Como las raíces tienen el mismo índice, el radical mayor es el que tiene la mayor cantidad subradical, en este caso

$$\sqrt[6]{125} > \sqrt[6]{100}$$

Entonces podemos concluir que

$$\sqrt{5} > \sqrt[3]{10}$$

✍ ***Ejercicios*** **5**

Escribir en orden decreciente de magnitud.

1. $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{3}$
2. $\sqrt[6]{15}$, $\sqrt[4]{7}$
3. $\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{4}$
4. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[4]{18}$
5. $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{15}$
6. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[9]{24}$

5. Racionalización

Consiste en reescribir una fracción cuyo denominador es un radical a otra fracción equivalente en donde su denominador sea un racional. Con esta acción hacemos "desaparecer" todo signo radical del denominador. En la racionalización podemos distinguir dos casos diferentes.

☞¡Mira!

5.1. Denominador monomio radical

En este caso debemos amplificar la fracción por el radical, del mismo índice del radical del denominador, tal que al multiplicarlo con el denominador dé como resultado un racional. Para comprenderlo veamos una serie de ejemplos.

✎ ***Ejemplo***

Racionaliza:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5x}}$

Solución: Para eliminar el radical del denominador amplificamos por $\sqrt{5x}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5x}} &= \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5x}} \\ &= \frac{\sqrt{5x \cdot 1}}{\sqrt{5x}\sqrt{5x}} \\ &= \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5^2x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{5x}}{5x}\end{aligned}$$

De manera general para cualquier $a > 0$ se cumple que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x}}$

Solución: El denominador es $\sqrt[3]{9x}$ que es igual a $\sqrt[3]{3^2x}$. Para extraer cantidades subradicales de esta raíz cúbica, los exponentes de los términos que componen a la cantidad subradical deben ser múltiplos de 3. Sabemos que la raíz por la que amplificaremos tiene índice 3. Además la cantidad subradical es 3^2x, para que los podamos extraer de la raíz cúbica debemos multiplicarlos por $3x^2$, de este modo debemos multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[3]{3x^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{9x}} &= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3^2x}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}\sqrt[3]{3^2x}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{3x}
\end{aligned}$$

Nos podemos dar cuenta que la cantidad subradical del factor que usaremos para amplificar, se compone de todas letras y números de la cantidad subradical de la raíz del denominador, cada una de éstas elevada a la potencia que le falta para llegar al índice.

Por ejemplo, si el denominador es $\sqrt[4]{2^3x^2}$, el factor para amplificar será una raíz de índice 4 y la cantidad subradical estará compuesta por 2 y x, cada una de éstas elevadas al número que le falta a 2^3 y x^2 para llegar a un exponente igual al índice de la raíz (en este caso particular 4). A 2^3 le falta 1 unidad en el exponente y a x^2 le faltan 2 unidades en el exponente, entonces debemos multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[4]{2x^2}$.

3. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{9a}}$ **Solución:** El denominador es $\sqrt[4]{9a} = \sqrt[4]{3^2a}$, a 3 le faltan **dos** unidades en el exponente para igualar el valor del índice de la raíz, y a a le faltan **tres** unidades en el exponente. Entonces el factor es $\sqrt[4]{3^2a^3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt[4]{9a}} &= \frac{\sqrt[4]{3^2a^3}}{\sqrt[4]{3^2a^3}} \cdot \frac{3}{\sqrt[4]{3^2a}} \\
&= \frac{3 \cdot \sqrt[4]{3^2a^3}}{\sqrt[4]{3^2a^3}\sqrt[4]{3^2a}} \\
&= \frac{3\sqrt[4]{3^2a^3}}{\sqrt[4]{3^4a^4}} \\
&= \frac{3\sqrt[4]{9a^3}}{3a} \\
&= \frac{\sqrt[4]{9a^3}}{a}
\end{aligned}$$

✍ ***Ejercicios*** **6**

Racionaliza.

1. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$
2. $\dfrac{3}{\sqrt{5x}}$
3. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{12a}}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{20x^2}}$
5. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{27x^3}}$
6. $\dfrac{5n^3}{3\sqrt{mn}}$
7. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{81a^3}}$
8. $\dfrac{2}{\sqrt[6]{x^3y^5}}$
9. $\dfrac{x}{\sqrt[12]{m^{11}n^{10}}}$

5.2. Expresiones conjugadas

Consideremos una expresión algebraica que contiene radicales de índice dos:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Tomemos la expresión compuesta por los mismos elementos, pero ahora con signo opuesto:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Se dice que estas dos expresiones son **conjugadas**. Otros ejemplos de pares de conjugadas son:

$$a+\sqrt{b} \text{ y } a-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a}-b \text{ y } \sqrt{a}+b$$

Entonces la conjugada de $\sqrt{2}-1$ es $\sqrt{2}+1$, la conjugada de $\frac{1}{2}-\sqrt{11}$ es $\frac{1}{2}+\sqrt{11}$, y la conjugada de $2+3\sqrt{5}$ es $2-3\sqrt{5}$. Pero ¿cuál es la importancia de los pares de expresiones conjugadas? Veamos lo que ocurre al multiplicar expresiones conjugadas:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) &= (\sqrt{2})^2-(1)^2\\ &= 2-1\\ &= 1\end{aligned}$$

En otro ejemplo:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{11}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{11}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2-(\sqrt{11})^2\\ &= \frac{1}{4}-11\\ &= -\frac{43}{11}\end{aligned}$$

Notemos que si multiplicamos un binomio por su conjugado obtendremos una **suma por su diferencia**, lo que eliminará los radicales.

El producto de una expresión por su conjugada es racional. De hecho si $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ son reales, entonces:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

Las expresiones conjugadas son muy importantes para la racionalización donde el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado.

5.3. Denominador binomio con radicales de segundo grado

Para racionalizar el denominador de una fracción cuando éste se compone de un binomio que contiene radicales de segundo grado, debemos simplemente **amplificar la fracción por el conjugado del denominador**.

✎ ***Ejemplo***

1. *Racionaliza:*

   a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

   Solución: Amplificamos por el conjugado del denominador que es $\sqrt{5}+1$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5}-1} &= \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\\ &= \frac{2(\sqrt{5+1})}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}\\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}\\ &= \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}\end{aligned}$$

   b) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} &= \frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\\ &= \frac{(3-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\ &= \frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{3-4\sqrt{2}+2}{-1}\\ &= -1(5-4\sqrt{2})\\ &= 4\sqrt{2}-5\end{aligned}$$

2. *Racionalizar la expresión* $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ *con tres radicales de índice dos en el denominador.*

Solución: Utilizando la propiedad de asociatividad, agrupamos el denominador en 2 términos:

$$\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}}$$

El conjugado de $(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}$ es $(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}$. Amplificamos la fracción por el conjugado.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}} &= \frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{(\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2-6} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{2+2\sqrt{2\cdot 5}+5-6} \\
&= \frac{4((\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6})}{2\sqrt{10}+1} \\
&= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{2\sqrt{10}+1}
\end{aligned}$$

Ahora amplificamos por el conjugado del denominador, que es $2\sqrt{10}-1$.

$$\begin{aligned}
\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{(2\sqrt{10}+1)} &= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6}}{(2\sqrt{10}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}-1} \\
&= \frac{(4\sqrt{2}+4\sqrt{5}+4\sqrt{6})(2\sqrt{10}-1)}{(2\sqrt{10})^2-1^2} \\
&= \frac{8\sqrt{20}+8\sqrt{50}+8\sqrt{60}-4\sqrt{2}-4\sqrt{5}-4\sqrt{6}}{40-1} \\
&= \frac{16\sqrt{5}+40\sqrt{2}+16\sqrt{15}-4\sqrt{2}-4\sqrt{5}-4\sqrt{6}}{39} \\
&= \frac{36\sqrt{2}+12\sqrt{5}+16\sqrt{15}-4\sqrt{6}}{39}
\end{aligned}$$

✍ *Ejercicios* 7

Racionaliza.

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$
3. $\dfrac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}+6\sqrt{3}}$
4. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2\sqrt{10}-6}}$
5. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
6. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$