



Universidad
de Concepción



Facultad de
EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

TEMA 1

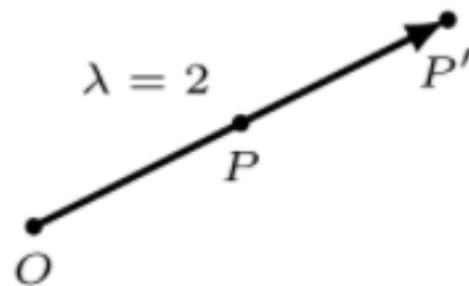
homotecia

SCARLETE PALMA RIFO - PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

DEFINICIÓN 1. Sea $O \in \Pi$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ un número real positivo. Definimos la función:

$$H_\lambda: \Pi \rightarrow \Pi \quad H_\lambda(P) = P'$$

donde $P' \in \overrightarrow{OP}$ es el único punto de la semirrecta \overrightarrow{OP} tal que $|\overrightarrow{OP'}| = \lambda |\overrightarrow{OP}|$. La función H_λ se llama Homotecia de factor λ con centro en el punto O .





HOMOTECIA

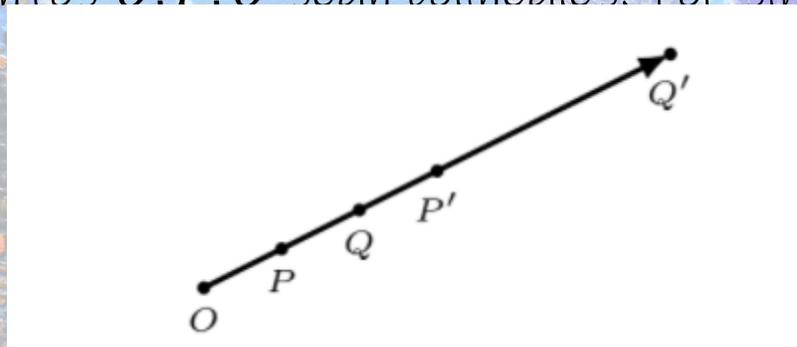
Teorema 2. Sea H_λ una homotecia del plano. Luego H_λ lleva:

- (1) segmentos de largo ℓ a segmentos de largo $\lambda\ell$;
- (2) polígonos de área A a polígonos de área $\lambda^2 A$;
- (3) ángulos de medida α a ángulos de medida α .

DEMOSTRACIÓN:

Probamos (1).

Sean P, Q dos puntos distintos. Denotamos por $P' = H_\lambda(P)$ y $Q' = H_\lambda(Q)$. Antes que todo, probamos el teorema en el caso donde los tres puntos O, P, Q sean colineales. Por simplicidad, suponemos que $Q \in \overrightarrow{OP}$.

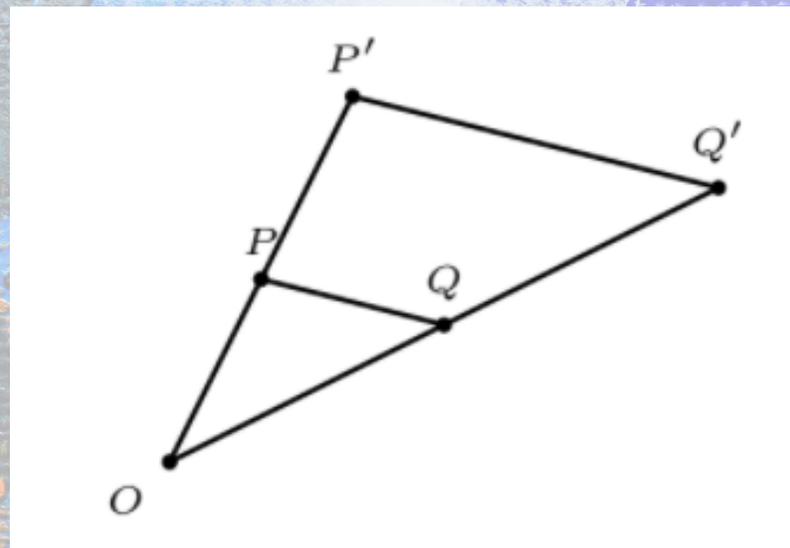


Por definición de homotecia se cumple:

$$|P'Q'| = |Q'O| - |P'O| = \lambda|QO| - \lambda|PO| = \lambda|PQ|$$



Ahora, en el caso general de los puntos O, P, Q no sean colineales como en la figura:



Observamos que $|OP'|/|OP| = |OQ'|/|OQ| = \lambda$. Por lo tanto, \overline{PQ} es paralelo con $\overline{P'Q'}$ por el teorema de Thales. Luego por el corolario 1, se concluye que:

$$|P'Q'|/|PQ| = \lambda$$

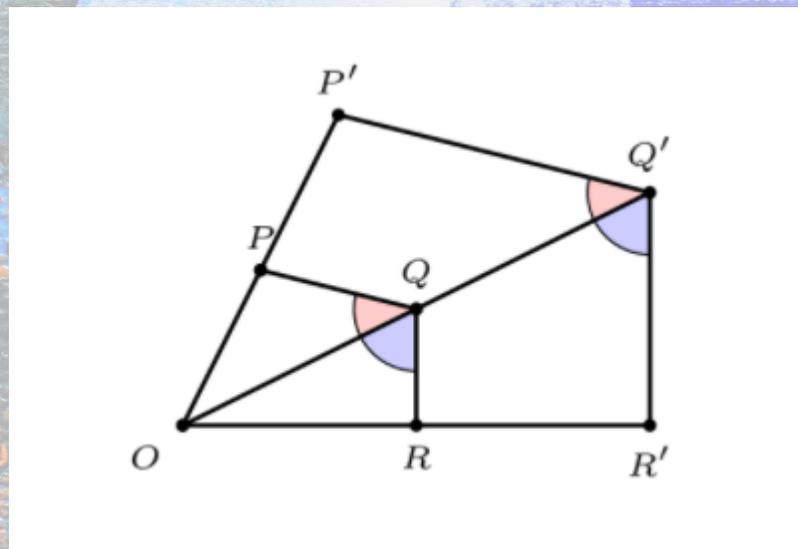


Probamos (2).

Si Δ es un triángulo, entonces H_λ modifica los largos de sus lados por un factor λ , así que el área cambia a un factor λ^2 . Como cada polígono es unión de triángulos, entonces la fórmula es cierta para cada polígono.

Probamos (3).

De acuerdo a la siguiente figura, si tenemos el ángulo $\sphericalangle PQR$ de medida α



Su imagen por H_λ tiene la misma medida que α porque $\sphericalangle PQQ$ y $\sphericalangle P'Q'O'$ son correspondientes y similarmente con $\sphericalangle OQR$ y $\sphericalangle OQ'R'$.

