonces se llega a que $A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$

… continuando

$$\Leftrightarrow d(B, L_{PQ}) = d(C, L_{PQ})$$ por lema 1

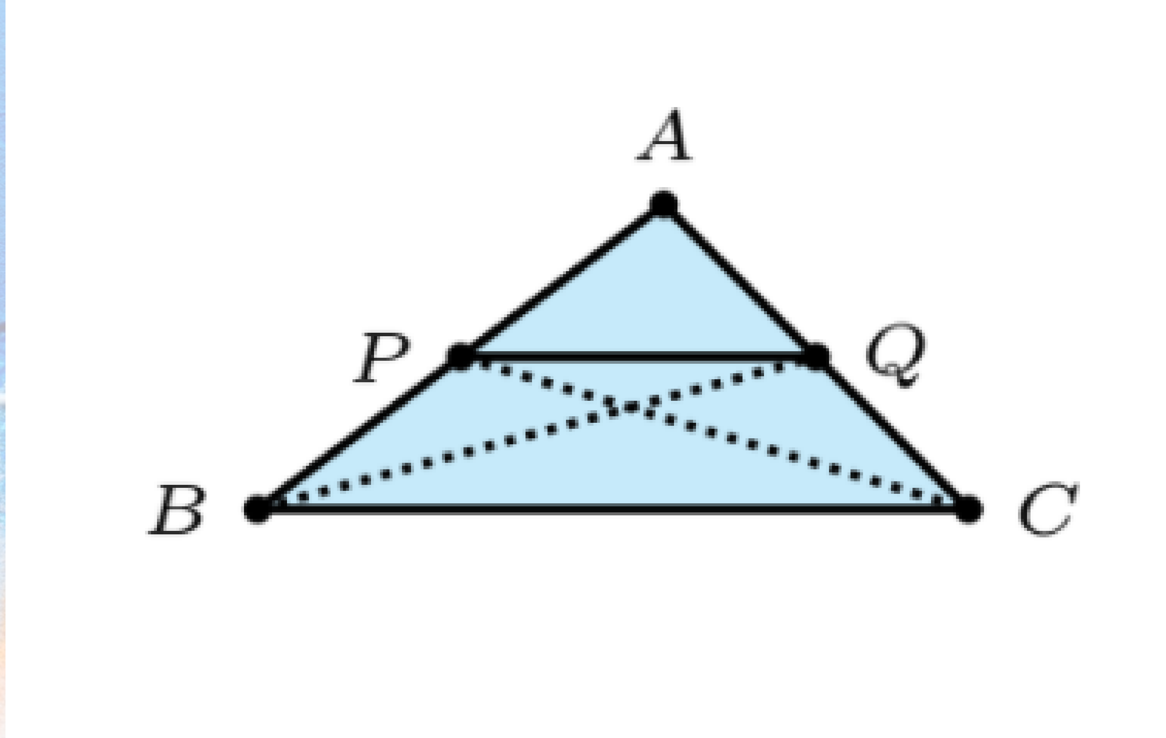
Como las áreas son iguales, el cálculo por cualquiera de sus alturas sigue siendo constante. Además, como comparten un lado, se puede trazar L_{PQ} y calcular el área de la siguiente forma: (sabiendo que son equivalentes)

$$A(\Delta PQB) = \frac{1}{2} \cdot h_{PQ} \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot h_{PQ} \cdot |PQ| = A(\Delta PQC)$$

$$\Leftrightarrow d(B, L_{PQ}) = d(C, L_{PQ})$$

$$\Leftrightarrow L_{BC} \text{ es paralela a } L_{PQ}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} \text{ es paralelo con } \overline{PQ}.$$



Probamos la equivalencia de (2) con (3):

Se toma (2)$\Leftarrow$(3) y mediante el reconocimiento de denominadores iguales, se llega a la demostración. Dado esto, se sigue de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\frac{|AP|}{|AB|}} = \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP| + |PB|}{|AP|} = 1 + \frac{|PB|}{|AP|} = 1 + \frac{1}{\frac{|AP|}{|PB|}}$$

$$\frac{1}{\frac{|AQ|}{|AC|}} = \frac{|AC|}{|AQ|} = \frac{|AQ| + |QC|}{|AQ|} = 1 + \frac{|QC|}{|AQ|} = 1 + \frac{1}{\frac{|AQ|}{|QC|}}$$

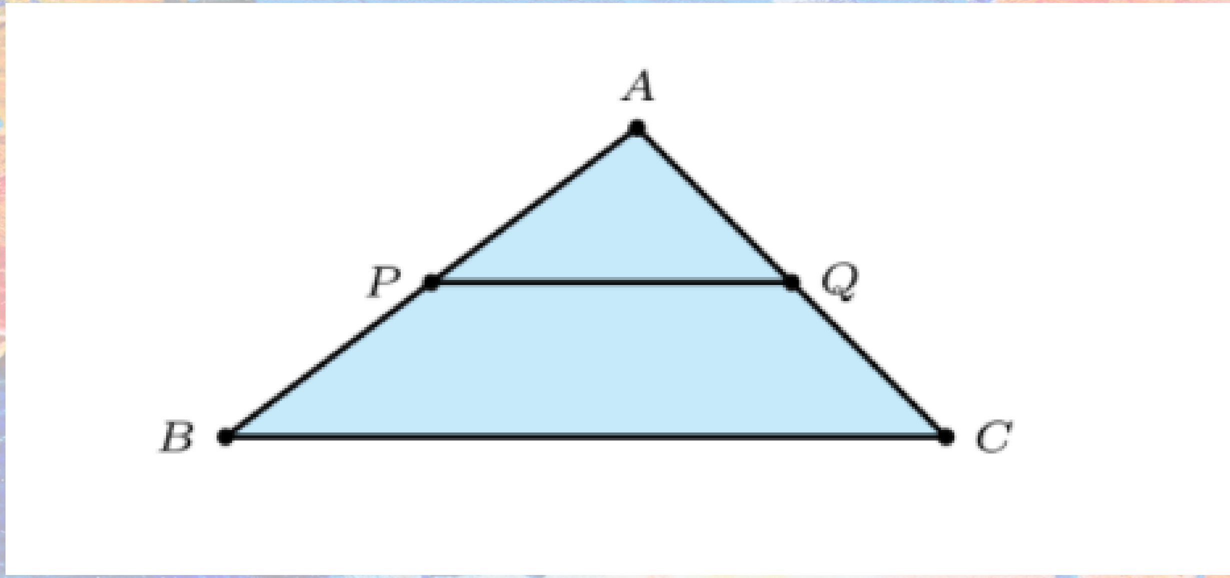
O viéndolo desde otro modo, podemos observar la transitividad de la igualdad como sigue:

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{|AP|}{|AB|}} = \frac{1}{\frac{|AQ|}{|AC|}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\frac{|AP|}{|PB|}} = 1 + \frac{1}{\frac{|AQ|}{|QC|}} \Leftrightarrow \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AQ|}{|QC|}$$

$\blacksquare$

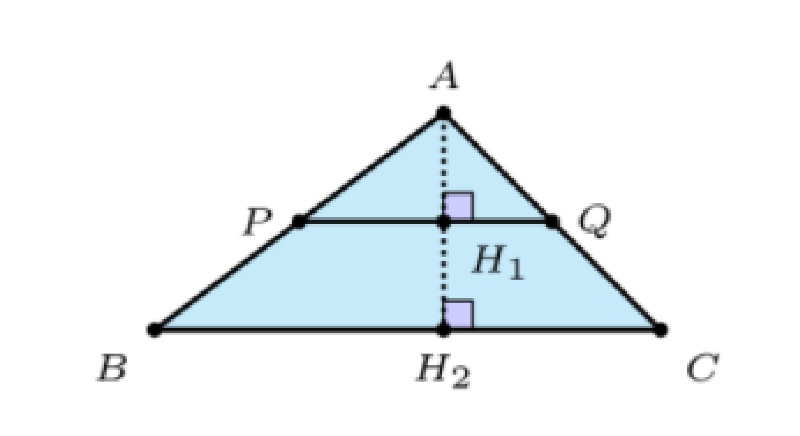
COROLARIO 1. Dado un triángulo $\boldsymbol{ABC}$ y dos puntos $\boldsymbol{P} \in \overline{\boldsymbol{AB}}$, $\boldsymbol{Q} \in \overline{\boldsymbol{PQ}}$. Si $\overline{\boldsymbol{PQ}}$ es paralelo a $\overline{\boldsymbol{BC}}$, entonces:

$$\frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|}$$



DEMOSTRACIÓN:

Trazamos la perpendicular por A al segmento $\overline{BC}$ y nombramos los dos puntos de intersecciones $h1$ con $\overline{PQ}$ y $h2$ con $\overline{BC}$, respectivamente:



Se forman cuatro triángulos rectángulos. Por el teorema de Thales se tiene que $|AQ|/|AC| = |Ah1|/|Ah2|$. Llamamos este número λ, es decir:

$$\lambda := |AQ|/|AC| = |Ah1|/|Ah2|$$

Luego, por teorema de Pitágoras, deducimos que:

$$\frac{|h1Q|}{|h2C|} = \frac{\sqrt{|AQ|^2 - |Ah1|^2}}{\sqrt{|AC|^2 - |Ah2|^2}} = \frac{\sqrt{\lambda^2|AC|^2 - \lambda^2|Ah2|^2}}{\sqrt{|AC|^2 - |Ah2|^2}} = |\lambda| = \lambda$$

De manera análoga, se muestra lo mismo para $|Ph1|/|Bh2| = \lambda$. Por lo tanto, se concluye que:

$$\frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|Ph1| + |h1Q|}{|Bh2| + |h2C|} = \frac{\lambda|Bh2| + \lambda|H2C|}{|Bh2| + |h2C|} = \lambda$$

Recordar siempre que: $\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{|Ah1|}{|Ah2|} = \lambda$, por lo tanto se puede despejar como: $|AQ| = \lambda|AC|$ u de otra manera que sea conveniente para el cálculo que se está efectuando.

$\blacksquare$