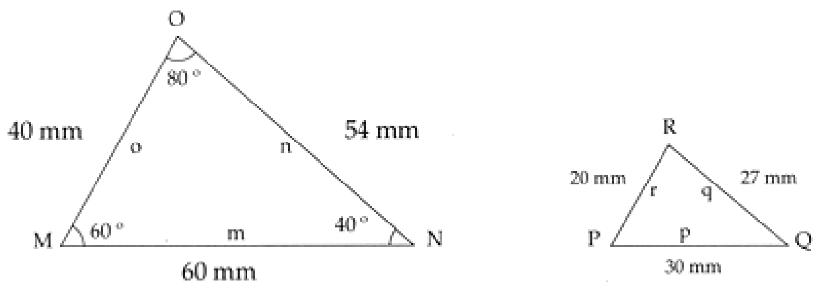
SEMEJANZA DE TRIANGULOS

En geometría, existen casos en los que se presentan ciertas similitudes entre figuras; aquí los conceptos de congruencia o semejanza se establecen cuando las figuras son de la misma forma y tienen igual o diferente tamaño.

En la congruencia, los lados y los ángulos tienen la misma medida y, en la semejanza, las dos figuras tienen la misma forma, aunque no tengan necesariamente la misma medida o tamaño; sus ángulos correspondientes u homólogos deben ser congruentes y los segmentos correspondientes o lados homólogos deben guardar entre sí una relación proporcional.

¿Cuándo se puede afirmar que dos triángulos son semejantes? Para contestar esta pregunta es necesario que se cumplan las condiciones que se analizarán a continuación:

Obsérvense los siguientes triángulos: ¿serán semejantes?



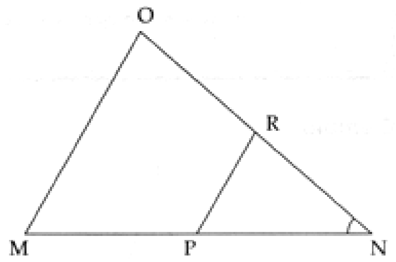
Si se toma con un transportador la medida del ángulo **M**, se puede ver que es congruente con el ángulo **P**; de la misma forma, el ángulo N es igual a **Q**, y **R** a **O**, por lo que se puede establecer que:

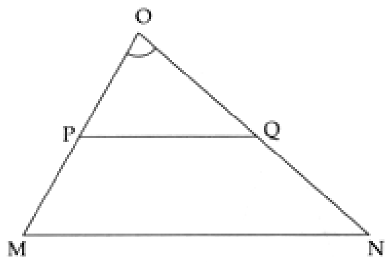
<M = <P = 60°; <N = <Q = 40°; <O = R = 80°

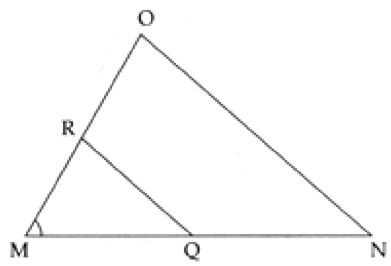
Por otra parte, las medidas en milímetros de los lados opuestos a estos ángulos tienen una razón o constante de semejanza, esto es, el cociente de los lados opuestos a ángulos iguales es constante.

$$\frac{p}{m} = \frac{30}{60} = 0.5 \quad \frac{q}{n} = \frac{27}{54} = 0.5 \quad \frac{r}{o} = \frac{20}{40} = 0.5$$

Para comprobar que los ángulos **M, N** y **O** del Δ**MNO** son, respectivamente, congruentes a los ángulos **P, Q** y **R** del Δ**PQR**, se puede calcar el **PQR**, recortar y sobreponer, uno a uno, los ángulos de los dos triángulos, como se ilustra a continuación:







Gracias a los datos obtenidos puede afirmarse que los triángulos **MNO** y **PQR** son semejantes. El símbolo ~ indica semejanza entre dos figuras, por lo que se pueden representar como:

$$\boxed{\Delta\, MNO \sim \Delta\, PQR}$$

Con base en las características señaladas en el ejemplo anterior, se puede definir lo que es la semejanza entre triángulos.

> Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales uno a uno, respectivamente; los lados opuestos a dichos ángulos son proporcionales.

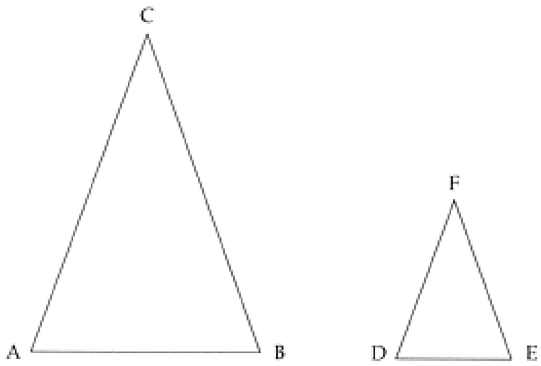
En los triángulos semejantes, los ángulos congruentes y los lados proporcionales reciben el nombre de homólogos.

Para determinar la semejanza entre dos triángulos existen tres criterios que son los siguientes:

Primer criterio: ángulo - ángulo (a, a)

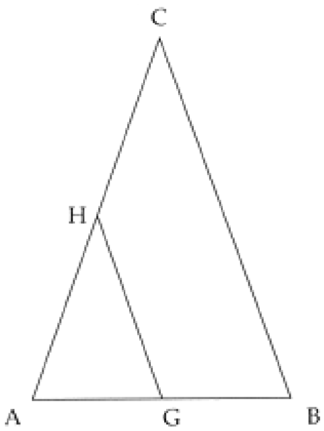
Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales.

Ejemplo:



Si se dice que: $\measuredangle A = \measuredangle D$ y $\measuredangle C = \measuredangle F$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Si se traslada la medida de **DE** al segmento **AB** desde el punto **A**, se encuentra el punto **G**. Desde ese punto se traza una paralela al segmento **BC** para encontrar en **AC** el punto **H**.



Los ángulos **ABC** y **AGH** son congruentes por ser correspondientes entre paralelas, con lo que se tiene que:

$\measuredangle A = \measuredangle D \quad \overline{AG} \cong \overline{DE} \quad y \quad \measuredangle AGH \cong \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF,$

Por lo tanto $\Delta AGH \sim DEF$; entonces $\measuredangle B \cong \measuredangle E$

Como los tres ángulos del Δ**ABC** son congruentes con los ángulos del Δ**DEF**, por definición de semejanza $\Delta \mathbf{ABC} \sim \Delta \mathbf{DEF}$.

Por el teorema de Tales se sabe que una recta paralela a uno de sus lados determina segmentos proporcionales.

Por lo que:

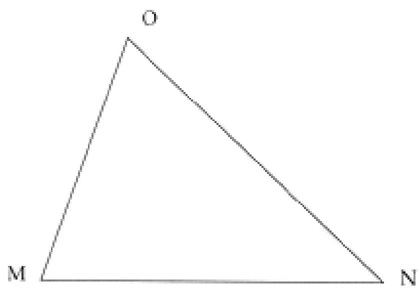
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$$

Por ello se afirma que dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.

Segundo criterio: lado - ángulo- lado (l, a, l)

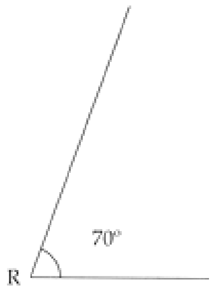
Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales respectivamente y congruente el ángulo que forman.

Ejemplo:



Trácese un triángulo semejante a éste con una constante de proporcionalidad de $\frac{1}{3}$.

Se toma la medida del ángulo **M** y se traza un ángulo igual con vértice en **R**.



Para encontrar la medida del segmento **RS** se establece la proporción

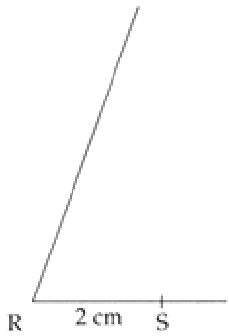
$$\frac{\overline{RS}}{\overline{MN}} = \frac{1}{3}$$

como se conoce la medida de **MN** (6cm), se sustituye ese valor

$$\frac{\overline{RS}}{6} = \frac{1}{3}$$

con ayuda de la ley fundamental de las proporciones. De esa manera se encuentra la medida de

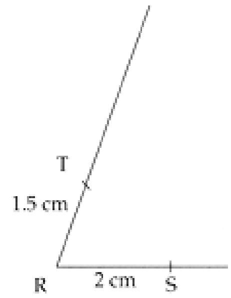
$$\overline{RS}: = \frac{6 \times 1}{3} = 2 \quad \overline{RS} = 2 \text{ cm}$$



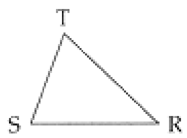
Para encontrar la medida del $\overline{RT}$, se establece otra proporción.

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{MO}} = \frac{1}{3} \qquad \overline{RT} = \frac{4.5 \times 1}{3} = 1.5$$

$$\frac{\overline{RT}}{4.5} = \frac{1}{3} \qquad \overline{RT} = 1.5 \text{ cm}$$



Como el **criterio 2** (l, a, l) señala que, con dos lados proporcionales y siendo congruente el ángulo comprendido, se puede establecer la semejanza entre dos triángulos, entonces:



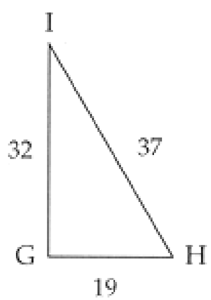
Δ MNO ~ Δ RST

Tercer criterio: lado - lado - lado (l, l, l)

Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son respectivamente proporcionales.

Ejemplo:

Dado el triángulo **GHI**, construir un triángulo **JKL** semejante a él, sabiendo que la razón de semejanza o constante de proporcionalidad es de $\frac{3}{5}$



De acuerdo con el tercer criterio se afirma que:

$$\frac{\overline{JK}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{JL}}{\overline{GI}} = \frac{3}{5}$$

Se sustituyen en cada una de las razones las medidas (en milímetros) de los segmentos:

$$\frac{\overline{JK}}{19} = \frac{3}{5} \qquad \frac{\overline{KL}}{37} = \frac{3}{5} \qquad \frac{\overline{JL}}{32} = \frac{3}{5}$$

$$\overline{JK} = \frac{19 \times 3}{5} \qquad \overline{KL} = \frac{37 \times 3}{5} \qquad \overline{JL} = \frac{32 \times 3}{5}$$

$$\overline{JK} = 11.4 \text{ mm} \qquad \overline{KL} = 22.5 \text{ mm} \qquad \overline{JL} = 19.2 \text{ mm}$$

Con las medidas de $\overline{JK}$, $\overline{KL}$ y $\overline{JL}$ se construye el triángulo **JKL**, el cual, de con el **criterio 3** (l, l, l) de congruencia, es semejante al GHI.