

PROBABILIDADES





Consideremos algunas cosas y/o conceptos antes de seguir.....

- La probabilidad se refiere de manera general al estudio de la aleatoriedad y la incertidumbre.
- Un experimento es cualquier acción o proceso que genere observaciones (resultados), en particular estamos interesados en los experimentos aleatorios.
- Dado un experimento, este tiene un *espacio muestral* asociado, usualmente denotado por Ω , el cual corresponde al conjunto de todos los resultados posibles.
- A partir de una experimento se pueden definir *sucesos o eventos*, a los cuales les corresponde un grupo de resultados, es decir, un subconjunto del espacio muestral.
- A cada evento se le puede asignar una probabilidad.
- La probabilidad de ocurrencia es aquella cuantificación que se da cuando algo se repite muchas veces bajo las mismas condiciones.



Definición frecuentista

Corresponde a la idea más intuitiva y se relaciona directamente con las tablas de frecuencia.

Si un experimento es repetido n veces bajo las mismas condiciones y el evento A ocurre m veces, entonces la probabilidad que el evento A ocurra está dada por

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Regla de Laplace

- Cuando los resultados de un experimento son equiprobables, es decir, todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrir, se puede obtener la probabilidad de un evento como:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$



- El resultado anterior necesita contar el número de resultados de un evento. Sin, embargo, cuando este número (cardinalidad del espacio muestral, $\#\Omega$), es muy grande, hacer el listado de elementos que viven en Ω es muy complicado. Por lo cual es bueno disponer de ciertas *reglas de conteo*.



Reglas de conteo

Tienen como objetivo determinar la cardinalidad de un determinado evento de interés y/o la cardinalidad del espacio muestral obtenido a partir de un experimento.

- **Principio aditivo:** Si un evento A puede ocurrir de n veces y otro evento B de m formas, entonces el evento A o B puede ocurrir de $n + m$ formas, siempre y cuando A y B sean eventos excluyentes. Por otro lado si, $A \cap B \neq \phi$, entonces A o B puede ocurrir de $n + m - k$ maneras, donde k es el número de elementos del evento $A \cap B$.



Ejemplo:

Un experimento consiste en la extracción de una carta al azar de una baraja de naipes inglés de 52 cartas y registrar la carta extraída. ¿De cuántas maneras puede ocurrir el evento obtener una carta negra o un rey?

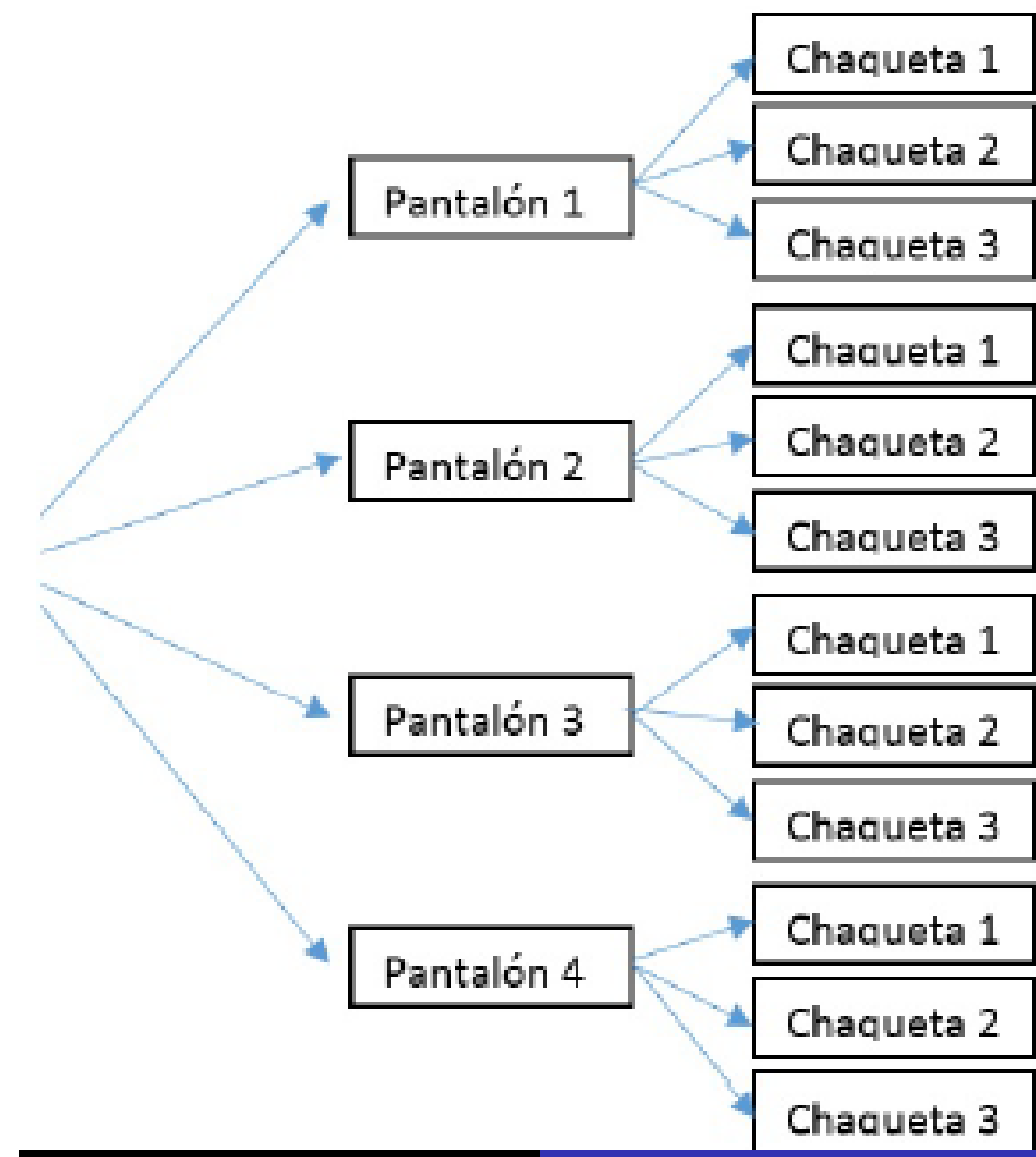


- **Principio Multiplicativo:** Si un evento A puede ocurrir de n formas y otro evento B de m formas, entonces el evento A y B puede ocurrir de $n \cdot m$ formas.

Ejemplo: Un niño debe escoger que ropa se pondrá para una fiesta, para ello dispone de 4 pantalones y 3 chaquetas. ¿De cuántas maneras puede combinar estas prendas?.



En las situaciones que presentan diversas etapas, como por ejemplo: armar el menú, decidir que me pondré de ropa, etc., es conveniente realizar una representación a través de un *diagrama de árbol*, el cual además de facilitar la visualización de todos los resultados posibles, permite calcular probabilidades.



- Y si además puede escoger entre usar zapatillas negras, zapatillas blancas o zapatos, ¿cuántas posibilidades hay?.
- Y si debe elegir entre las 7 poleras disponibles, ¿cuántas formas distintas tiene para vestirse?
- Como podemos ver el cálculo se va complicando, luego, podemos generalizar lo anterior:

Principio multiplicativo

Si un experimento puede ser desglosado en etapas, el número total de resultados del experimento completo corresponde a la multiplicación del número de resultados posibles en cada una de las etapas.

Así en general, si la primera etapa tiene n_1 resultados, la etapa 2 tiene n_2 ,, entonces el número total de resultados del experimento será $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots = \#\Omega$.





Así también el principio multiplicativo se puede aplicar en ejemplos como:

¿Cuántos números de 2 cifras se pueden formar con los números 1, 2 y 3?

- a) Si las cifras pueden ser iguales:
- b) Si las cifras deben ser distintas:



Axiomas de Probabilidad

Axiomas

Dado un espacio muestral Ω y A un evento definido sobre Ω , una **función de probabilidad** $P(\cdot)$ cumple que

- 1 $P(\Omega) = 1$.
- 2 $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$.
- 3 $P(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, si $A_i \cap A_j = \phi$, $A_i \subset \Omega$.



Propiedades

Sean A , B y C eventos definidos sobre el espacio muestral Ω ,

- 1 Para cualquier par de eventos A y B , se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Obs: Si $A \cap B = \phi$, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

se conoce como la regla aditiva



Propiedades

Sean A , B y C eventos definidos sobre el espacio muestral Ω ,

2) La probabilidad del evento complemento está definida como

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

3) Se cumple que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Propiedades

- 4) Si $A_1, A_2, \dots, A_k$ son eventos definidos sobre Ω de tal manera que forman una partición de Ω , es decir los A_i son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$



Ejemplos

- 1) Se sabe que el 18% de los estudiantes de pregrado sufren de depresión en algún periodo de su carrera, que el 2% pierde la carrera y que el 19% sufre de depresión o pierde la carrera:
 - a) ¿Cuál es la prob. que un estudiante elegido al azar sufra de depresión y pierda la carrera?
 - b) ¿Cuál es la prob. que sólo sufra de depresión?
 - c) ¿Cuál es la prob. que sólo pierda la carrera?
 - d) ¿Cuál es la prob. que no pierda la carrera y no sufra de depresión?



Probabilidades condicionales

- Todas las probabilidades que hemos calculado hasta ahora han sido probabilidades incondicionales: definidas sobre el espacio muestral original.
- Sin embargo, en algunos experimentos, a medida que éste se lleva a cabo, el espacio muestral cambia. En tales circunstancias el cálculo de probabilidades se basa en las denominadas *probabilidades condicionales*.



Cálculo de probabilidades condicionales

Considere el siguiente ejemplo, se extrae una carta al azar de un mazo de 52 cartas. Si la carta extraída es un mono (J,Q,K).
¿Cuál es la probabilidad que sea un rey?



Probabilidad condicional

Si A y B son eventos definidos sobre Ω , y $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado B , denotada como $P(A|B)$ está dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La idea de la probabilidad condicional es que el espacio muestral ha sido actualizado a B (información a priori). Así, la ocurrencia de los eventos depende de su relación con el evento B .



Probabilidad condicional

En particular, note que sucede con la probabilidad condicional de eventos disjuntos.

Suponga que A y B son eventos disjuntos, es decir:

$$P(A \cap B) = 0$$

Se tiene entonces que

$$P(A|B) = P(B|A) = 0$$

Obs: Si $P(B) = 0$, entonces $P(A|B) = 0$



Regla multiplicativa

Usando la definición de probabilidad condicional, es fácil verificar la siguiente relación:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Así, la probabilidad del evento intersección puede ser calculada como:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Este resultado se conoce como **Regla multiplicativa**



Resolvamos el siguiente ejercicio

Una empresa recibe insumos de dos compañías: 45% de los insumos provienen de la compañía A y el resto, de la compañía B. De los insumos suministrados por la empresa A, se sabe que el 80% no presentan defectos; mientras que de los insumos entregados por la compañía B, el 15% presenta defectos.

- 1 ¿Cuál es la probabilidad de que, si un insumo es seleccionado al azar, éste tenga defectos?.
- 2 Si se sabe que un insumo tiene defectos, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido entregado por la compañía A?.



Teorema de la probabilidad total

Teorema: Suponga que los eventos $A_1, A_2, \dots, A_k$ conforman una partición del espacio muestral Ω , es decir

$$A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j, \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \Omega$$

entonces,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_k)P(A_k) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

