FUNCIÓN CUADRÁTICA

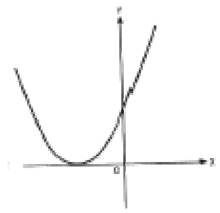
Una función cuadrática es una función definida por:

$f:\Re \to \Re$
$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y $c \in \Re$, $a \neq 0$

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola** y su dominio es el conjunto de los números reales.

Si a>0, se dice que la parábola es positiva y, en este caso, abre hacia arriba. Si a<0, la parábola es negativa y abre hacia abajo.

Si a>0 y b>0, entonces la parábola se encuentra hacia la izquierda del eje y.

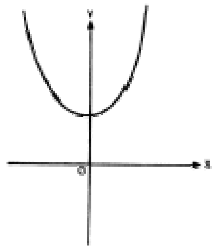


Si a>0 y b<0, entonces la parábola se encuentra hacia la derecha del eje y.

Si a<0 y b>0, entonces la parábola se encuentra hacia la derecha del eje y.

Si a<0 y b<0, entonces la parábola se encuentra hacia la izquierda del eje y.

Si b=0, el eje y, es eje de simetría de la parábola.



El punto (0,c) indica la intersección de la parábola con el eje y.

Ecuaciones Cuadráticas o de Segundo Grado

Corresponden a las expresiones de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y $c \in \Re$

Veamos los tipos de ecuaciones de segundo grado que existen.

Ecuación de segundo grado completa

La expresión de una ecuación de segundo grado completa es $ax^2+bx+c=0$ con a, b y c distintos de cero.

Cuando $a=1$, la ecuación recibe el nombre de **completa particular**

Ecuación de segundo grado incompleta

Una ecuación de segundo grado es incompleta cuando los términos b ó c, o ambos, son cero. Así tenemos:

$ax^2=0$; si b = 0 y c = 0.

$ax^2+c=0$; si b = 0.

$ax^2+bx=0$ si c = 0.

Resolución de Ecuaciones de Segundo Grado

Incompletas:

1) $ax^2=0$, con $a \neq 0$

Despejando x^2 se tiene: $x^2=\frac{0}{a}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

Por lo tanto, las ecuaciones de la forma $ax^2=0$ tienen como solución única $x=0$.

Ejemplo: $3x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{0}{3}=0 \Rightarrow x=0$

2) $ax^2+bx=0$, con $a \neq 0$

Se saca factor común, obteniéndose $x(ax+b)=0$.

Si el producto de dos factores da como resultado cero, uno de ellos debe ser cero:

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ó \\ ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=\dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

De donde:

$$x=0 \wedge x=-\frac{b}{a}$$

Ejemplo: $2x^2+4x=0$

$$x(2x+4)=0 \begin{cases} x=0 \\ ó \\ 2x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

De donde: $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$.

3) $ax^2+c=0$.

De donde:

$$x^2=\frac{-c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si c<0 la ecuación no tiene solución, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Ejemplo: $3x^2-27=0$

$3x^2=27 \Rightarrow x^2=\dfrac{27}{3} \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow x=\pm3$

La ecuación tiene dos soluciones, $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

Completas:

Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, se aplica la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

De donde:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \wedge x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2-5x+6=0$.

Resolución:

a = 1; b = -5; c = 6.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \; y \; x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

O sea: x_1= 3 y x_2 = 2.

Discusión de las soluciones de una ecuación de segundo grado

Se denomina **Discriminante** a la expresión b^2-4ac, y se representa por Δ, letra griega delta mayúscula. Entonces:

$$\Delta = b^2-4ac.$$

Dependiendo del valor del discriminante, una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución.

Se distinguen tres casos:

Si Δ > 0, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas.

Si Δ = 0, las dos soluciones son la misma, o sea, $x_1 = x_2$.

Si Δ < 0, la ecuación de segundo grado no tiene solución real.

Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, y x_1 y x_2 sus soluciones, se cumple:

1. La suma de las dos soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

2. El producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado es:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Aplicando estas propiedades, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, puede expresarse como:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

o bien:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Ejemplo: Formar una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 4 y –2.
La ecuación es (x – 4)(x + 2) = 0; o sea, $x^2 - 2x - 8 = 0$

Resolución de Problemas

1. Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 168.

El par consecutivo de $2x$ es $2x + 2$.

Entonces $2x(2x + 2) = 168$.
$4x^2 + 4x - 168 = 0$. /:4
$x^2 + x - 42 = 0$.

De donde $x_1 = 6$ y $x_2 = -7$

Luego las soluciones son 12 y 14; -12 y -14.