Universidad de Concepción

Facultad de EDUCACIÓN UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

TEMA 3

razones trigonométricas

SCARLETE PALMA RIFO - PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

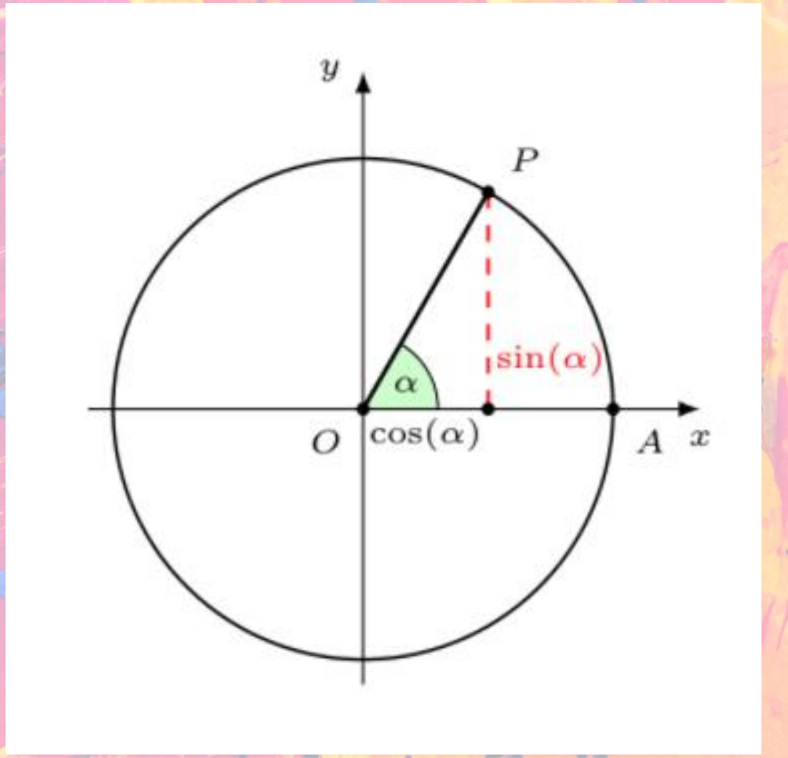
Dado un ángulo α en el centro de una circunferencia de radio $|OP| = 1$, tenemos:

$$P = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Así que cos(α) y sin(α) son las coordenadas del punto P. Ahora, siguiendo esta definición tenemos que:

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

para cada valor del ángulo α.

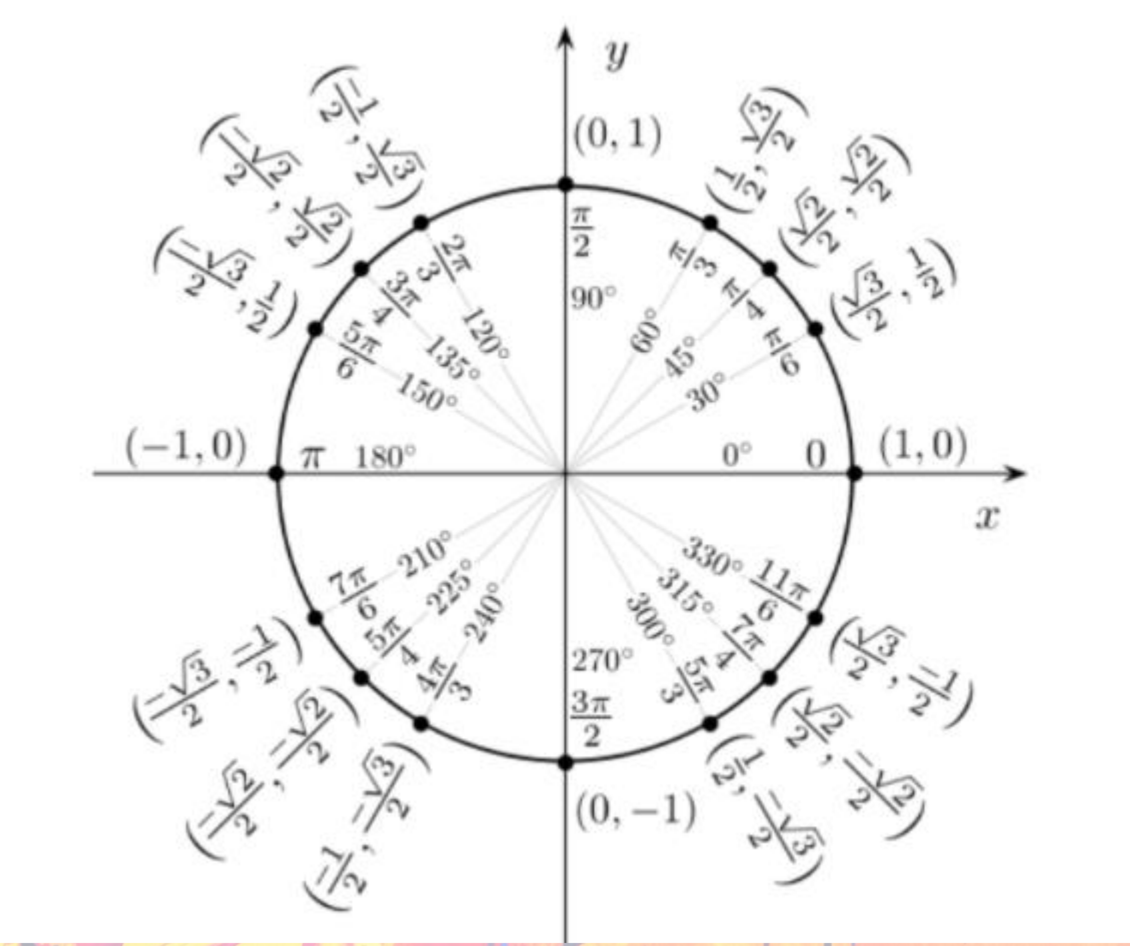


¿Cómo podemos ver que es verdad lo que mostré anteriormente? Haz la prueba siguiendo la idea del Teorema de Pitágoras.

Pista: los catetos corresponden al seno y coseno del ángulo, si es así, ¿quién será la hipotenusa?

Universidad de Concepción

Ocupando la definición otorgada por tu fabulosa demostración anterior, podemos calcular algunos valores se seno y coseno para ángulos conocidos, es decir:

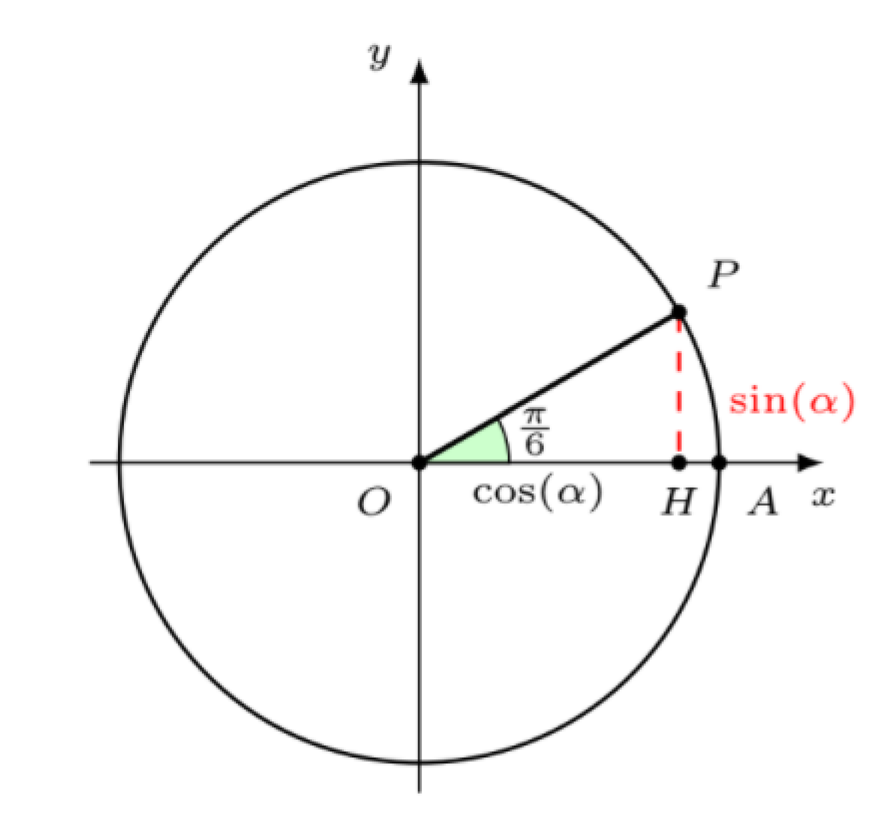


¡Recuerda que aquí trabajamos en radianes! Donde el ángulo π corresponde a $180°$ y por lo tanto 2π corresponde a $360°$. ¿A cuánto corresponde $90°$ entonces o $30°$?

$\frac{\pi}{6}$ corresponde al ángulo de $30°$. En este caso, si utilizamos el triángulo ΔAHP, deberíamos poder notar que es la mitad de un triángulo equilátero, por lo tanto, $|HP| = \frac{1}{2}|OP| = \frac{1}{2}$. Luego, por el Teo de Pitágoras tenemos:

$$|OH| = \sqrt{|OP|^2 - |HP|^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



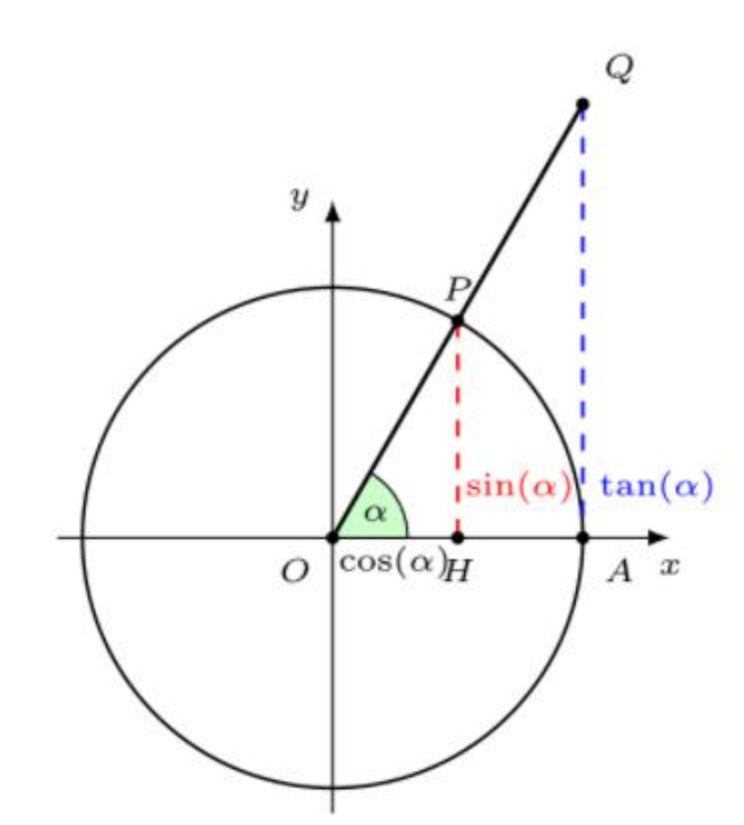
Por lo tanto $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

¿Qué ocurrirá para $\frac{\pi}{4}$ entonces?

¡Vamos! Intenta hacerlo tu también.

Ahora vamos con otra definición: La tangente de un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ es como sigue:

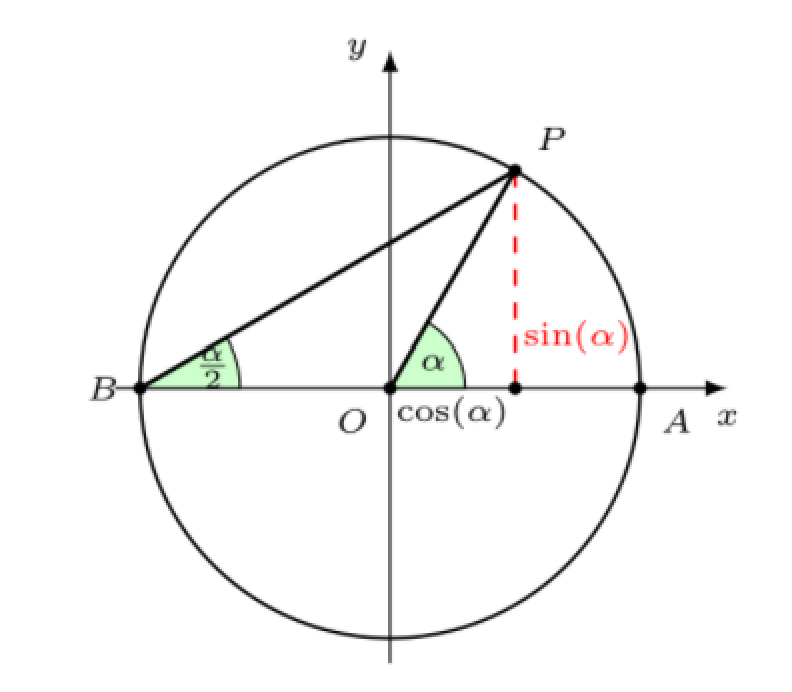
$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



Sea $\boldsymbol{Q}$ el punto de la semirrecta $\boldsymbol{R_{OP}}$ tal que $\boldsymbol{AQ}$ es tangente a la circunferencia en A. Luego el ángulo $\measuredangle OAQ$ es recto, así que $\Delta OHP \sim \Delta OAQ$. Entonces $|AQ|/|OA| = |HP|/|OH|$, de lo que deducimos entonces que:

$$\tan(\alpha) = \frac{|AQ|}{|OA|} = \frac{|AQ|}{1} = |AQ|$$

Si ponemos $\mathbf{t} := tan(\frac{\alpha}{2})$ entonces $\boldsymbol{t}$ es la pendiente de la recta L_{BP}.
Intersecando con la circunferencia obtenemos el sistema



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - t(x+1) = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ y $(-1,0)$.
La primera nos da las fórmulas.

$$\cos(\alpha) = \frac{1-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

Las fórmulas anteriores las podemos ocupar para calcular el seno de $\frac{\pi}{12}$. Si ponemos $t = \tan(\frac{\pi}{12})$ luego:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Entonces t es raíz de la ecuación $t^2 - 4t + 1 = 0$, o sea $t = 2 - \sqrt{3}$. De la ecuación $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = (2 - \sqrt{3})\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ deducimos que

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 (1 - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)^2).$$

Y por lo tanto

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$