ALGEBRA BASICA

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Recordemos algunas definiciones básicas para nuestro trabajo algebraico.

Expresión Algebraica: Conjunto de cantidades expresadas con letras y números unidos entre sí por operaciones.
Ejemplos:
a) $4ax - 7y$
b) $-5a^2b^3$
c) $a + b - c + d$

Término: Expresión algebraica conformada exclusivamente por productos y/o cuocientes.
Ejemplo: $2mn^3$

En un término hay que distinguir el factor numérico y el factor literal.

El factor numérico (o coeficiente) que indica las veces que el factor literal se repite como sumando.
En el término $\mathbf{2m^2}$ el coeficiente es **2**.
En el término $\mathbf{-5ab}$ el coeficiente es **–5**.
El factor literal, que es la letra con su exponente.
En el término $\mathbf{4a^3}$ el factor literal es $\mathbf{a^3}$
En el término $\mathbf{7a^2b^4}$ el factor literal es $\mathbf{a^2b^4}$

Grado de un término algebraico: Corresponde a la suma de los exponentes de la parte literal.
Ejemplo:
El grado de $-3x^2yz^3$ es 6 que resulta de sumar los exponentes 2 + 1 + 3.

Monomio: Expresión algebraica de un solo término.
Ejemplos:
a) $7k$
b) $-0,5xy$

Polinomio: Es una expresión algebraica que se obtiene al expresar cualquier suma de monomios no semejantes.
Ejemplos:
a) $-7x^2 + 4x - 5xy$
b) $6x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x + 9$

De acuerdo a la cantidad de sumando, el polinomio recibe otras denominaciones:

Binomio: Polinomio que consta de dos términos.
Ejemplos:
a) $5x^2y + 2x^2y^3$
b) $-4x + 3y$

Trinomio: Polinomio que consta de tres términos.
Ejemplos:
a) $5x + 6y + 3z$
b) $-1 + ab + 3a^2b$

Evaluación de expresiones algebraicas

Evaluar o valorar una expresión algebraica significa asignar un valor a cada variable de los términos y resolver las operaciones indicadas en la expresión para determinar su valor final.
Ejemplo:
Valoremos la expresión $4x^2y - 5xy^2 - xy$, considerando que $x = -1$ e $y = 2$.

$4x^2y - 5xy^2 - xy = 4\cdot(-1)^2\cdot 2 - 5\cdot(-1)\cdot 2^2 - (-1)\cdot 2 = 4\cdot 1\cdot 2 - 5\cdot(-1)\cdot 4 - (-1)\cdot 2 = 8 + 20 + 2 = 30$

Términos semejantes

Dos términos son semejantes cuando tienen el mismo factor literal.
Ejemplos:
a) $4m$ y $-2m$ son términos semejantes
b) pq y p^2q **NO** son términos semejantes

Adición de términos algebraicos

Para sumar dos o más términos algebraicos, éstos deben ser términos semejantes
Ejemplos:
1. $8x - 4x + 3x - x = 6x$
2. $-2ab + 6ab + 4ab - 8ab - ab = -ab$
3. $x^2y + 5x^2y - 2x^2y = 4x^2y$

Eliminación de paréntesis

Tenemos dos situaciones: que al paréntesis lo anteceda un signo positivo o un signo negativo.
Si es positivo, no varían los términos al eliminar el paréntesis. Si es negativo, los términos cambian al signo opuesto que tenía.
Ejemplos:
a) $a + (b + c) = a + b + c$
b) $a - (b + c) = a - b - c$
c) $x + (y + z) - (x - y + z) = x + y + z - x + y - z = 2y$

PRODUCTOS ALGEBRAICOS Y FACTORIZACIÓN

Multiplicación de términos algebraicos

Se debe multiplicar cada término del primer factor por cada término del otro factor, considerando en la parte literal la regla correspondiente a la multiplicación de potencias de igual base, y luego reducir los términos semejantes, si los hay.

Ejemplos:

1. $5xy^2 \cdot -7x^3y^2 = -35x^4y^4$
2. $2xy\cdot(-5x + 4y - 3xy) = -10x^2y + 8xy^2 - 6x^2y^2$
3. $(3x - 2y)(4x + 5y) = 12x^2 + 15xy - 8xy - 10y^2 = 12x^2 + 7xy - 10y^2$
4. $(2a - 5b)(a - 2b + 5ab - 7) = 2a^2 - 4ab + 10a^2b - 14a - 5ab + 10b^2 - 25ab^2 + 35b$.

En los productos algebraicos existen algunos casos que pueden ser resuelto a través de una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado. Éstos productos reciben el nombre de **productos notables**.

Cuadrado del Binomio

Corresponde al producto de un binomio por sí mismo.

Multipliquemos $(a + b)(a + b)$ que puede expresarse como $(a + b)^2$ y luego $(a - b)(a - b)$ que puede expresarse como $(a - b)^2$

$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

$\mathbf{(a - b)^2} = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

En ambos casos vemos que se tiene la misma estructura diferenciándose sólo en un signo.

Luego podemos enunciar que:

"El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término"

La estructura que representa esta fórmula es:

$$(\square \pm \triangle)^2 = (\square)^2 \pm 2\cdot\square\cdot\triangle + (\triangle)^2$$

Donde $\square$ representa al primer término del binomio y $\triangle$ al segundo.

Ejemplos:

a) $(x + 7)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

b) $(2a - 3b)^2 = (2a)^2 - 2\cdot 2a\cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

Suma por Diferencia

Corresponde al producto de la suma de dos términos por su diferencia.
Multipliquemos la suma de (a + b) por su diferencia, o sea (a – b)

$(a + b)(a – b) = a^2 – ab + ab – b^2 = a^2 – b^2$

Podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square + \triangle)(\square - \triangle) = (\square)^2 - (\triangle)^2$$

Es decir,
"El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo"

Ejemplos:
a) $(2x + 5y)(2x – 5y) = (2x)^2 – (5y)^2 = 4x^2 – 25y^2$
b) $(7m^2 + 5n^3)(7m^2 – 5n^3) = (7m^2)^2 – (5n^3)^2 = 49m^4 – 25n^6$

Multiplicación de Binomios con un Término Común
Este producto notable corresponde a la multiplicación de binomios (x + a) por (x + b), siendo el término común **a**.
Desarrollemos 2 ejemplos para extraer una conclusión.

$(x + \mathbf{5})(x + \mathbf{3}) = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$
Observa que 5 + 3 = 8 y que 5·3 = 15

$(x – 7)(x + 2) = x^2 + 2x – 7x – 14 = x^2 – 5x - 14$
Observa que –7 + 2 = -5 y que -7·2 = -14

La estructura formada en los ejemplos anteriores es la siguiente:

$$(\square + \star)(\square + \triangle) = (\square)^2 + (\star + \triangle)\cdot\square + \star\cdot\triangle$$

Concluimos entonces que

"El producto de binomios con un término común es igual al c*uadrado del primer término, más la suma de los términos distintos multiplicada por el término común y más el producto de los términos distintos*"

Ejemplos:
a) $(x + 6)(x + 12) = x^2 + (6 + 12)x + 6\cdot12 = x^2 + 18x + 72$
b) $(a + 7)(a – 3) = a^2 + (7 – 3)a + 7\cdot-3 = a^2 + 4a - 21$

FACTORIZACIÓN

Factorizar una expresión algebraica es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

Factorizar un polinomio cuyos términos tienen un factor común. Sabemos que $m(x - y + z) = mx - my + mz$. Luego, factorizar este último polinomio es simplemente proceder a la inversa, buscando el factor común. O sea $mx - my + mz = m(x - y + z)$.
Ejemplos: Factorizar
a) $6ab^2 – 18a^2b^3 = 6ab^2(1 – 3b)$
b) $5a^2bx^4 - 15ab^2x^3 - 20ab^3x4 = 5abx^3(ax - 3b - 4b^2x)$.

Factorizar un trinomio cuadrado perfecto. Sabemos que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Luego, se tendrá inversamente que $a^2 \pm 2ab + b^2=(a \pm b)^2$.
Ejemplos: Factorizar
a) $x^2 – 10x + 25 = (x – 5)^2$
b) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

Factorización de la diferencia de dos cuadrados. Sabemos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Luego, se tendrá inversamente que: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Ejemplos: Factorizar
a) $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$.
b) $4x^2 – 0,01 = (2x)^2 – (0,1)^2 = (2x + 0,1)(2x – 0,1)$

Factorizar un trinomio de la forma $x^2 + mx + n$. Sabemos que $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$. Luego, se tendrá inversamente que: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

Ejemplos: Factorizar
a) $x^2 + 7x + 12 = x^2 + (4 + 3)x + 4\cdot3 = (x + 4)(x + 3)$
b) $x^2 + 5x – 14 = x^2 + (7 – 2)x - 7\cdot-2 = (x + 7)(x – 2)$