FUNCIONES

Funciones de una variable

Si a cada elemento *x* de un conjunto *X* se le hace corresponder, mediante una regla o fórmula, un elemento *y*, y sólo uno de otro conjunto *Y*, dicha correspondencia se denomina *función*. El conjunto *X* se llama Dominio de la función y el conjunto *Y* Contradominio (*codominio*) o Dominio de imágenes.
Una función es pues un conjunto de pares ordenados (*x*, *y*) en donde no puede haber dos parejas distintas en que se repita el primer elemento.

Definición de función de una variable:
Sea *X* un conjunto de números reales, una función *f* de una variable es una correspondencia que asocia a cada número *x* que pertenece a *X* uno y sólo un número real *y* que pertenece a un conjunto *Y*. Cada elemento de *Y* queda notado y determinado por *y* = *f* (*x*).

Ejemplo de funciones de una variable independiente:

$$f(x) = 3x - 2 \qquad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{x^3 - 7} \qquad (2)$$

La expresión de la función (1) indica que para hallar la imagen de un valor particular de *x*, debemos multiplicarlo por 3 y al resultado restarle 2 unidades. La fórmula de la (2) hace que a los valores de *x* se les eleve a la tercera potencia, al resultado se le reste 7 unidades y al total se le saque la raíz cuadrada. En la práctica, lo que debemos hacer, para hallar el valor correspondiente de la función para un valor particular de *x* (que pertenece, obviamente, al dominio de la función), es reemplazar en la expresión la *x* por el valor particular asignado y efectuar las operaciones indicadas. Calculemos, por ejemplo, la imagen para *x* igual a 2 en las funciones (1) y (2):

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2;$$

$$\therefore \quad f(2) = 4: \text{ "}f\text{ de dos es igual a cuatro".}$$

$$g(2) = \sqrt{2^3 - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1};$$

$$\therefore \quad g(2) = 1: \text{ "g de dos es igual a uno".}$$

Otra notación adecuada para establecer el conjunto de pares ordenados de una función de una variable independiente es:

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

A *x* e *y* se les llama *variables*, a la *x*: variable independiente, a la *y*: variable dependiente. La razón de ello es que la *x* puede tomar valores arbitrarios (siempre y cuando pertenezcan al dominio de la función); mientras que la *y* obtiene su valor dependiendo del asignado a *x* y, después de pasar por las operaciones que indica la fórmula de la función.
Como se puede colegir, el dominio de una función es aquel conjunto de números que puede tomar la variable independiente. Si estamos trabajando con los números reales, por ejemplo, debemos tener en cuenta dos restricciones importantes: "la división por 0 no existe" y "la raíz de índice par de números negativos no está definida en los reales". El dominio de una función se halla, por lo general, de una forma analítica. Para hallar el

codominio de una función es aconsejable deducirlo observando la *gráfica* de dicha función.
Ejemplo ilustrativo:
Hallar el dominio de las siguientes funciones,

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x-4} \qquad (3)$$

$$g(x) = \sqrt[4]{x+9} \qquad (4)$$

Solución:

En la función (3) se tiene un cociente, por lo que:

$$x^2 + 3x - 4 \neq 0,$$

$$\Rightarrow \quad (x+4)(x-1) \neq 0 \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad x \neq -4 \ \text{ y } \ x \neq 1;$$

$$\therefore \quad Domf = \mathbb{R} - \{-4, 1\}.$$

En la función (4) se tiene una raíz de índice par, 4, por lo que:

$$x + 9 \geq 0,$$

$$\Rightarrow \quad x \geq -9;$$

$$\therefore \quad Domg = [-9, \infty).$$

Gráfica de una función:

Es muy ilustrativo para observar el comportamiento de una función representarla gráficamente. A continuación se da la definición:
"Sea f una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado en f".

- La técnica para graficar una función depende en gran medida del tipo de función. Es conveniente hacer una tabla de valores donde estén representados los valores dados a *x* y los correspondientes hallados para *y*.

Álgebra de funciones:

Con las funciones también podemos realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y otras más (*composición de funciones*).Veamos:
Considerense las dos funciones f y g, la suma $f+g$, la diferencia $f-g$, el producto $f \cdot g$ y el cociente f/g se definen como sigue:

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

(iii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(iv) $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

El dominio, en cada caso, consiste en la intersección de los dominios de f y g; y en el cociente f/g, $g(x) \neq 0$.

Composición de funciones:

Dadas las funciones f y g, la *función compuesta* denotada por $f \circ g$, se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos x que pertencen al *domg*, tales que $g(x)$ está en el *domf*.

- La función compuesta es la función de una función.

Ejemplo ilustrativo:

Dadas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x+3}$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ y determinar los dominios respectivos.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+3}^{\,2} - 1 = x + 3 - 1;$$

$$\therefore \quad (f \circ g)(x) = x + 2$$

El $dom g = [-3, \infty)$ y el $dom f = (-\infty, \infty)$; por lo tanto $dom(f \circ g) = [-3, \infty)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(x^2 - 1) + 3};$$

$$\therefore \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

El $dom f = (-\infty, \infty)$ y el $dom g = [-3, \infty)$; por lo tanto $dom(g \circ f) = (-\infty, \infty)$.

Funciones inversas:

Si *f* y *g* son dos funciones tales que *f* (*g*(*x*)) = *g*(*f* (*x*)) = *x*, entonces *f* y *g* son funciones *inversas*.

Ejemplo ilustrativo:

Si *f* (*x*) = *x* + 3 y *g*(*x*) = *x* - 3, *f* y *g* son inversas pues,

f (*g*(*x*)) = (*x* - 3) + 3 = *x* y *g*(*f* (*x*)) = (*x* + 3) - 3 = *x*.

Funciones pares e impares:

Sea *f* una función tal que si *x* está en el dominio de *f*, -*x* también lo está:

(i) *f* es una función par si *f* (-*x*) = *f* (*x*), para toda *x* en el *dom f*.

(ii) *f* es una función impar si *f* (-*x*) = -*f* (*x*), para toda *x* en el *dom f*.

- La gráfica de una función *par* es simétrica con respecto al eje *y*
- La gráfica de una función *impar* es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplos ilustrativos:

$f(x) = 2x^2$ es una función par, pués $f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$

$f(x) = 3x^3$ es una función impar, pués $f(-x) = 3(-x)^3 = 3(-x^3) = -3x^3 = -f(x)$.

Funciones periódicas:

"Se dice que una función *f* con dominio *D* es periódica si existe un número real positivo *k* tal que *t* + *k* está en *D* y *f* (*t* + *k*) = *f* (*t*) para todo *t* en *D*. Geométricamente esto significa que la gráfica de *f* se repite cuando las abscisas de los puntos toman valores en intervalos sucesivos de amplitud *k.* Si existe un mínimo número real positivo *k* con esta propiedad, se dice entonces que *k* es el período de *f*". Ejemplos de funciones periódicas son las funciones trigonométricas. Las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen período 2p, y la tangente y la cotangente tienen período p.

Ejercicios resueltos

1. Dada $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$, encuentre

$f(-2);\ f(0);\ f(1);\ f(11/9);\ f(2x^2-1);\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h},\ h\neq 0$

En los ejercicio 1 y 2, se definen las funciones *f* y *g*. En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:
(a) *f* + *g*; (b) *f* - *g*; (c) *f* * *g*; (d) *f* / *g*; (e) *g* / *f*

2. $f(x)=x-5;\ g(x)=x^2-1$

3. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1};\ g(x)=\dfrac{1}{x}$

En los ejercicios 4 a 7, se definen las funciones *f* y *g*. En cada ejercicio defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta:
(a) $f\circ g$, (b) $g\circ f$, (c) $f\circ f$, (d) $g\circ g$

4. $f(x)=x-2;\ g(x)=x+7$

5. $f(x)=x-5;\ g(x)=x^2-1$

6. $f(x)=\sqrt{x-2};\ g(x)=x^2-2$

7. $f(x)=\dfrac{1}{x};\ g(x)=\sqrt{x}$

8. Se tiene $f(x)=2x-3$; defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante:

(a) $f(x^2)$, (b) $[f(x)]^2$, (c) $(f\circ f)(x)$

9. Determine si la función que se da es par, impar, o ninguna de las dos:

(a) $g(x)=5x^2-4$ (b) $f(x)=x^3+1$ (c) $f(t)=4t^5+3t^3-2t$

(d) $g(r)=\dfrac{r^2-1}{r^2+1}$ (e) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$ (f) $h(x)=\dfrac{4x^2-5}{2x^3+x}$

(g) $f(z)=(z-1)^2$ (h) $g(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$ (i) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

(j) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

10. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$

Muestre que *f* y *g* son funciones inversas.

11. Si $f(x)=x^2+2x+2$,

encuentre dos funciones g para las cuales

$(f\circ g)(x)=x^2-4x+5$

12. Dada $g(z)=4^z$ demostrar que $g(z+1)-g(z)=3g(z)$

SOLUCIONES

1. $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$

Solución:

Para hallar el valor correspondiente de la función f para cada valor particular dado a la variable independiente x, se sustituye la x, en la fórmula dada, por el valor numérico asignado; y se efectúan las operaciones indicadas:

$$f(-2)=\sqrt{2(-2)^2+1}=\sqrt{2(4)+1}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9};$$

$\therefore \quad f(-2)=3$

$$f(0)=\sqrt{2(0)^2+1}=\sqrt{2(0)+1}=\sqrt{0+1}=\sqrt{1};$$

$\therefore \quad f(0)=1$

$$f(1)=\sqrt{2(1)^2+1}=\sqrt{2(1)+1}=\sqrt{2+1};$$

$\therefore \quad f(1)=\sqrt{3}$

$$f(11/9)=\sqrt{2(11/9)^2+1}=\sqrt{2(121/81)+1}=\sqrt{242/81+1}=\sqrt{323/81};$$

$\therefore \quad f(11/9)=\dfrac{\sqrt{323}}{9}$

$$f(2x^2-1)=\sqrt{2(2x^2-1)^2+1}=\sqrt{2(4x^4-4x^2+1)+1}=\sqrt{8x^4-8x^2+2+1};$$

$\therefore \quad f(2x^2-1)=\sqrt{8x^4-8x^2+2+1}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{2(x+h)^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}{h}=\frac{\sqrt{2(x^2+2hx+h^2)+1}-\sqrt{2x^2+1}}{h};$$

$\therefore \quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\sqrt{2x^2+4hx+2h^2+1}-\sqrt{2x^2+1}}{h}.$

2. $f(x)=x-5;\ g(x)=x^2-1$

Solución:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-5)+(x^2-1)=x-5+x^2-1;$$

$\therefore \quad (f+g)(x)=x^2+x-6;\ \ dom(f+g)=\mathbb{R}.$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x-5)-(x^2-1)=x-5-x^2+1;$$

$\therefore \quad (f-g)(x)=-x^2+x-4;\ \ dom(f-g)=\mathbb{R}.$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-5)(x^2-1)=x^3-x-5x^2+5;$$

$\therefore \quad (f\cdot g)(x)=x^3-5x^2-x+5;\ \ dom(f\cdot g)=\mathbb{R}.$

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x)=(x-5)/(x^2-1);$$

$\therefore \quad (f/g)(x)=\dfrac{x-5}{x^2-1};\ \ dom(f/g)=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}.$

$$(g/f)(x)=g(x)/f(x)=(x^2-1)/(x-5);$$

$\therefore \quad (f/g)(x)=\dfrac{x^2-1}{x-5};\ \ dom(g/f)=\mathbb{R}-\{5\}.$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución:

$$domf = (-\infty,1) \cup (1,\infty), \quad domg = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$$

$$\left[(-\infty,1) \cup (1,\infty)\right] \cap \left[(-\infty,0) \cup (0,\infty)\right] = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty) \Leftrightarrow \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+x+x-1}{x^2-x};$$

$\therefore$ $(f+g)(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x}$; $dom(f+g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2+x-x+1}{x^2-x};$$

$\therefore$ $(f-g)(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$; $dom(f-g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left[\frac{x+1}{x-1}\right]\left[\frac{1}{x}\right];$$

$\therefore$ $(f \cdot g)(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x}$; $dom(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$.

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{x+1}{x-1} \div \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x}{1};$$

$\therefore$ $(f/g)(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$; $dom(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$.

$$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x+1};$$

$\therefore$ $(g/f)(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; $dom(g/f) = \mathbb{R} - \{0,1\} \Leftrightarrow \{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$.

4. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

Solución:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+7) - 2 = x + 7 - 2;$

$\therefore$ $(f \circ g)(x) = x + 5$; $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-2) + 7 = x - 2 + 7;$

$\therefore$ $(g \circ f)(x) = x + 5$; $dom(g \circ f) = \mathbb{R}$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x-2) - 2 = x - 2 - 2;$

$\therefore$ $(f \circ f)(x) = x - 4$; $dom(f \circ f) = \mathbb{R}$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x+7) + 7 = x + 7 + 7;$

$\therefore$ $(g \circ g)(x) = x + 14$; $dom(g \circ g) = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

Solución:

(a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 - 1) - 5 = x^2 - 1 - 5;$

$\therefore$ $(f\circ g)(x) = x^2 - 6;\ dom(f\circ g) = \mathbb{R} \Leftrightarrow (-\infty,\infty).$

(b) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (x-5)^2 - 1 = x^2 - 10x + 25 - 1;$

$\therefore$ $(g\circ f)(x) = x^2 - 10x + 24;\ dom(g\circ f) = \mathbb{R}.$

(c) $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = (x-5) - 5 = x - 5 - 5;$

$\therefore$ $(f\circ f)(x) = x - 10;\ dom(f\circ f) = \mathbb{R}.$

(d) $(g\circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1;$

$\therefore$ $(g\circ g)(x) = x^4 - 2x^2;\ dom(g\circ g) = \mathbb{R}.$

6. $f(x) = \sqrt{x-2};\ g(x) = x^2 - 2$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f\circ g$ es el conjunto de todos x que pertencen al $dom g$, tales que $g(x)$ está en el $dom f$ ".

(a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2-2) - 2} = \sqrt{x^2 - 4}.$

$dom g = (-\infty,\infty),\ dom f = [2,\infty):\ x^2 - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ó $x \geq 2,$

$\Rightarrow$ $dom(f\circ g) = (-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

$\therefore$ $(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4};\ dom(f\circ g) = (-\infty,-2]\cup[2,\infty).$

(b) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x-2}^{\,2} - 2 = x - 2 - 2 = x - 4$

$dom f = [2,\infty),\ dom g = (-\infty,\infty):\ \sqrt{x-2} \in (-\infty,\infty) \Leftrightarrow x > 2,$

$\Rightarrow$ $dom(g\circ f) = [2,\infty);$

$\therefore$ $(g\circ f)(x) = x - 4;\ dom(g\circ f) = [2,\infty).$

(c) $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$

$dom f = [2,\infty),\ dom f = [2,\infty):\ \sqrt{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 6,$

$\Rightarrow$ $dom(f\circ f) = [6,\infty);$

$\therefore$ $(f\circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 2};\ dom(f\circ f) = [6,\infty).$

(d) $(g\circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 2;$

$\therefore$ $(g\circ g)(x) = x^4 - 4x^2 + 2;\ dom(g\circ g) = \mathbb{R}.$

7. $f(x)=\dfrac{1}{x};\ g(x)=\sqrt{x}$

Solución:

Para hallar los dominios de las funciones compuestas, téngase en cuenta que "el dominio de $f\circ g$ es el conjunto de todos x que pertencen al $domg$, tales que $g(x)$ está en el $domf$".

(a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$domg=[0,\infty),\ domf=\mathbb{R}-\{0\}:\ \sqrt{x}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\wedge x\geq 0,$

$\Rightarrow\quad dom(f\circ g)=(0,\infty)$

$\therefore\quad (f\circ g)(x)=\sqrt{x^2-4};\ dom(f\circ g)=(-\infty,-2]\cup[2,\infty).$

(b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

$domf=(-\infty,0)\cap(0,\infty),\ domg=[0,\infty):\ \dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>0,$

$\Rightarrow\quad dom(g\circ f)=(0,\infty);$

$\therefore\quad (g\circ f)(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}};\ dom(g\circ f)=(0,\infty).$

(c) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=x$

$\therefore\quad (f\circ f)(x)=x;\ dom(f\circ f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$

(d) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x};$

$\therefore\quad (g\circ g)(x)=\sqrt[4]{x};\ dom(g\circ g)=[0,\infty).$

8. $f(x)=2x-3$

Solución:

(a) $f(x^2)=2x^2-3;\ \ domf(x^2)=\mathbb{R}$

(b) $[f(x)]^2=(2x-3)^2=4x^2-12x+9;\ domf[f(x)]^2=\mathbb{R}$

(c) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=2(2x-3)-3=4x-6-3=4x-9;\ dom(f\circ f)=\mathbb{R}.$

9. Solución:

(a) $g(x) = 5x^2 - 4$

$g(-x) = 5(-x)^2 - 4 = 5x^2 - 4$

$g(-x) = g(x) = 5x^2 - 4$: g es una función par.

(b) $f(x) = x^3 + 1$

$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 \neq f(x)$: f no es una función par

$-f(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1 \neq f(-x)$: f no es una función impar

f no es ni par ni impar.

(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$

$f(-t) = 4(-t)^5 + 3(-t)^3 - 2(-t) = -4t^5 - 3t^3 + 2t = -(4t^5 + 3t^3 - 2t)$

$f(-t) = -f(t)$: f es una función impar

(d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

$g(-r) = \dfrac{(-r)^2 - 1}{(-r)^2 + 1} = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

$g(-r) = g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$: g es una función par.

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x > 0 \\ -1 & \text{si } -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

(f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

$h(-x) = \dfrac{4(-x)^2 - 5}{2(-x)^3 + (-x)} = \dfrac{4x^2 - 5}{-2x^3 - x} = -\dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x} = -h(x)$

$h(-x) = -h(x)$: h es una función impar.

(g) $f(z) = (z - 1)^2$

$f(-z) = (-z - 1)^2 = (z + 1)^2 \neq f(z)$: f no es una función par

$-f(z) = -(z - 1)^2 \neq f(-z)$: f no es una función impar

f no es ni par ni impar.

(h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

$g(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

$g(-x) = g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$: g es una función par.

(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(-x) = g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$: g es una función par.

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$

$f(-x) = -f(x)$: f es una función impar

10. Solución:

$$f(x)=\frac{1}{x+1},\ g(x)=\frac{1-x}{x}$$

$$f(g(x))=\frac{1}{\frac{1-x}{x}+1}=\frac{1}{\frac{1-x+x}{x}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

$$g(f(x))=\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{x}{1}=x$$

$$f(g(x))=g(f(x))=x;$$

$\therefore$ f y g son funciones *inversas*.

11. $f(x)=x^2+2x+2$

Solución:

Encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f\circ g)(x)=x^2-4x+5$$

$$f(g(x))=(g(x))^2+2(g(x)+2=x^2-4x+5,$$

$$\Rightarrow\quad (g(x))^2+2(g(x)-(x^2-4x+3)=0,$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4(x^2-4x+3)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4x^2-16x+12}}{2},$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{-2\pm\sqrt{4x^2-16x+16}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{x^2-4x+4}}{2}=-1\pm\sqrt{(x-2)^2},$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=-1\pm(x-2);$$

$$\Rightarrow\quad g(x)=-1+x-2\quad\text{y}\quad g(x)=-1-x+2;$$

$\therefore$ Las funciones son $g(x)=x-3$ y $g(x)=-x+1$.

12. Solución:

$$g(z)=4^z \quad (1)$$

$$g(z+1)=4^{z+1} \quad (2)$$

$$g(z+1)-g(z)=3g(z) \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3), se obtiene:

$$4^{z+1}-4^z=3\cdot4^z,$$

$$\Rightarrow\quad 4^z(4-1)=3\cdot4^z \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow\quad 4^z(3)=3\cdot4^z \qquad \{\text{reduciendo}\};$$

$$\therefore\quad 3\cdot4^z=3\cdot4^z$$