ECUACION CUADRÁTICA

¿Qué es una ecuación cuadrática?

Es un tipo de ecuación particular en la cual la variable o incógnita está elevada al cuadrado, es decir, es de segundo grado.

Un ejemplo sería: $2x^2 - 3x = 9$. En este tipo de ecuación no es posible despejar fácilmente la variable, por lo tanto se requiere un procedimiento general para hallar las soluciones.

Soluciones de una ecuación cuadrática: Fórmula cuadrática

El procedimiento consiste en realizar modificaciones algebraicas en la ecuación general de la ecuación cuadrática: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ hasta que la variable x quede despejada. La solución de una ecuación de segundo grado es la llamada fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

La fórmula genera dos respuestas: Una con el signo + y otra con el signo - antes de la raíz. Solucionar una ecuación de segundo grado se limita entonces, a identificar las letras a, b y c y sustituir sus valores en la fórmula cuadrática.

Es de hacer notar que, utilizar la fórmula cuadrática es un procedimiento que debe realizarse con cuidado y requiere extraer la raíz cuadrada de un número, bien sea con calculadora o cualquier proceso manual.

Estas dificultades hacen que el estudiante inexperto se equivoque constantemente en la solución. Existen procedimientos particulares, sólo aplicables a ciertos casos, en los cuales se pueden hallar las raíces de forma más fácil y rápida. Tienen que ver con técnicas de factorización.

Tipos de soluciones: Reales e imaginarias

Una ecuación cuadrática puede generar tres tipos de soluciones, también llamadas raíces, a saber:

- Dos raíces reales distintas
- Una raíz real (o dos raíces iguales)
- Dos raíces imaginarias distintas

El criterio que establece la diferencia entre estos casos es el signo del *discriminante*. Se define al discriminante Δ como:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Si el discriminante es positivo, entonces la raíz cuadrada es un número real y se generan dos raíces reales distintas

Si el discriminante es cero, la raíz es cero, y ambas raíces resultan el mismo número.

Si el discriminante es negativo, la raíz cuadrada es imaginaria, produciéndose dos raíces imaginarias o complejas.

Ejemplos

Verificación de las soluciones

A continuación se resolverán algunos ejemplos que mostrarán todos los casos posibles ya mencionados.

Resolver:

$- 5x^2 + 13x + 6 = 0$

Se identifican las letras, cuidando de que la ecuación esté ordenada respecto a x, de grado mayor a menor. Con esta condición tenemos:

a = - 5 ; b = 13 ; c = 6. Se aplica la fórmula:

$$X = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4.(-5).6}}{2.(-5)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - (-120)}}{-10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{-10}$$

Como las raíces cuadradas no son usualmente memorizadas, deben sacarse con calculadora, por tanteo o por el procedimiento manual. La raíz buscada es 17, ya que el cuadrado de 17 es precisamente, 289. Se tiene entonces que:

$$X = \frac{-13 \pm 17}{-10}$$

Hay dos raíces diferentes, una usando el signo + y otra el signo -. Llámense X_1 y X_2 a las dos soluciones, que serán:

$$X_1 = \frac{-13+17}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5} \qquad X_2 = \frac{-13-17}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ambos valores de x satisfacen la ecuación, es decir, al sustituirlos en ella, producen una identidad. Al procedimiento de sustituir para probar si los valores hallados satisfacen la ecuación se le denomina **verificación.**

Probando con x = 3. Resulta: $-5\cdot(3)^2 + 13\cdot(3) + 6 = -45 + 39 + 6 = 0$, tal como se esperaba en el segundo miembro.

Probando x = -2/5, se tiene

$$-5.\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 13.\left(-\frac{2}{5}\right) + 6 = -5.\frac{4}{25} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{20}{25} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{4}{5} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{30}{5} + 6 = -6 + 6 = 0$$

Observamos que la fracción 20/25 se simplificó a 4/5 antes de sumarla con la otra. Como ambas respuestas producen identidades, ahora es seguro que 2 y -2/5 son las raíces de $\mathbf{-5x^2 + 13x + 6 = 0}$

Resolver:

$\mathbf{6x - x^2 = 9}$

No pueden identificarse las letras directamente, ya que la ecuación está desordenada y no hay un cero del lado derecho de la igualdad, por lo tanto, deben hacerse los cambios necesarios para que la ecuación tenga la forma deseada. Trasponiendo y cambiando de lugar resulta:

$\mathbf{-x^2 + 6x - 9 = 0}$

Ahora se identifican letras: a = -1 ; b = 6 ; c = -9 ; y se aplica la fórmula cuadrática:

$$X = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.(-1).(-9)}}{2.(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Obsérvese que el discriminante es igual a cero, por lo cual se producen dos raíces iguales a 3, es decir, $x_1 = x_2 = 3$. Sustituyendo los valores en la ecuación original, se verifica que: $\mathbf{6\cdot 3 - 3^2 = 18 - 9 = 9}$ con lo cual se ha comprobado la respuesta.

Resolver:

$\mathbf{-6x + 13 = -x^2}$

Nuevamente hay que ordenar y trasponer para obtener: $\mathbf{x^2 - 6x + 13 = 0}$

Identificando letras: a=1; b=-6; c = 13. Aplicando la cuadrática se tiene:

$$X = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.(1).(13)}}{2.(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{-2}$$

El discriminante es negativo y ninguna calculadora evaluará la raíz cuadrada de un número negativo porque éste es un resultado que pertenece a los números complejos. Luego, la raíz de -16 es 4i, siendo i la base de los números complejos o imaginarios, es decir: $i = \sqrt{-1}$

Las raíces quedan entonces:

$$X = \frac{6 \pm 4i}{-2} = -3 \pm 2i$$

Separando las dos respuestas, las soluciones serán: **X_1 = -3 + 2·i ; X_2 = -3 – 2·i**

La comprobación requeriría operaciones con números complejos en forma binómica.