Universidad de Concepción

Facultad de EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

# TEMA 4

# teorema de Ptolomeo

SCARLETE PALMA RIFO - PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

**LEMA .** Sean $\Delta ABC$ y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos tales que

$$m(\measuredangle A) = m(\measuredangle(A')) \text{ y } \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Entonces los dos triángulos son semejantes.

# DEMOSTRACIÓN:

Sea $\lambda := \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Si aplicamos una dilación $D_\lambda$ al triángulo $\Delta ABC$ obtenemos un triángulo $\Delta A''B''C''$ tal que

$$|A''B''| = \lambda|AB|$$
$$|A''C''| = \lambda|AC|$$
$$|B''C''| = \lambda|BC|$$

Por un teorema anterior (adivina cuál), los dos triángulos tienen ángulos correspondientes de misma medida. En particular $m(\measuredangle A) = m(\measuredangle B'')$. Luego, los triángulos $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A''B''C''$ son congruentes por criterio $LAL$. Entonces $\Delta A'B'C$ es semejante con $\Delta ABC$.

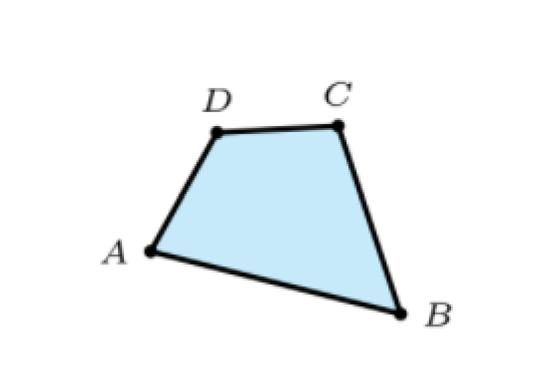
**DEFINICIÓN .** Un polígono es *cíclico* si sus vértices pertenecen a una misma circunferencia.

**TEOREMA 9.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Las siguientes son equivalentes:

1. $ABCD$ es cíclico;

2. los ángulos opuestos de ABCD son suplementarios.

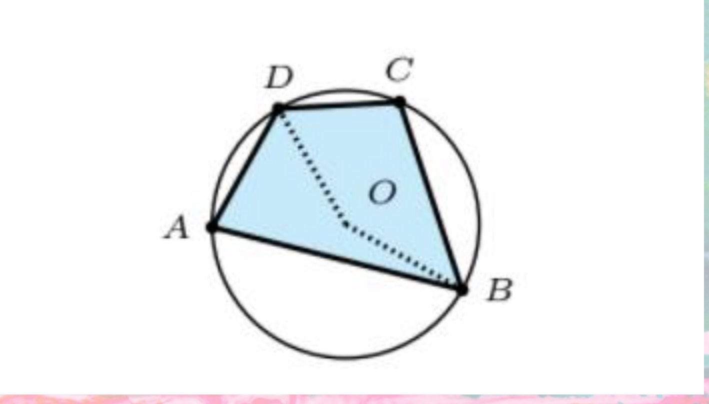
$$m(\measuredangle A) + m(\measuredangle C) = 180^\circ = m(\measuredangle B) + m(\measuredangle D)$$



# DEMOSTRACIÓN:

Probamos $1 \Rightarrow 2$

Si $ABCD$ se inscribe en una circunferencia de centro $O$, dibujamos los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$.

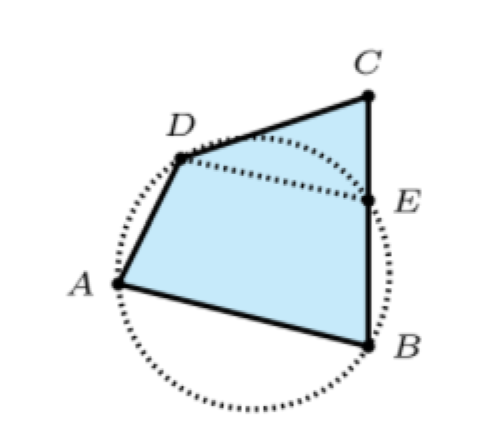



Por ángulos a la circunferencia se cumplen $m(\measuredangle A) = \frac{1}{2}m(\measuredangle BOD)$ y $m(\measuredangle C) = \frac{1}{2}m(\measuredangle DOB)$. En particular $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle C) = 180°$. La otra igualdad se prueba de manera similar.

# DEMOSTRACIÓN:

Probamos $1 \Leftarrow 2$

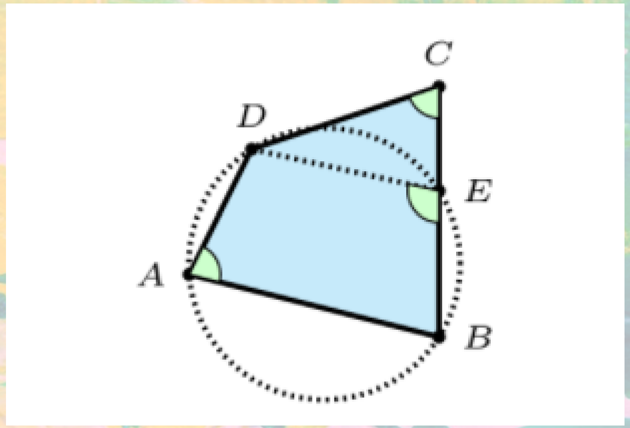
Es suficiente probar que si $ABCD$ no es cíclico, luego $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle C) \neq 180°$.




Trazamos la circunferencia C por los puntos $A, B, D$. Como el polígono no es cíclico, entonces el punto $C$ no pertenece a C. Supongamos que $C$ sea externo a C como en la figura. Sea $E \neq B$ el punto de intersección de $C$ con $\overline{BC}$.

# DEMOSTRACIÓN:

Como $ABED$ es cíclico, entonces (los ángulos nombrados son los marcados en verde) $m(\measuredangle A) + m(\measuredangle E) = 180°$.

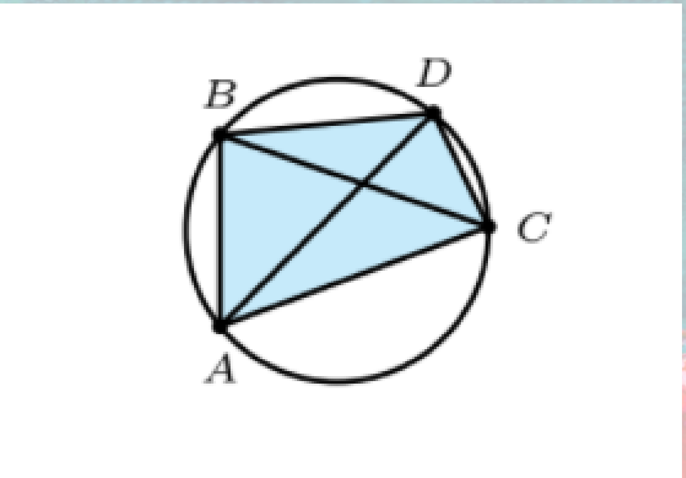



Por otro lado, $m(\measuredangle E) > m(\measuredangle C)$, siendo el primero un ángulo externo al triángulo $\Delta DEC$. Luego

$$m(\measuredangle A) + m(\measuredangle C) < 180°$$

De manera similar, si $C$ es interno a la circunferencia se prueba que se cumple la desigualdad opuesta.

**TEOREMA 10.** TEOREMA DE PTOLOMEO. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Luego las siguientes son equivalentes:




1. $ABCD$ es cíclico;

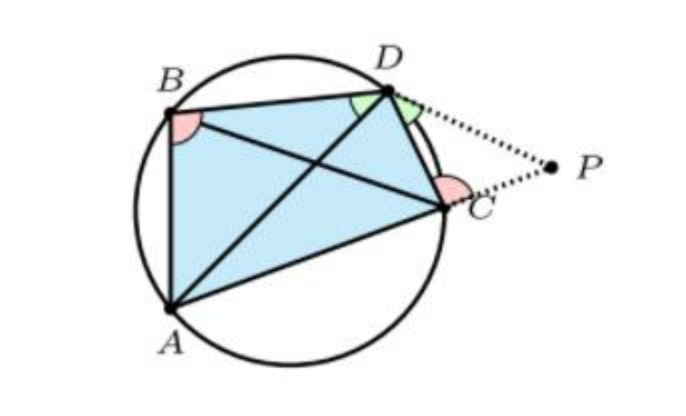
2. La siguiente es cierta

$$|BC||AD| = |AC||BD| + |BA||DC|$$

# DEMOSTRACIÓN:

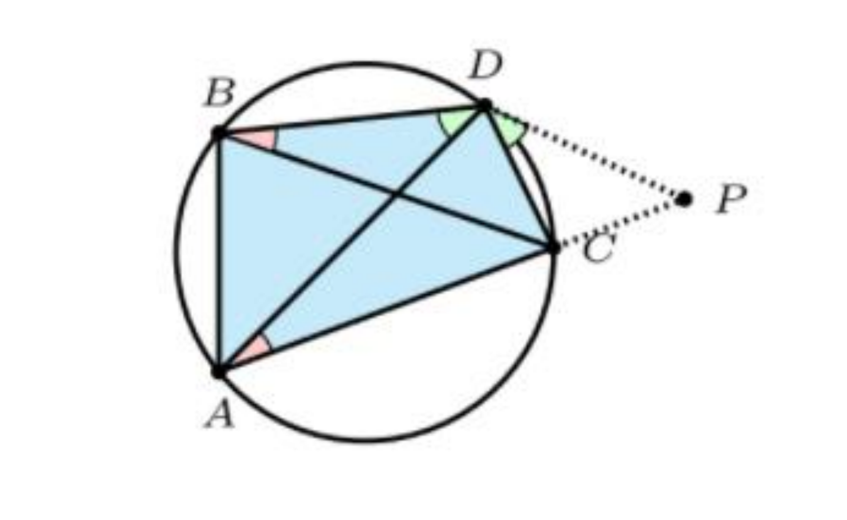
Probamos $1 \Rightarrow 2$.

Sea $P$ un punto de la recta $L_{AC}$ tal que $m(\measuredangle BDA) = m(\measuredangle CDP)$.




Como $ABCD$ es cíclico, luego $m(\measuredangle ABD) + m(\measuredangle DCA) = 180°$ por el teorema 10. Entonces $m(\measuredangle DBA) = m(\measuredangle PCD)$ por ser suplementarios de un mismo ángulo. Luego $\Delta DCP \sim \Delta DBA$, así que

$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|CP|} \qquad (1)$$




Por construcción $m(\measuredangle BDC) = m(\measuredangle ADP)$ , además $m(\measuredangle CBD) = m(\measuredangle CAD)$ por ser ángulos a la circunferencia sobre un mismo arco. Luego $\Delta BDC \sim \Delta ADP$ y por lo tanto la siguiente es cierta

$$\frac{|BC|}{|AP|} = \frac{|BD|}{|AD|}$$

(2)

De las ecuaciones anteriores deducimos las siguientes

$$|BC|\,\frac{|AD|}{|BD|} = |AP| \qquad \text{por (2)}$$

$$= |AC| + |CP|$$

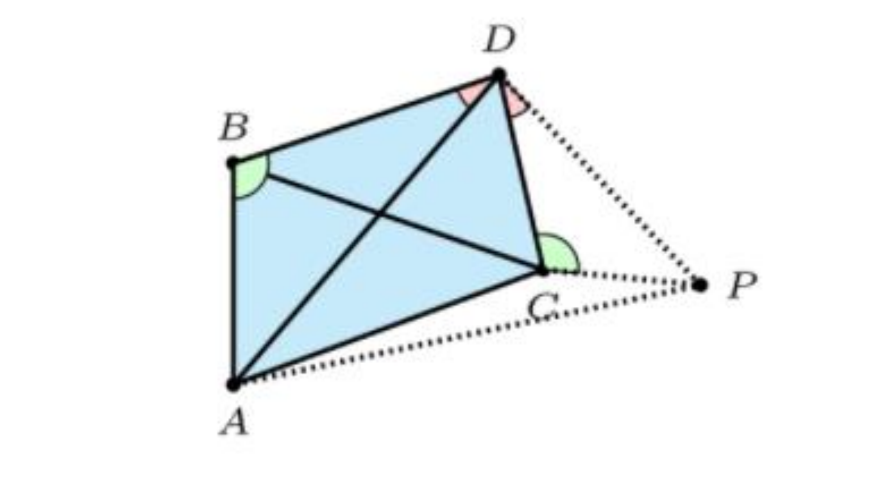
$$= |AC| + |BA|\frac{|DC|}{|BD|} \qquad \text{por (1)}$$

Multiplicando por $|BD|$ obtenemos

$$|BC||AD| = |AC||BD| + |BA||DC|$$

Probamos $2 \Rightarrow 1$

Supongamos que $ABCD$ no sea cíclico y construimos $P$ de manera tal que $\Delta ABD \sim \Delta PCD$.

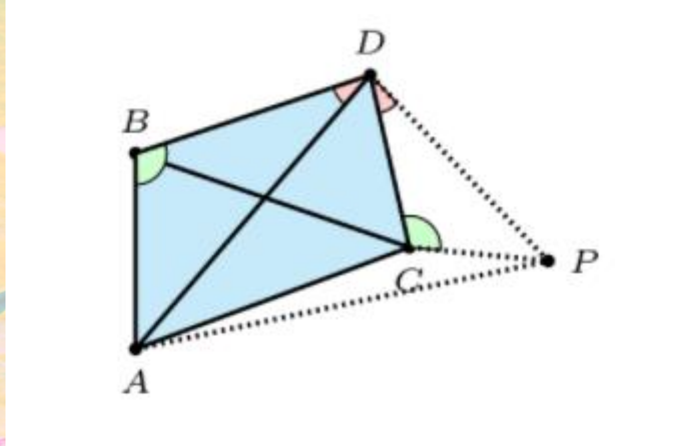



Como $ABCD$ no es cíclico, luego $m(\measuredangle ABD) + m(\measuredangle DCA) \neq 180°$, por el teorema 10. Entonces $m(\measuredangle PCD) + m(\measuredangle DCA) \neq 180°$, así que los puntos $A, C, P$ no son colineales. Por lo tanto

$$|AP| < |AC| + |CP|$$

YA VAMOS TERMINANDO, CALMA CALMA…

Observamos que $m(\measuredangle BDC) = m(\measuredangle ADP)$ y además $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|PD|}$, por $\Delta ABD \sim \Delta PCD$. Luego, $\Delta DBC \sim \Delta DAP$ por un lema anterior (búscalo).




De la semejanzas anteriores, deducimos las siguientes

$$|AP| = \frac{|DA||BC|}{|BD|} \qquad |CP| = \frac{|AB||CD|}{|BD|}$$

Sustituyendo en $|AP| < |AC| + |CP|$ obtenemos

$$|DA||BC| < |AC||BD| + |AB||CD|$$

■