Universidad de Concepción

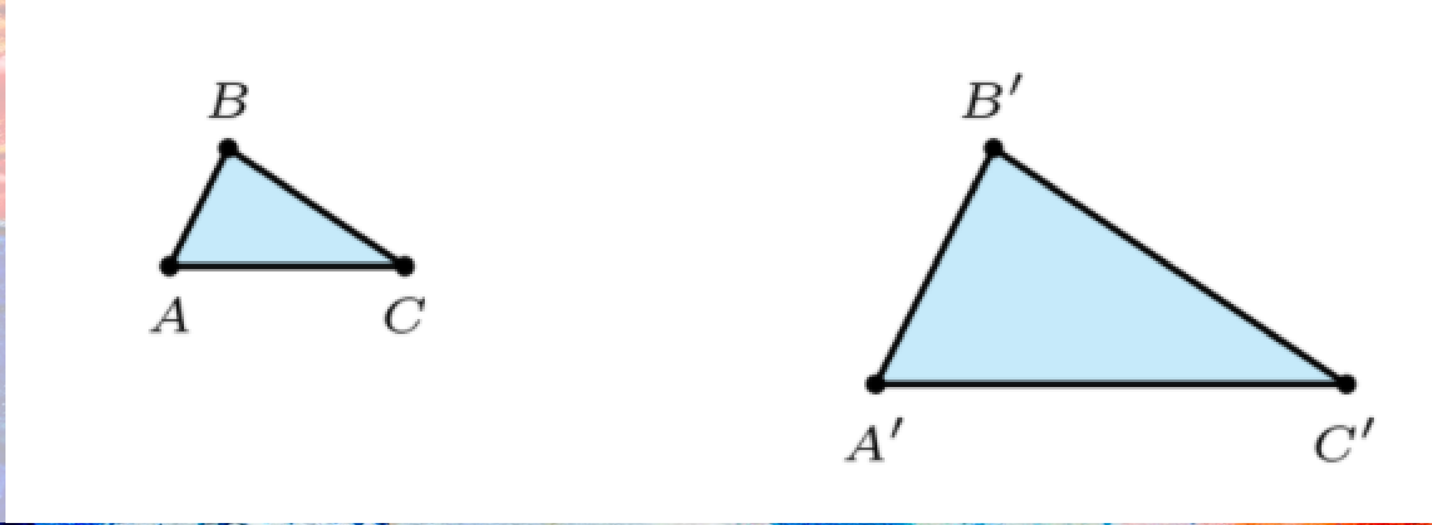
Facultad de EDUCACIÓN UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

TEMA 1

semejanza

SCARLETE PALMA RIFO - PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

<u>DEFINICIÓN 2.</u> Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ del plano son **semejantes** si uno de los dos es congruente con una homotecia del otro. En este caso escribimos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



SEMEJANZA

TEOREMA 3. Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. Las siguientes son equivalentes:

(1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$;

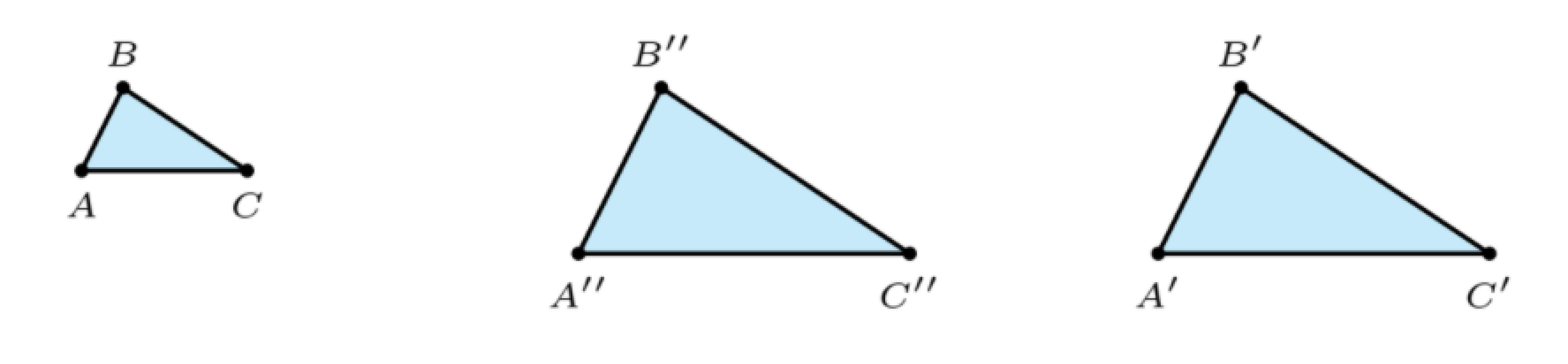
(2) $\dfrac{|A'B'|}{|AB|} = \dfrac{|A'C'|}{|AC|} = \dfrac{|B'C'|}{|BC|}$;

(3) $m(\measuredangle A') = m(\measuredangle A)$, $m(\measuredangle B') = m(\measuredangle B)$, $m(\measuredangle C') = m(\measuredangle C)$.

DEMOSTRACIÓN:

- Probamos (1)⇒(2).

Si los triángulos son semejantes, existe una homotecia H_λ tal que $\Delta A''B''C'' := H_\lambda(\Delta ABC)$ es congruente con $\Delta A'B'C'$



Entonces:

$$|A'B'| = |A''B''| = \lambda|AB|$$

Donde la primera igualdad es por la congruencia de triángulos y al segunda por el teorema. De manera similar se prueba que $|A'C'| = \lambda|AC|$ y $|B'C'| = \lambda|BC|$.

- Probamos (2)⟹(3).

Sea $\lambda := |A'B'|/|AB|$, Aplicamos una homotecia H_λ y definimos $\Delta A''B''C'' := H_\lambda(\Delta ABC)$.Luego, por teorema 2 y criterio de congruencia LLL se cumple :

$$\Delta A''B''C'' \simeq \Delta A'B'C'$$

Así que los triángulos correspondientes tienen la misma medida. Por el teorema una homotecia preserva la medida de los ángulos, así que $\Delta A''B''C''$ y ΔABC tienen ángulos correspondientes de la misma medida. Lo que prueba lo pedido.

- Probamos (3)⟹(1).

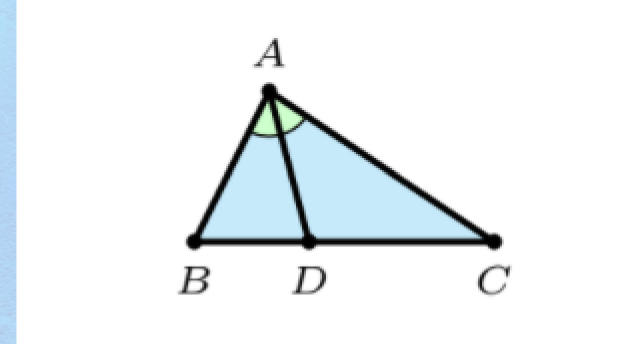
Sea $\lambda \coloneqq |A'B'|/|AB|$. Si aplicamos una homotecia H_λ y definimos $\Delta A''B''C'' = H_\lambda(\Delta ABC)$, luego los triángulos $\Delta A''B''C''$ y ΔABC tienen ángulos correspondientes de misma medida por teorema 2. Por hipótesis $\Delta A'B'C'$ y ΔABC tienen ángulos correspondientes de misma medida, además:

$$|A''B''| = \lambda|AB| = |A'B'|$$

Luego $\Delta A''B''C'' \simeq \Delta A'B'C'$ por ALA, así que ΔABC es semejante al triángulo $\Delta A'B'C'$.

■

COROLARIO 2. Sea ΔABC un triángulo y sea $D \in \overline{BC}$ tal que $\overline{AD}$ es bisectriz de $\measuredangle A$

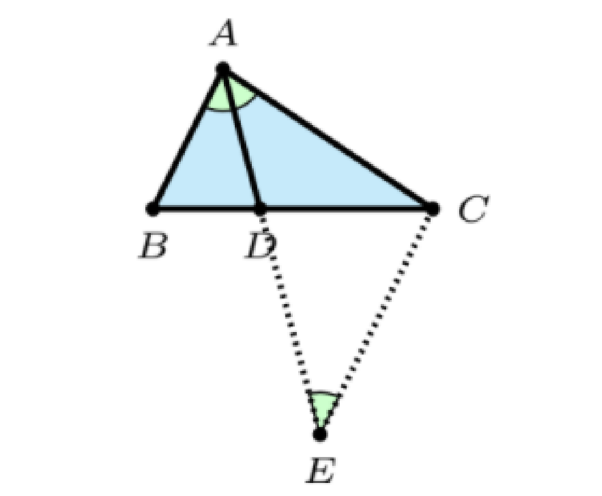


Luego se cumple la siguiente:

$$\frac{|AB|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|DC|}$$

DEMOSTRACIÓN:

Construimos el punto E de intersección de la recta L_{AD} con la paralela por C al segmento $\overline{AB}$.



Los triángulos ΔDEC y ΔDAB son semejantes por tener ángulos correspondientes de igual medida: dos opuestos y dos pares alternos. Por lo tanto

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|DC|}$$

Como ΔAEC tiene dos ángulos de la misma medida, entonces es isósceles, así que $|AC| = |CE|$, lo que prueba lo pedido. $\blacksquare$