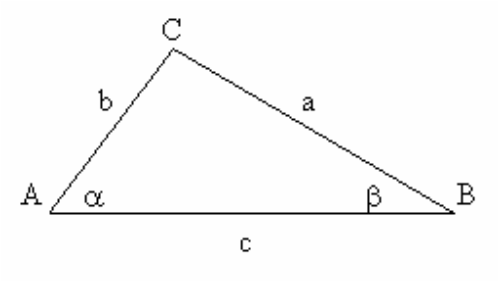
TRIGONOMETRÍA

Es el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Esto se realiza a través de las llamadas **funciones trigonométricas** de los ángulos (o goniométricas).

Consideremos el triángulo ABC, rectángulo en C, de la figura y trabajemos con los ángulos α y β de él.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\,adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente} = \frac{a}{b}$$

$$ctg\alpha = \frac{cateto\,adyacente}{cateto\,opuesto} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\,adyacente} = \frac{c}{b}$$

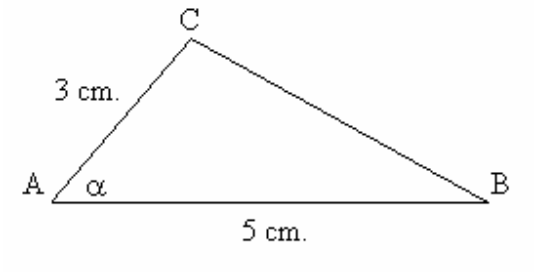
$$\cos ec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\,opuesto} = \frac{c}{a}$$

Del mismo modo se pueden obtener las razones trigonométricas del ángulo β, para llegar a concluir que:

$$sen\alpha = \cos\beta$$
$$\cos\alpha = sen\beta$$
$$tg\alpha = ctg\beta$$
$$ctg\alpha = tg\beta$$
$$\sec\alpha = \cos ec\beta$$
$$\cos ec\alpha = \sec\beta$$

Ejemplo:

En el triángulo de la figura, rectángulo en C, determinar todas las funciones trigonométricas de α



Lo primero es determinar el valor del cateto BC que, a través del teorema de Pitágoras, resulta de 4 cm. Ahora que ya sabemos la medida de cada lado del triángulo, resolvemos aplicando las definiciones dadas:

$$sen\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$tg\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}33...$$

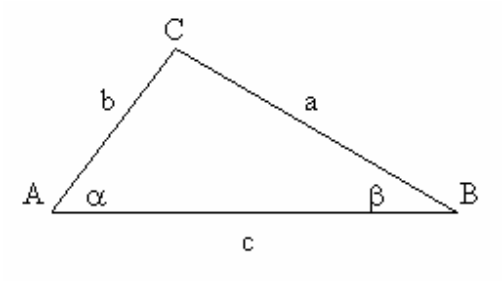
$$ctg\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\sec\alpha = \frac{5}{3} = 1{,}66...$$

$$\cos ec\alpha = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Relaciones trigonométricas fundamentales

Existen relaciones trigonométricas que son fundamentales en el desarrollo de las diversas unidades de este tema. Para eso vamos a trabajar con la figura siguiente, un triángulo rectángulo en C, para que basados en ella demostremos las relaciones que más abajo se indican.



1. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

2. $\cos ec\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

3. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

4. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}$

5. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

6. $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$

7. $\cos ec^2\alpha = 1 + c\operatorname{tg}^2\alpha$

Funciones trigonométricas de ángulos especiales

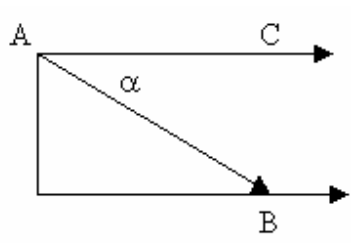
Para algunos ejercicios es importante conocer los valores de algunos ángulos que son muy comunes en su utilización. Entre ellos destacan los de 30º, 45º y 60º.

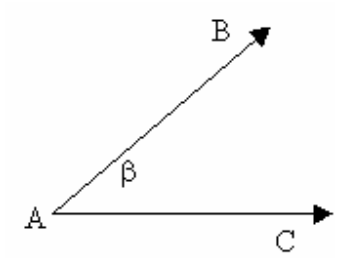
Los valores para 30º y 60º pueden ser determinados a través de un triángulo equilátero, al cuál se le traza una de sus alturas para formar un triángulo rectángulo para luego utilizar las funciones trigonométricas. En el caso de 45º, se utiliza un triángulo rectángulo isósceles.

Los valores que se determinan son:

	30º	**45º**	**60º**
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$

Aplicaciones de la trigonometría:
Ángulos de elevación y de depresión





AB : Línea Visual

α : ángulo de depresión: Se refiere al ángulo formado con la horizontal cuando el objeto es observado desde lo alto.

β : ángulo de elevación: Se refiere al ángulo formado con la horizontal cuando el objeto es observado desde abajo hacia arriba..

En este tipo de ejercicios se sugiere hacer siempre una figura que permita visualizar mejor el problema.

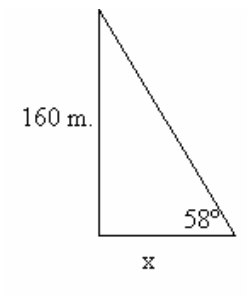
Ejemplos:

1. Desde un punto, situado a cierta distancia de una torre de 160 m. de altura, se mide su ángulo de elevación resultando éste de 58º. ¿A qué distancia está el punto de observación?

$$tg58^{\circ} = \frac{160}{x}$$

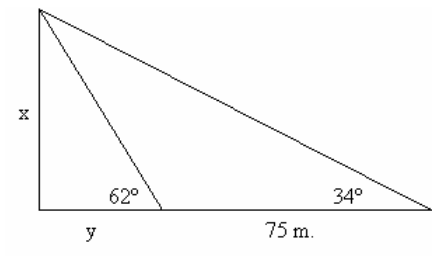
$$1{,}6 = \frac{160}{x}$$

$$x = 100$$



Respuesta: El punto de observación está a 100 m. de la torre.

2. Calcula la altura de un edificio que se observa desde un punto en que el ángulo de elevación es 62º y, alejándose 75 m. de ese punto, el ángulo es ahora 34º.



De esta figura podemos obtener dos ecuaciones:

$$tg62^{\circ} = \frac{x}{y} \qquad tg34^{\circ} = \frac{x}{y+75}$$

$$1{,}88 = \frac{x}{y} \qquad 0{,}67 = \frac{x}{y+75}$$

Al despejar x en ambas ecuaciones, por igualación se obtiene que 1,88y=0,67y+50,25; donde y=41,5 metros.
Reemplazando este valor de y, resulta que x=78 metros.

Respuesta: La altura del edificio es de 78 metros.