open green road

Guía Matemática

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

profesor: Nicolás Melgarejo

puntaje nacional.cl

1. Sistema de ecuaciones

Considera que tienes dos variables v y t que se relacionan de cierta manera particular mediante una ecuación, por ejemplo la rapidez de un cuerpo y el tiempo transcurrido:

$$v = v_1 + a_1 t$$

donde v_1 y a_1 son coeficientes conocidos. Considera ahora otra relación diferente entre las mismas variables anteriores:

$$v = v_2 + a_2 t$$

donde v_2 y a_2 son coeficientes conocidos. Si quisiéramos saber en qué momento los dos cuerpos tendrán la misma rapidez, debemos encontrar los valores de v y t que satisfacen a la vez ambas ecuaciones de primer grado con dos incógnita. Cuando tenemos una lista de condiciones descritas como ecuaciones que deben satisfacerse a la vez, llamamos a eso **sistema de ecuaciones**.

De modo general se le denomina sistema de ecuaciones a la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

A cada una de las ecuaciones se les denomina también **restricciones** o **condiciones**. Consideremos la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas:

$$x + y = 10$$

Una solución posible es $x = 0$ e $y = 10$, es fácil darse cuenta que no es la única. Otra solución es $x = 2$ e $y = 8$ y podremos encontrar infinitos pares de soluciones para una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Digamos que ahora queremos que además de la condición anterior, se cumpla la siguiente restricción para los valores de x e y:

$$x - y = 2$$

De acuerdo a lo anterior, debemos encontrar los valores de x e y que satisfacen ambas condiciones. La simbología común para un sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y & = & 10 \\ x - y & = & 2 \end{array}\right|$$

Éste es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Para resolverlo podemos usar varios métodos sugeridos, pero los principios detrás de esos métodos no son nuevos, son los mismos que hemos descrito para resolver una ecuación de primer grado, teniendo en cuenta siempre que los valores de las incógnitas x e y son los mismos para ambas ecuaciones.

2. Métodos más usuales para la resolución de sistemas de ecuaciones

El objetivo para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas es reescribir las ecuaciones en función de una sola variable, a esta acción se le denomina **eliminación** y hay 3 maneras de hacerlo: **igualando**, **comparando** y **reduciendo**.

2.1. Igualación

En este método despejamos cualquiera de las dos incógnitas en las dos ecuaciones, por ejemplo x, como representa el mismo valor para ambas ecuaciones podemos igualar los miembros distintos de la incógnita x despejada. Veamos un ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

Resolver el sistema $\begin{array}{rcl|} x+y & = & 10 \qquad (1) \\ x-y & = & 2 \qquad (2) \\ \hline \end{array}$

Solución: De (1) Despejamos x

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x &= 10-y \qquad (3) \end{aligned}$$

Despejamos x de la ecuación (2):

$$\begin{aligned} x-y &= 2 \\ x &= 2+y \qquad (4) \end{aligned}$$

Como las ecuaciones (3) y (4) son iguales a lo mismo, podemos igualarlas

$$10-y = 2+y$$

Ahora que tenemos una ecuación con una incógnita podemos encontrar la solución para y.

$$\begin{aligned} 10-y &= 2+y \\ 10-2-y &= y \\ 8 &= 2y \\ 4 &= y \end{aligned}$$

Usamos el valor de $y = 4$ en (3) o en (4) para obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} x &= 2+y \\ &= 2+4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = 6$ e $y = 4$.
Podemos verificar la solución al reemplazar los valores de las incógnitas en las ecuaciones (1) y (2).

Desafío I

Del ejemplo anterior realiza la gráfica de cada ecuación en el plano cartesiano e identifica el punto de intersección de las curvas. ¿Qué relación crees que existe entre el punto de intersección y los sistemas de ecuaciones? Respuesta

2.2. Sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y luego sustituir el valor de esa incógnita en la otra ecuación del sistema. Veamos un ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

Resolver el siguiente sistema $\left.\begin{array}{rcr} x+3y & = & 6 \\ 5x-2y & = & 13 \end{array}\right|$

Solución: Despejamos x de la primera ecuación

$$\begin{aligned} x+3y &= 6 \\ x &= 6-3y \qquad (1) \end{aligned}$$

Reemplazamos (1) en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones, esto quiere decir que en vez de escribir x reemplazaremos $6-3y$. Con esto lograremos tener una ecuación de primer grado con una incógnita.

$$\begin{aligned} 5x-2y &= 13 \\ 5(6-3y)-2y &= 13 \\ 30-15y-2y &= 13 \\ -17y &= 13-30 \\ -17y &= -17 \\ y &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Enontraremos x reemplazando el valor de y obtenido en (2), en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{aligned} 5x-2y &= 13 \\ 5x-2(1) &= 13 \\ 5x-2 &= 13 \\ 5x &= 13+2 \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Las solución del sistema es $x=3$, $y=1$.

2.3. Reducción

En este método la idea es igualar los coeficientes de una de las incógnitas. Si los coeficientes igualados tienen igual signo, entonces restamos los dos miembros que contienen a la variable igualada y luego restamos los miembros de las dos ecuaciones que no los tienen. En el caso de que los coeficientes igualados tengan diferente signo, sumamos los miembros que tienen a la incógnita con el coeficiente igualado y luego sumamos los miembros que no los tienen. De este modo eliminamos una de las incógnitas del problema. Veamos el siguiente ejemplo:

✎ ***Ejemplo***

Resolver por reducción el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcr} 6x-5y & = & -9 \\ 4x+3y & = & 13 \end{array}\right|$

Solución: Vamos a igualar los coeficientes de la incógnita y. Para ello buscamos el mínimo común múltiplo entre los coeficientes 5 y 3. Es fácil obtener que es 15, ya que, 3 y 5 son primos relativos.

Para obtener el coeficiente 15 en la primera ecuación debemos amplificar por 3 los dos miembros de la igualdad quedando

$$18x - 15y = -27$$

Para obtener el coeficiente 15 en la segunda ecuación del sistema debemos amplificar por 5 los dos miembros de la igualdad quedando

$$20x + 15y = 65$$

El nuevo sitema de ecuaciones es

$$\left.\begin{array}{rcr} 18x-15y & = & -27 \\ 20x+15y & = & 65 \end{array}\right|$$

Como los términos a los que igualamos los coeficientes tienen signos opuesto, sumamos los miembros de la izquierda de las ecuaciones y los miembros de la derecha de las ecuaciones.

$$(18x - 15y) + (20x + 15y) = (-27) + (65) \tag{1}$$

Esto lo podemos hacer sin alterar la igualdad debido a que estamos sumando cantidades equivalentes a ambos lados de la igualdad.

Al desarrollar la expresión (3) se obtiene

$$\begin{aligned} (18x - 15y) + (20x + 15y) &= (-27) + (65) \\ 18x + 20x - 15y + 15y &= -27 + 65 \\ 38x &= 38 \\ x &= 1 \qquad (2) \end{aligned}$$

Ya sabiendo que $x = 1$, reemplazamos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera:

$$\begin{aligned} 6x - 5y &= -9 \\ 6(1) - 5y &= -9 \\ 6 + 9 &= 5y \\ 15 &= 5y \\ 3 &= y \qquad (3) \end{aligned}$$

Por los resultados de (2) y (3) la solución es $x = 1$ e $y = 3$. Lo cual podemos comprobar al reemplazar estos valores en las ecuaciones del sistema.

✎ *Ejemplo*

Resolver los sistemas de ecuaciones con cualquiera de los tres métodos vistos.

1. $$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{2x+1}{5} & = & \dfrac{y}{4} \\ 2x-3y & = & -8 \end{array}\right|$$

Solución: Podemos suprimir los denominadores de la primera ecuación del sistema multiplicando cruzado[1] obteniendo un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 4(2x+1) & = & 5y \\ 2x-3y & = & -8 \end{array}\right|$$

Efectuando las operaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 8x+4 & = & 5y \\ 2x-3y & = & -8 \end{array}\right|$$

Debemos amplificar por 4 la segunda ecuación del nuevo sistema para utilizar **reducción**.

$$\left.\begin{array}{rcl} 8x+4 & = & 5y \\ 8x-12y & = & -32 \end{array}\right|$$

Ahora restamos los miembros de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (8x+4)-(8x-12y) &= (5y)-(-32) \\ 8x+4-8x+12y &= 5y+32 \\ 12y+4 &= 5y+32 \\ 12y-5y &= 28 \\ 7y &= 28 \\ y &= 4 \qquad (1) \end{aligned}$$

Finalmente reemplazamos el resultado de (1) en cualquiera de las igualdades:

$$\begin{aligned} 8x+4 &= 5y \\ 8x &= 5(4)-4 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución es $x=2$ e $y=4$.

[1] Recordar que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $ad=bc$

2. $$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x+y}{x-y} & = & -7 \\ \dfrac{x+y+1}{x+y-1} & = & \dfrac{3}{4} \end{array}\right|$$

Solución: Suprimimos los denominadores:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & -7(x-y) \\ 4(x+y+1) & = & 3(x+y-1) \end{array}\right|$$

Desarrollamos las operaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & -7x+7y \\ 4x+4y+4 & = & 3x+3y-3 \end{array}\right|$$

Ahora reducimos términos semejantes:

$$\left.\begin{array}{rcl} 8x & = & 6y \\ x & = & -y-7 \end{array}\right|$$

Podemos aplicar el método de **sustitución**, reemplazando en la primera ecuación del sistema la expresión de x de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 8x &= 6y \\ 8(-y-7) &= 6y \\ -8y-56 &= 6y \\ -56 &= 14y \\ -4 &= y \qquad (1) \end{aligned}$$

Ahora buscamos el valor de x reemplazando el valor encontrado de y en (1):

$$\begin{aligned} 8x &= 6y \\ 8x &= 6(-4) \\ 8x &= -24 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

La solución es $x = -3$ e $y = -4$.

Un sistema de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas puede resolverse siempre con cualquiera de los tres métodos expuestos.

✍ Ejercicios 1

Resolver los sistemas de ecuaciones con el método que se estime conveniente.

1. $\left.\begin{array}{rcr} 3x-2y & = & -2 \\ 5x+8y & = & -60 \end{array}\right|$

2. $\left.\begin{array}{rcr} 9x+16y & = & 7 \\ 4y-3x & = & 0 \end{array}\right|$

3. $\left.\begin{array}{rcr} 10x+18y & = & -11 \\ 16x-9y & = & -5 \end{array}\right|$

4. $\left.\begin{array}{rcr} -13y+11x & = & -163 \\ -8x+7y & = & 94 \end{array}\right|$

5. $\left.\begin{array}{rcr} 6x-5y & = & -9 \\ 4x+3y & = & 13 \end{array}\right|$

6. $\left.\begin{array}{rcr} 36x-11y & = & -14 \\ 24x-17y & = & 10 \end{array}\right|$

7. $\left.\begin{array}{rcr} x-1 & = & 2(y-6) \\ x-3 & = & 3y-7 \end{array}\right|$

8. $\left.\begin{array}{rcr} 2(x+5) & = & 4(y-4x) \\ 10(y-x) & = & 11y-12x \end{array}\right|$

9. $\left.\begin{array}{rcr} x(y-2)-y(x-3) & = & -14 \\ y(x-6)-x(y+9) & = & 54 \end{array}\right|$

10. $\left.\begin{array}{rcr} \dfrac{x}{5} & = & \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{y}{3} & = & \dfrac{x}{3}-1 \end{array}\right|$

11. $\left.\begin{array}{rcr} \dfrac{2x+1}{5} & = & \dfrac{y}{4} \\ 2x-3y & = & -8 \end{array}\right|$

12. $\left.\begin{array}{rcr} \dfrac{x-3}{3} & = & \dfrac{y-4}{4} \\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}-3 & = & 0 \end{array}\right|$

2.4. Incógnitas en el denominador

En algunos casos nos podemos encontrar con sistemas de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas en donde las variables desconocidas están en el denominador. ¿Cómo abordar estos problemas? A continuación presentamos un ejemplo.

✎ Ejemplo

Resolver el sistema $\left.\begin{array}{rcr} \dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{3y} & = & 11 \\ \dfrac{3}{4x}+\dfrac{5}{2y} & = & 9 \end{array}\right|$

Solución: Notar que las incógnitas están en el denominador de las fracciones. Podemos usar el método de **reducción** igualando los coeficientes de $\frac{1}{x}$. Tenemos que igualar $\frac{2}{1}$ con $\frac{3}{4}$, para igualar los numeradores debemos multiplicar la primera por 3, y la segunda hay que multiplicarla por 2. Al hacer esto, los coeficientes serían $\frac{6}{1}$ y $\frac{6}{4}$. Ahora debemos igualar los denominadores, para esto basta con dividir el primer coeficiente por 4 y el segundo dejarlo igual, de tal modo que ambos sean iguales a $\frac{6}{4}$. En definitiva, para igualar los coeficientes de $\frac{1}{x}$, debemos multiplicar la primera ecuación por $\frac{3}{4}$ y la segunda ecuación multiplicarla por 2.

$$\left.\begin{array}{rcl}\dfrac{6}{4x}+\dfrac{21}{12y} & = & \dfrac{33}{4}\\[2ex] \dfrac{6}{4x}+\dfrac{10}{2y} & = & 18\end{array}\right|$$

Antes de seguir **siempre es recomendable simplificar**:

$$\left.\begin{array}{rcl}\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4y} & = & \dfrac{33}{4}\\[2ex] \dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{y} & = & 18\end{array}\right|$$

Ahora restamos los miembros de cada ecuación:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2x}+\frac{7}{4y}\right)-\left(\frac{3}{2x}+\frac{5}{y}\right) &= \left(\frac{33}{4}\right)-18\\ \frac{3}{2x}+\frac{7}{4y}-\frac{3}{2x}-\frac{5}{y} &= \frac{33}{4}-18\\ \frac{7}{4y}-\frac{5}{y} &= \frac{33-18\cdot 4}{4}\\ \frac{7}{4y}-\frac{4\cdot 5}{4y} &= -\frac{39}{4}\\ \frac{7-20}{4y} &= -\frac{39}{4}\\ -\frac{13}{4y} &= -\frac{39}{4}\\ -(13)(4) &= -(4y)(39)\\ 13 &= 39y\\ \frac{1}{3} &= y\end{aligned}$$

Sólo basta reemplazar el valor de y en alguna ecuación. Por conveniencia lo haremos la primera:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{7}{3y} &= 11\\ \frac{2}{x}+\frac{7}{3\left(\frac{1}{3}\right)} &= 11\\ \frac{2}{x}+7 &= 11\\ 2+7x &= 11x\\ 2 &= 4x\\ \frac{1}{2} &= x\end{aligned}$$

Finalmente la solución del sistema es $x=\frac{1}{2}$ e $y=\dfrac{1}{3}$.

Desafío II

Si $\dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y+1} = \dfrac{15}{2}$ Explica si es correcto o incorrecto decir que:

$$\frac{x}{a} + \frac{y+1}{a} = \frac{2}{15}$$

Respuesta

Ejercicios **2**

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

1. $\left.\begin{aligned} \frac{3}{x} + \frac{7}{y} &= 1 \\ \frac{1}{3x} + \frac{21}{y} &= 2 \end{aligned}\right|$

2. $\left.\begin{aligned} \frac{4}{x} + \frac{12}{y} &= 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{2y} &= 0 \end{aligned}\right|$

3. Representación gráfica de un sistema de ecuaciones

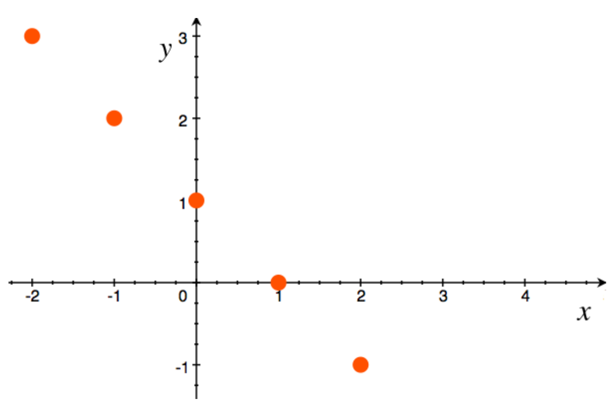
Anteriormente vimos que las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tenían infinitas soluciones. El caso que observamos fue la ecuación

$$x + y = 1$$

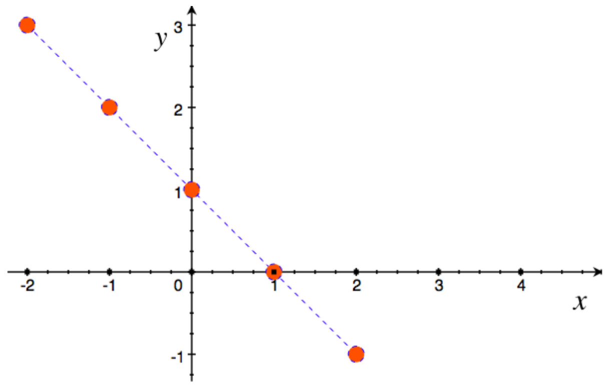
Si hacemos una tabla con algunos de los valores de x e y para los cuales se cumple la igualdad obtendremos algo así

x	**y**
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1
3	-2

Al ubicar estos resultados en un plano XY se logra lo siguiente:



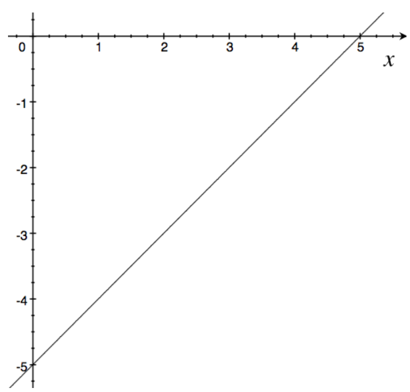
El conjunto de de todas las soluciones de $x + y = 1$ son infinitas y al graficarlas forman una recta.



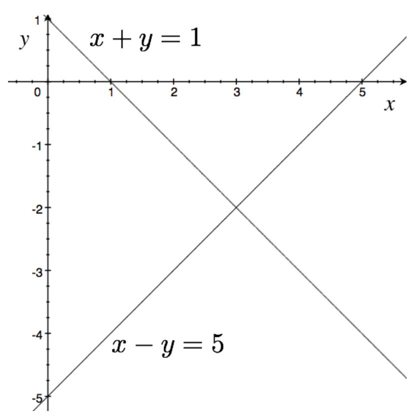
Si ahora consideramos la ecuación

$$x - y = 5$$

y, utilizando la misma dinámica, dibujamos la gráfica de las soluciones obtendremos.



Si ahora hacemos en un mismo plano las gráficas de las soluciones de las dos ecuaciones, obtenemos que las rectas se cortan en el punto $(3, -2)$:



Por otro lado, si resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 5 \end{array}\right|$$

Podemos llegar fácilmente a que la solución es $x = 3$ e $y = -2$, lo cual coincide con las coordenadas del punto de intersección entre las dos rectas.

La o las soluciones de un sistema de ecuaciones puede entenderse geométricamente como los puntos de intersección de la representación gráfica de los conjuntos solución de cada ecuación.

Cada vez que queramos encontrar los valores para los que dos o más condiciones se cumplen, podemos resolver los sistemas de ecuaciones o encontrar la intersección de las representaciones gráficas.

Desafíos resueltos

✓ Desafío I: El punto de intersección de las gráficas de los conjuntos solución de cada ecuación coincide con la solución del sistema de ecuaciones.Volver

✓ Desafío II: Es incorrecta la implicancia. Para que sea cierta la igualdad hay que invertir ambos miembros de la igualdad completamente y no cada término que lo compone por separado. La expresión correcta sería

$$\frac{1}{\frac{a}{x} + \frac{a}{y+1}} = \frac{2}{15}$$

Volver

Bibliografía

[1] Álgebra, *Edición 1983*, CODICE S.A. Madrid (1983)
Dr. Aurelio Baldor.

[2] Apuntes para la preparación de la PSU Matemática, *Segunda Edición, 2009*, *Pamela Paredes Núñez, Manuel Ramírez.*