DESIGUALDADES E INECUACIONES

Definiciones:

a y b pertenecen a los reales

a es mayor que b, $(a > b)$, si $a - b$ es positivo

a es menor que b, $(a < b)$, si $a - b$ es negativo

Ley de la tricotomía:

"Para cada par de números reales *a* y *b*, es verdadera una, y solamente una, de las proposiciones:

$a < b \qquad a = b \qquad a > b$

Propiedades de las desigualdades	
Teorema1-Propiedad transitiva: $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}$; si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ Ejemplo ilustrativo: Como $7 > 3$ y $3 > 1$, se sigue que $7 > 1$	**Teorema2**-Suma: $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}$; si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ Ejemplo ilustrativo: Si $7 > 6$, se sigue que $7 + 5 > 6 + 5 \Leftrightarrow 12 > 11$
Teorema3-Multiplicación por un número positivo: si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ Ejemplo ilustrativo: Si $9 > 6$, se sigue que $9 \times 2 > 6 \times 2 \Leftrightarrow 18 > 12$	**Teorema4:** $\{a,b,c,d\} \in \mathbb{R}$; si $a > b$ y $c > d$, entonces $(a + c) > (b + d)$ Ejemplo ilustrativo: De $3 > -3$ y $-2 > -4$ se sigue que $(3 + (-2)) > (-3 + (-4)) \Leftrightarrow 1 > -7$
Los Teoremas 1 a 4 también son válidos si se cambia "**>**" por "**<**"	
Teorema5: $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ si, y solamente si, $-a < 0$	**Teorema6:** $\{a,b\} \in \mathbb{R}$ $a > b$ si, y solamente si, $-a < -b$ *"Si se cambia el signo de ambos miembros de una desigualdad, se cambia el sentido de la desigualdad".*
Teorema7: Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$	**Teorema8:** Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$
Teorema9: $a > 0$ si, y solamente si, $\frac{1}{a} > 0$	**Teorema10:** Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
Teorema11: Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Inecuaciones lineales

Una inecuación es una desigualdad en la que aparece una incógnita. Si el grado de la inecuación es uno, se dice que la inecuación es lineal. Resolver una inecuación es encontrar los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad. La solución de una inecuación es, por lo general, un intervalo o una unión de intervalos de números reales. El método para resolver una inecuación es similar al utilizado para resolver ecuaciones, pero teniendo presente las propiedades de las desigualdades. Es conveniente ilustrar la solución de una inecuación con una gráfica. Si la solución incluye algún extremo del intervalo, en la gráfica representamos dicho extremo con un círculo en negrita; en cambio, si la solución no incluye el extremo, lo representamos mediante un círculo blanco (transparente).

Ejemplo ilustrativo1:

Resolver la siguiente inecuación: $3x - 5 > x + 7$

Solución:

$3x - 5 > x + 7 \Leftrightarrow 3x - x > 7 + 5$ {transponiendo o aplicando el Teorema2},

$\Rightarrow \quad 2x > 12$ {reduciendo};

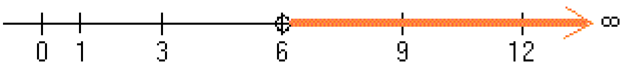
$\therefore \quad x > 6$

{dividiendo ambos miembros de la desigualdad por 6, o aplicando el Teorema10}.

$S = \{x \mid x > 6\}$

En notación de intervalos, la solución es $x \in (6, \infty)$: todos los valores reales mayores que 6.

La representación gráfica de la solución es:



Inecuaciones lineales que comprenden valores absolutos:

Inecuaciones de la forma $|x| > a,\ a > 0$: $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ó $x < -a$

Inecuaciones de la forma $|x| < a,\ a > 0$: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Inecuaciones cuadráticas:

Las inecuaciones cuadráticas presentan, o se pueden reducir a, las formas:

$$ax^2 + bx + c > 0,\quad ax^2 + bx + c < 0,\quad ax^2 + bx + c \geq 0,\quad ax^2 + bx + c \leq 0;\ \{a,b,c\} \in \mathbb{R},\ a > 0$$

El modo de solucionar estas inecuaciones es similar al utilizado para resolver ecuaciones cuadráticas.

Si el discriminante es mayor que cero, es decir, si $b^2 - 4ac > 0$, las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son reales y diferentes. Entonces podemos escribir

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2), \; r_1 \text{ y } r_2 \text{ son reales y diferentes}$$

Nota: las raíces se hallan por factorización o aplicando la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

De tal manera que una inecuación cuadrática quedaría, por ejemplo, así

$$a(x - r_1)(x - r_2) > 0$$

En este caso en particular, como $a > 0 \rightarrow (x - r_1)(x - r_2) > 0$; aplicando la "Ley de los signos" deben tenerse en cuenta las dos posibilidades siguientes:

(i) $x - r_1 > 0$ y $x - r_2 > 0$ $\quad \{+ \text{ por } + \text{ da } +\}$; ó bien

(ii) $x - r_1 < 0$ y $x - r_2 < 0$ $\quad \{- \text{ por } - \text{ da } +\}$.

En el caso que $a(x - r_1)(x - r_2) < 0$, como $a > 0 \rightarrow (x - r_1)(x - r_2) < 0$; aplicando la "Ley de los signos" deben tenerse en cuenta las dos posibilidades siguientes:

(i) $x - r_1 > 0$ y $x - r_2 < 0$ $\quad \{+ \text{ por } - \text{ da } -\}$; ó bien

(ii) $x - r_1 < 0$ y $x - r_2 > 0$ $\quad \{- \text{ por } + \text{ da } -\}$.

Ejemplo ilustrativo2:

Resolver la inecuación cuadrática $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

Solución:

$$2x^2 - 5x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(2x + 1) \geq 0 \qquad \text{(factorizando)}$$

Hay dos psosibilidades:

(i) $x - 3 \geq 0$ y $2x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 3$ y $x \geq -\dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x \geq 3$; ó bien

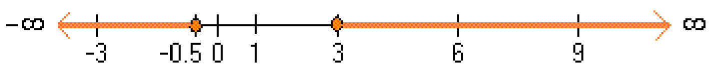
(ii) $x - 3 \leq 0$ y $2x + 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 3$ y $x \leq -\dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x \leq -\dfrac{1}{2}$

$$\text{S:}\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{2} \;\text{ ó bien }\; x \geq 3 \right\}$$

En notación de intervalos:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, \infty)$$

La representación gráfica de la solución es:



Ejercicios resueltos En los ejercicios 1 a 6 resuelva las inecuaciones propuestas y de la solución en tres formas diferentes: desigualdades, intervalos, gráfica.		
1. $-3x + 4 < 2x - 6$	**2.** $\lvert x - 1 \rvert < 5$	**3.** $\lvert 2x + 7 \rvert \geq 9$
4. $2x^2 + 5x - 3 < 0$	**5.** $4x^2 + 20x + 24 < 0$	**6.** $(x + 2)(x - 4) \geq 0$

SOLUCIONES

1. $-3x+4<2x-6$

<u>Solución</u>:

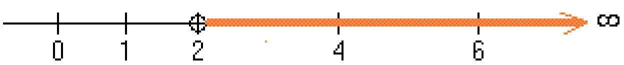
$-3x+4<2x-6 \Leftrightarrow -3x-2x<-6-4$ {transponiendo},

$\Rightarrow \quad -5x<-10$ {reduciendo};

$\therefore \quad x>2$

{dividiendo ambos mimbros de la inecuación por -5, se cambia el sentido de la desigualdad}

$S=\{x \mid x>2\}$, $x\in(2,\infty)$, la representación gráfica de la solución es:



2. $|x-1|<5$

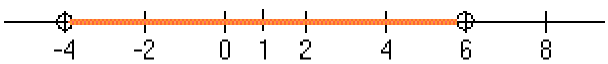
<u>Solución</u>:

$|x-1|<5 \Leftrightarrow -5<x-1<5$ {propiedad de inecuación con valor absoluto},

$\Rightarrow \quad -5+1<x-1+1<5+1$ {sumando 1 en cada *miembro* de la desigualdad};

$\therefore \quad -4<x<6$ {reduciendo}

$S=\{x \mid -4<x<6\}$, $x\in(-4,6)$, la representación gráfica de la solución es:



3. $|2x+7|\geq 9$

<u>Solución</u>:

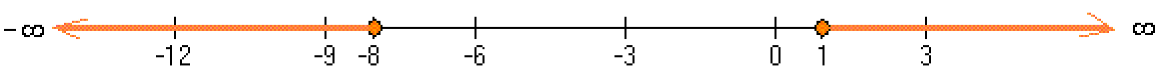
$|2x+7|\geq 9 \Leftrightarrow 2x+7\geq 9$ ó $(2x+7)\leq -9$

{propiedad de inecuación con valor absoluto},

$\Rightarrow \quad 2x\geq 2$ ó $2x\leq -16$ {restando 7 en ambos miembros de las dos inecuaciones},

$\Rightarrow \quad x\geq 1$ ó $x\leq -8$ {reduciendo}

$S=\{x \mid x\geq 1$ ó $x\leq -8\}$, $x\in[1,\infty)\cup(\infty,-8]$, la representación gráfica de la solución es:



4. $2x^2+5x-3<0$

Solución:

Aplicando la fórmula general, se obtiene:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(2)(-3)}}{2(2)}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4},$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

De tal forma que:

$$2x^2+5x-3<0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)<0$$

Hay dos posibilidades:

(i) $x-\frac{1}{2}>0$ y $x+3<0 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{2}$ y $x<-3 \;=\; \varnothing$; ó bien

(ii) $x-\frac{1}{2}<0$ y $x+3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{2}$ y $x>-3 \;=\; -3<x<\frac{1}{2}$

$S=\{x\,|\,-3<x<0.5\}$, $x\in(-3,\ 0.5)$; la representación gráfica de la solución es:

5. $4x^2+20x+24<0$

Solución:

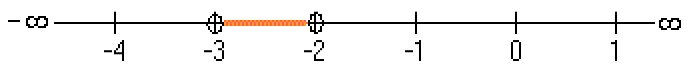
$$4x^2+20x+24<0 \Leftrightarrow x^2+5x+6<0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2)<0$$

Hay dos posibilidades:

(i) $x+3>0$ y $x+2<0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-3$ y $x<-2 \;=\; -3<x-2$; ó bien

(ii) $x+3<0$ y $x+2>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-3$ y $x>-2 \;=\; \varnothing$

$S=\{x\,|\,-3<x<-2\}$, $x\in(-3,-2)$; la representación gráfica de la solución es:



6. $(x+2)(x-4)\geq 0$

Solución:

En este caso ya se encuentra factorizado el trinomio

$$(x+2)(x-4)\geq 0$$

Hay dos posibilidades:

(i) $x+2\geq 0$ y $x-4\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\geq -2$ y $x\geq 4 \;=\; x\geq 4$; ó bien

(ii) $x+2\leq 0$ y $x-4\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq -2$ y $x\leq 4 \;=\; x\leq -2$

$S=\{x\,|\,x\leq -2$ ó bien $x\geq 4\}$, $x\in(-\infty,-2]\cup[4,\infty)$;

la representación gráfica de la solución es: