CONJUNTOS

En el lenguaje cotidiano, decimos : un curso de Algebra, un montón de libros de matemática, un cajón de ropa, la ciudad de Chillán , etc., es decir, usamos muchas palabras para expresar una misma idea. Los matemáticos prefieren la palabra **Conjunto** para expresar lo mismo.

Por lo tanto, podemos definir Conjunto como sigue:

Un **conjunto** es una colección de objetos que está bien definido y para denotarlo se emplean letras mayúsculas tales como: A, B, C, etc.

Algunos ejemplos de conjuntos son :

A = {Jugadores de la Selección chilena año 1999}
B = $\{a, e, i, o, u\}$
C = {números naturales mayores que 2 y menores que 6 }

¿...Pero , sabes cómo se llaman los objetos de un conjunto ?

Cada objeto de un conjunto se llama **elemento del conjunto.**

Y si el elemento está en el conjunto se dice que pertenece a él, en caso contrario se dice no pertenece**,** esto se simboliza $\in$ o $\notin$ respectivamente

Observe que los elementos de un conjunto se escriben entre llaves {}

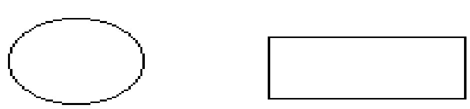
En la siguiente tabla se muestra un paralelismo entre este lenguaje simbólico y cotidiano.

Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Simbólico
Marcelo Salas integra la Selección Chilena del año 2001	Marcelo Salas $\in$ A
El Chino Ríos (que es tenista), no integra la Selección Chilena	Chino Ríos $\notin$ A

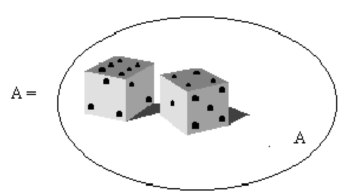
En matemática, los elementos de un conjunto, se designan por x , y , z , a , b , ..., etc, es decir con cualquier letra minúscula.

¿Te has dado cuenta que en ocasiones es más fácil interpretar las cosas cuando se presentan en forma gráfica ? ... en los conjuntos pasa algo similar, de ahí que es útil el uso de Diagramas de Venn.

Los Diagrama de Venn-Euler nos permiten visualizar en forma sencilla e instructiva los conjuntos y sus relaciones, y en estos diagramas se usan las siguientes formas:



Por ejemplo:



Algunos tipos de Conjuntos son:

Conjunto Vacío: este conjunto es aquel que no tiene elementos. Se simboliza por $\emptyset$ o $\{ \}$
Ejemplo 1 : Conjunto de canciones rancheras interpretadas por el grupo Kiss
Ejemplo 2 : {números que pertenezcan al conjunto de los números naturales y que sean negativos }

Conjunto Universo: Es el conjunto que contiene todos los elementos a los cuales pudiéramos hacer referencia en un momento dado, estos pueden ser infinitos o finitos.

Ejemplo 1: El conjunto de jugadores de un equipo de fútbol es finito
Ejemplo 2: El conjunto de los números Enteros es infinito

Conjuntos Disjuntos: Son aquellos conjuntos que no tienen ningún elemento en común

Ejemplo 1 : El conjunto de alumnos aprobados en Algebra es un conjunto disjunto con el de los alumnos reprobados
Ejemplo 2 : Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Los conjuntos A y B no tienen ningún elemento en común,
por ello son conjuntos disjuntos.

Ejercicios

1) De los conjuntos dados, indique cuál de ellos es o son vacíos:

a) A = $\{x \in \mathbb{N} / \ 0 < x < 1\}$
b) B = $\{x \in \mathbb{Z} / \ 0 < x < 1\}$
c) C = $\{x \in \mathbb{R} / \ 0 < x < 1\}$

2) Determine en qué caso, el par de conjuntos dados es disjunto:

a) A $= \{1, 2, 3\}$ B $= \{5, 9, 0\}$
b) A $= \{1, 2, 3\}$ B $= \{1, 2, 5\}$
c) A = { Tenistas Top Ten Ranking ATP tour } B = { Tenistas chilenos }

Respuesta

1) Son conjuntos vacíos A y B
2) Son disjuntos los conjuntos dados en (a) y en (c)

Para escribir un conjunto existen ciertas reglas universalmente aceptadas.

Formas de escribir un conjunto:

Usualmente un conjunto se escribe de dos maneras:

1) Por Comprensión: En esta forma se escribe una característica de los elementos

Por ejemplo: $A = \{x / x \text{ es un árbol autóctono de Chile}\}$

2) **Por Extensión**: Escritura en la cual los elementos se identifican.

Por ejemplo: $A = \{$ Raulí, Avellano, Coihue, Roble, ...$\}$

Ejercicios

I) Sea G el conjunto de numeros naturales menores que 5:

a) Escriba el conjunto por Comprensión
b) Escriba el conjunto por Extensión

Respuestas

a) G $= \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$
b) G $= \{1, 2, 3, 4\}$

¿ Existen otros conceptos importantes de conocer en los conjuntos ?

Si, en los conjuntos podemos definir otros conceptos, los cuales nos servirán para resolver más problemas. Estos son los de **Igualdad** y **Subconjuntos**, que se definen a continuación.

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, se verifica:

• **Igualdad**: Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, no importa el orden de éstos. La igualdad de los dos conjuntos se representa por A $=$ B

Ejemplo 1:
Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 1, 3\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 3\}$
Determine si los conjuntos son iguales o no.

Respuesta

Los conjuntos A y B muestran claramente que ambos tienen los mismos elementos aunque en distinto orden. El conjunto C, está escrito por comprensión y señala que los elementos de este conjunto son números naturales menores o iguales a 3, es decir, quienes cumplen esta condición son los números 1, 2 y 3. Por lo tanto se verifica:

$$A = B = C$$

Ejemplo 2:

Sean los conjuntos A $= \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 0\}$ y B $= \{-1, 0\}$

Respuesta

Estos conjuntos son iguales, porque A tiene elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ y estos son $\{-1, 0\}$

Por lo tanto, A $=$ B

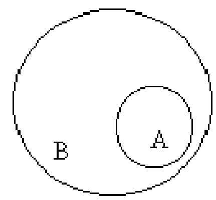
Otro concepto importante es el de:

- **Subconjunto**: Decimos que A es subconjunto de B si cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B, es decir, A está contenido en B.

Simbólicamente se tiene:

$A \subseteq B$ significa " A es un subconjunto de B "

Gráficamente, esto se muestra en la figura:



$A \subseteq B$

Si un conjunto **no es subconjunto** de otro se denota por:

$$\nsubseteq$$

Ejemplo 1: La sección 1 de Construcción Civil es un subconjunto de toda la carrera de Construcción Civil.

Ejemplo 2: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1\}$, el conjunto B tiene un sólo elemento y éste está en el conjunto A, por lo tanto, $B \subseteq A$

Ahora bien, los subconjuntos cumplen ciertas propiedades que conviene saber, ya que nos facilitan la comprensión de los conjuntos y sus problemas. Dichas propiedades se cumplen para cualquier conjunto A.

Propiedades de los subconjuntos:

1) El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto: $\emptyset \subseteq A$

2) Todos los conjuntos son subconjuntos de sí mismo: $A \subseteq A$

3) Todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto Universo U: $A \subseteq U$

Todas estas propiedades son útiles para un conjunto denominado "conjunto de las partes" o "conjunto potencia".

Curioso nombre, pero se llama Conjunto de las Partes porque está formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado. El número de elementos (o cardinalidad) de él, está dado por la solución de la expresión: 2^n, donde " n " indica la cardinalidad del conjunto original. Su notación es $P(A)$.

Ejemplo:

Sea $M = \{a, b, c\}$. Determinar su Conjunto Potencia.

Respuesta:

El conjunto M tiene 3 elementos, es decir $n = 3$, por lo tanto el conjunto potencia tiene

$2^3 = 8$ elementos y estos son:

$P(M) = \Big\{\emptyset,\ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\},\ \{a,c\},\ \{a,b,c\}\Big\}$

Observe que los elementos de $P(M)$ se escriben entre llaves { } y algunos de lo onjuntos fueron determinados por las propiedades de los subconjuntos dadas anteriormente.

Ejercicios

I) Sean $A = \{-3, 0, 5\}$, $B = \{0, 5, -3\}$, $C = \{0,5\}$. Determinar s uientes proposiciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). En el caso de que sean falsas indique la razón:

a) C $\subseteq$ A .... b) A = B ....

c) C $\in$ A .... d) C $\subseteq$ B ....

e) A $\neq$ C .... f) $\emptyset = \{\emptyset\}$ ....

g) A $\subseteq$ B .... h) $\emptyset \subseteq$ B ....

II) Sea A = $\{a, b\}$. Encontrar $P(A)$ y luego determine si las siguientes proposiciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). En el caso de que sean falsas indique la razón:

a) $a \subseteq P(A)$ .... b) $\{a\} \in P(A)$ ....

c) $\{a\} \subseteq P(A)$ .... d) $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$ ....

e) $\{a,b\} \subseteq P(A)$ .... d) $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$ ....

e) $\{a,b\} \subseteq P(A)$ ....

Respuesta

I) a) V b) V

c) F, C no es un elemento de A. d) V

e) V

f) F, la expresión $\{\emptyset\}$, representa un conjunto que tiene un elemento y este es $\emptyset$

g) V h) V

II)

El Conjunto Potencia tiene $2^2 = 4$ elementos y es $P(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{ \qquad \Big\}$

a) F, porque " a " es un elemento y la notación $\subseteq$ representa subconjunto

b) V c) F, porque $\{a\}$ representa un elemento de

d) V e) F, porque $\{a, b\}$ es un elemento de

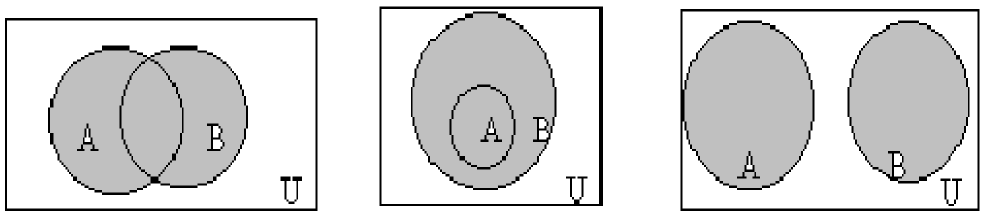
OPERACIONES CON CONJUNTOS

Los conjuntos nos permiten resolver problemas cotidianos a través de las operaciones que se pueden definir con ellos. Tomemos dos conjuntos cualesquieras, a los cuales llamaremos A y B

La Unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos de A ó B o ambos.
La unión de A y B se representa simbólicamente por A $\cup$ B, específicamente se tiene:

$$A \cup B = \{\, x \,/\, x \in A \vee x \in B \,\}$$

A continuación, se presentan tres formas gráficas distintas de cómo se pueden relacionar los conjuntos, lo achurado representa la unión de ellos.



A $\cup$ B A$\subset$B · A $\cup$ B = B A $\cup$ B

Ejemplo 1:

Sean $A = \{\, a, b \,\}$, $B = \{\, a, c, d \,\}$ Determine A $\cup$ B

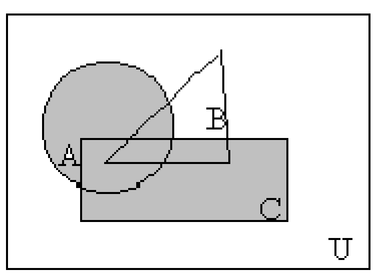
Respuesta

El conjunto A $\cup$ B $= \{\, a, b, c, d \,\}$ es el conjunto que tiene los elementos de A ó B.

Nótese que cada elemento se escribe una sola vez aunque se haya repetido más de una, como es el caso de la letra "a" que aparece dos veces.

Ejemplo 2:

Un ejemplo gráfico se presenta a continuación con los conjuntos A, B y C. Se achuró la unión del conjunto A y C.

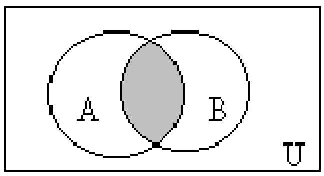


A $\cup$ C

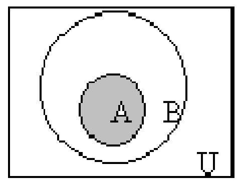
<u>La Intersección</u> de los conjuntos A y B se define como el conjunto formado sólo por los elementos que tienen en común A y B. La intersección se representa por $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
Simbólicamente, se escribe:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\, x \,/\, x \in \mathrm{A} \wedge x \in \mathrm{B} \,\}$$

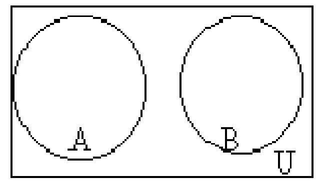
Gráficamente, lo achurado representa en cada caso la intersección de A y B.



A∩B



A⊂B , A∩B =A



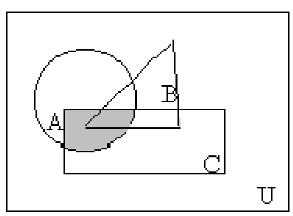
A∩B = ∅

<u>Ejemplo 1:</u>

Sean $A = \{\, a, b \,\}$, $B = \{\, a, c, d \,\}$. El conjunto $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{a\}$ es el conjunto formado por el elemento que se repite, que en este caso es la letra "a".

<u>Ejemplo 2:</u>

En la figura lo achurado representa $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$

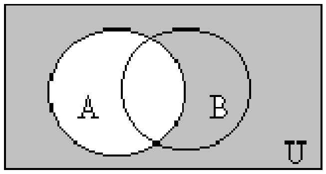


Se define **<u>Complemento de un conjunto</u>** de la siguiente forma: sea A un conjunto cualquiera, el complemento de A son todos aquellos elementos que están en el Universo, pero que no están en A.
Simbólicamente, se representa por A^c o A'; $\mathrm{A}^c = \{\, x \in U \,/\, x \notin A \,\}$

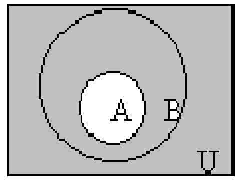
<u>Consecuencias de esta definición</u>

$\emptyset^{\,c} = U$ $U^c = \emptyset$ $A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$

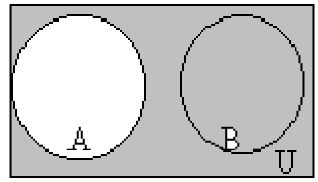
Gráficamente, A^c se representa en lo achurado



A^C



A^C



A^C

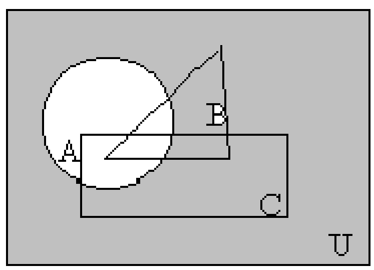
<u>Ejemplo 1:</u>

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x \in U \,/\, x \text{ es un número par}\}$
Determine A^c

<u>Respuesta</u>:

El conjunto A está formado por los números pares que están en el conjunto Universo U dado: $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
Luego, $A^c = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, es decir, son todos aquellos elementos que están en el Universo y que no están en A.

<u>Ejemplo 2:</u>
En la figura lo sombreado representa A^c



<u>La Diferencia</u> entre dos conjuntos A y B, la cual se denota por $\boldsymbol{A - B}$, es el conjunto formado por todos lo elementos que están en A y no están en B. El orden es importante, pués:
<u>La Diferencia</u> entre B y A, la cual se denota por $\boldsymbol{B - A}$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en B y no están en A.
Nota:

$$\boxed{A - B \neq B - A}$$

Por ejemplo:

Dados los conjuntos: $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ y $B = \{2,\ 4,\ 6\}$

La diferencia $A - B = \{1,\ 3\}$

La diferencia $B - A = \{4\ ,\ 6\}$

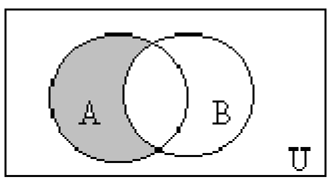
Por lo tanto, $A - B \neq B - A$

$$\{1,\,3\} \neq \{4\,,\,6\}$$

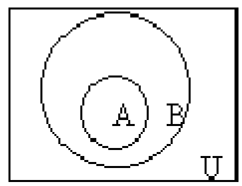
Simbólicamente:

$$A - B \,=\, \{x \in A \,\wedge\, x \notin B\}$$

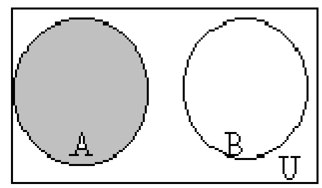
Gráficamente, se representa en lo achurado:



A - B



A - B = Ø



A - B = A

Ejemplo 1:

Sean $A = \{\,a, b\,\}$, $B = \{\,a, c, d\,\}$. Determine $A \,-\, B$ y $B \,-\, A$

Respuesta

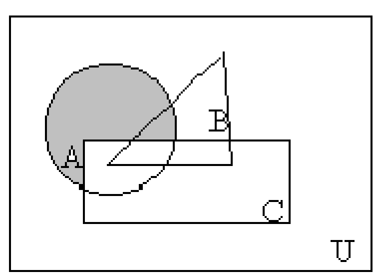
Para determinar la diferencia entre A y B, al conjunto A se le quitan los elementos que tenga de B, lo cual da como resultado la letra " b ", es decir, $A \,-\, B = \{b\}$

De igual forma se determina el conjunto $B - A = \{\,c,\, d\,\}$

Esto muestra claramente que: $A - B \neq B - A$

Ejemplo 2:

En la figura, lo achurado representa A – C



Como consecuencia de estas definiciones, tenemos las siguientes propiedades con respecto al conjunto Universo y al conjunto Vacío:

$i)$ $U \cap \phi = \phi$

$ii)$ $U \cup \phi = U$

$iii)$ $U - \phi = U$

$iv)$ $\phi - U = \phi$

Ejercicios

1. – Sea el conjunto $\mathrm{U} = \{ x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 7 \}$ y sean los conjuntos:

$\mathrm{A} = \{ x \in \mathrm{U} : 3 < x < 7 \}$ $\mathrm{B} = \{ x \in \mathrm{U}$: es divisible por $2 \}$

$\mathrm{C} = \{ x \in \mathrm{U} : x$ mayor que $4 \}$ $\mathrm{D} = \{ 0 \}$

Determinar:

a) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ b) $\mathrm{C} \cup \mathrm{A}$ c) $(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) - \mathrm{B}$

d) $(\mathrm{D} - \mathrm{C}^c)^c$ e) $(\mathrm{A} - \mathrm{B})^c - \mathrm{C}$ f) $[(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{D}) - (\mathrm{C} - \mathrm{B}^c)]$

2. – Sea $\mathrm{U} = \{ x \in \mathbb{Z} / -1 < x \leq 7 \}$

$\mathrm{A} = \{ x \in \mathrm{U} / x > 2 \}$
$\mathrm{B} = \{ x \in \mathrm{U} / 4 \leq x < 7 \}$
$\mathrm{C} = \{ x \in \mathrm{U} / x \geq 3 \}$

Determine:

a) $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c - \mathrm{C}$ b) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c - (\mathrm{C} - \mathrm{A})$ c) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{C})^c - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

d) $[\mathrm{A} - (\mathrm{B} - \mathrm{C})]^c$ e) $(\mathrm{C} \cup \mathrm{A}) - \mathrm{B}^c$

3. – Con $\mathrm{A} = \{ a, b, \{c\} \}$. Encuentre el conjunto Potencia de A

4. – Sean los conjuntos:

$\mathrm{A} = \{ 1, 2, 4, 5, 7 \}$ $\mathrm{B} = \{ 7, 8, 9 \}$ $\mathrm{C} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

¿Es verdad que:

a) $(\mathrm{A} - (\mathrm{A} - \mathrm{B}))^c = \mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c$ b) $(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \subseteq \mathrm{A}$

c) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - (\mathrm{B} \cap \mathrm{A}^c) = \mathrm{A}$

5. – Sea $\mathrm{U} = \mathbb{R}$ y sean:

$\mathrm{A} = \{ x \in \mathrm{U} : x < 10 \}$ $\mathrm{B} = \{ x \in \mathrm{U} : -3 \leq x < 3.5 \}$
$\mathrm{C} = \{ x \in \mathrm{U} : x > 0 \ \vee \ x < -3 \}$

Determinar :

a) $A^c \cup B$ b) $(B - A) \cap C^c$ c) $(A - C)^c \cup B$

d) $[A - (B - C)]^c$

Respuesta

1. – $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{4, 5, 6\}$
$B = \{-2, 2, 4, 6\}$
$C = \{5, 6\}$
$D = \{0\}$

a) $A \cap B = \{4, 6\}$
b) $C \cup A = \{4, 5, 6\}$
c) $(C \cap A) - B = \{5\}$
d) $(D - C^c)^c = U$
e) $(A - B)^c - C = U - \{5, 6\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

f) $[(A^c \cap D) - (C - B^c)] = \{0\}$

2. – $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$B = \{4, 5, 6\}$
$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

a) $(A \cap B)^c - C = \{0, 1, 2\}$
b) $(A \cup B)^c - (C - A) = \{0, 1, 2\}$
c) $(A \cup C)^c - (A \cap B) = \{0, 1, 2\}$
d) $[A - (B - C)]^c = \{0, 1, 2\}$
e) $(C \cup A) - B^c = \{4, 5, 6\}$

3. – $2^3 = 8$

$$P(A) = \Big\{ \{a\}, \{b\}, \{\{c\}\}, \{a, b\}, \{a, \{c\}\}, \{b, \{c\}\}, \{a, b, \{c\}\}, \phi \Big\}$$

4. – a) $(A - (A - B))^c = A^c \cup B^c$
Si, ambos conjuntos son iguales
b) $(A \cap C) - (A - B) \subseteq A$
Si
c) $(A \cup B) - (B \cap A^c) = A$
Si

5. – $U = \mathbb{R}$
$A =]-\infty, 10[$
$B = [-3, 3.5[$
$C =]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$

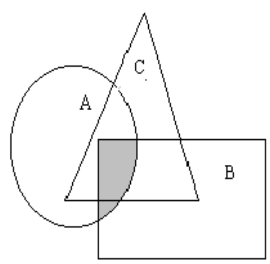
a) $A^c \cup B = [\,10,\, +\infty\,[\cup [\,-3,\, 3.5\,[$
b) $(B - A) \cap C^c = \phi$
c) $(A - C)^c \cup B = \mathbb{R}$
d) $[\,A - (B - C)\,]^c = [\,-3, 0\,] \cup [\,10,\, +\infty\,[$

Pero todo esto, también se puede resolver usando diagramas de Venn, achurando lo que se pide, veamos un ejemplo.

Ejemplo:

Achurar la solución de $(A \cap B) - C$

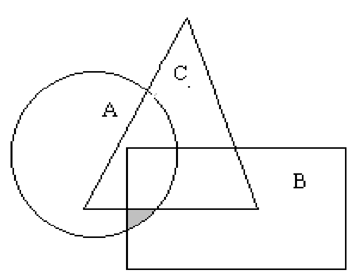
i) Primero achuramos $A \cap B$, como se ve en la figura



$A \cap B$

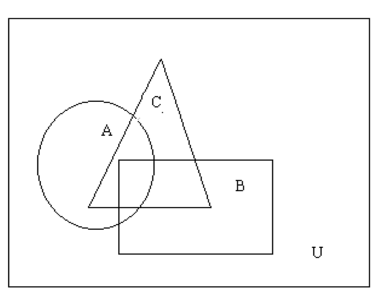
ii) Luego, a la figura achurada le quitamos C

$(A \cap B) - C$



Ejercicios

Achure en la figura dada, lo que se pide en cada ejercicio:



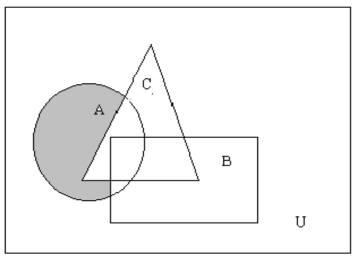
a) $(A - C) - B$ b) $(A \cup B)^c$ c) $A - (B \cap C)^c$

d) $A^c - (B \cap A)^c$ e) $(A \cap B)^c - (C \cap B)$

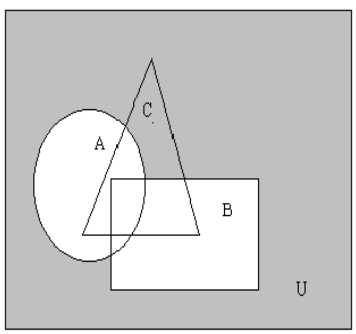
f) $B \cup (A - C^c)$ g) $(A \cap B \cap C) - A$

Respuesta

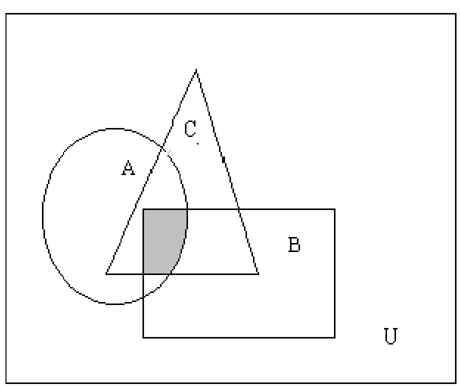
a)



b)

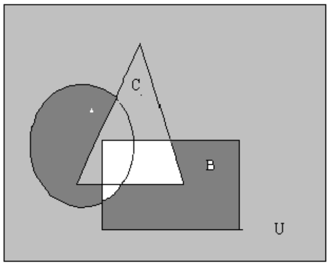


c)

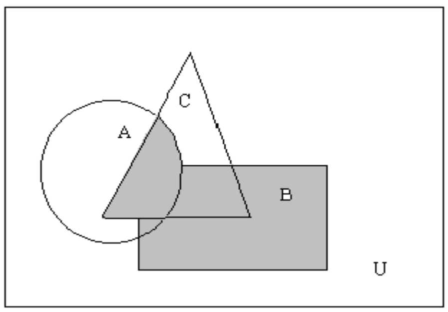


d) Desarrollar en clases, en forma grupal.

e)



f)



g) Desarrollar en clase, en forma grupal.

Los conjuntos también cumplen ciertas reglas, las cuales rigen a sus operaciones. A continuación se presenta una lista de estas reglas o propiedades y luego unos ejercicios en los cuales serán utilizadas éstas, se incluye además la forma de resolución correspondiente.

Propiedades de los Conjuntos

Sean tres conjuntos cualesquieras A, B y C:

1) Asociatividad

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2) Conmutatividad

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

3) Distributividad

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) De Morgan

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

5) Absorción

a) $A \cup (A \cap B) = A$ b) $A \cap (A \cup B) = A$

6) No Idempotencia

a) $A \cap \emptyset = \emptyset$ b) $A \cup \emptyset = A$
c) $A \cap U = A$ d) $A \cup U = U$
e) $A \cap A^c = \emptyset$ f) $A \cup A^c = U$

7) Involución

$(A^c)^c = A$

8) Diferencia

a) $A - B = A \cap B^c$

9) Idempotencia

a) $A \cap A = A$ b) $A \cup A = A$

Para resolver ejercicios en los cuales se usan las propiedades, conviene desarrollar el lado de la expresión que presenta mayor dificultad justificando cada paso.

Ejemplo 1:

Usando las propiedades dadas, demostrar que:

$$A = A - (A^c - B)$$

Respuesta:
Desarrollaremos la segunda parte de la expresión para llegar a la primera parte:

$A - (A^c - B)$	
$A \cap (A^c \cap B^c)^c$	Diferencia
$A \cap [(A^c)^c \cup (B^c)^c]$	De Morgan
$A \cap (A \cup B)$	Involución
A	Absorción

Luego: $A - (A^c - B) = A$

Ejemplo 2:

Usando las propiedades dadas, demuestre que $(A \cup B) - (B \cap A^c) = A$

Respuesta

Desarrollaremos la primera parte de la expresión para llegar a la segunda parte:

$(A \cup B) - (B \cap A^c)$

$(A \cup B) \cap [(B \cap A^c)]^c$ Diferencia
$(A \cup B) \cap [B^c \cup (A^c)^c]$ De Morgan
$(A \cup B) \cap (B^c \cup A)$ Involución
$A \cup (B \cap B^c)$ Distributividad
$A \cup \phi$ No Idempotencia
A No Idempotencia

Luego: $A = (A \cup B) - (B \cap A^c)$

¿ Y puedo aplicar en algún problema real todo esto .... ?

Los Problemas con enunciados son un buen ejemplo de la utilización de las operaciones de conjuntos. Para resolverlos, basta con transformar el lenguaje cotidiano a lenguaje matemático.

Ejemplo 1:

En una encuesta realizada a 62 consumidores de comida rápida se revela que:
10 comen sólo papas fritas y hamburguesas, 12 comen sólo completos, 4 comen sólo papas fritas, 3 comen los tres tipos de alimentos, 33 comen al menos dos de estos tipos de comida y 25 comen papas fritas. Si todos nombran alguna de las alternativas, encuentre:

a) ¿Cuántas personas comen completos y hamburguesa?
b) ¿Cuántas personas comen sólo completos?
c) ¿Cuántas personas comen exactamente dos tipos de esta comida?

Respuesta:

Se designa cada conjunto del problema con una letra mayúscula convenientemente. Llamaremos U al conjunto universo el cual está formado por el total de consumidores de Comida Rápida dados en el problema, los cuales son 62, P será el conjunto de consumidores de Papas Fritas, H el conjunto de consumidores de Hamburguesas y C los consumidores de Completos. Esto en notación conjuntista es:

U $= \{x \,/\, x$ consumidores de Comida Rápida$\}$
P $= \{x \in$ U $/\, x$ consumidores de Papas Fritas$\}$
H $= \{x \in$ U $/\, x$ consumidores de Hamburguesa$\}$
C $= \{x \in$ U $/\, x$ consumidores de Completos$\}$

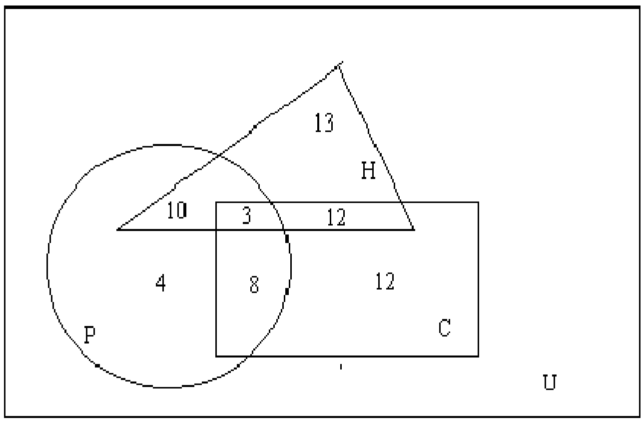
Las 10 personas que consumen **sólo** Papas Fritas y Hamburguesas indica que no consumen Completos, es decir, es $(P \cap H) - C = 10$

Los 12 consumidores de Completos no consumen ninguna de las otras comidas rápidas, **sólo** Completos, es decir, $C - (P \cup H) = 12$
Los 4 consumidores de **sólo** Papas Fritas tampoco consumen las otras comidas rápidas, es decir, $P - (H \cup C) = 4$
Las 3 personas que consumen los tres tipos de comidas están dados por la solución del conjunto $(P \cap H \cap C) = 3$
Las 33 personas que consumen al menos dos de los tres tipos de comida rápida significa que consumen como **mínimo** dos tipos distintos, es decir,

$(P \cap H) \cup (H \cap C) \cup (P \cap C) \cup (P \cap H \cap C) = 13$

Los 25 consumidores de Papas Fritas también son consumidores de Hamburguesas y Completos, es decir, es todo el conjunto P.

Completaremos la información en la figura dada a continuación:



Las respuestas al problema planteado son:

a) $C \cap H = 15$; 15 personas comen completos y hamburguesas.

b) $C - (P \cup H) = 12$; 12 personas comen sólo completos.

c) $[(P \cap H) - C] \cup [(H \cap C) - P] \cup [(P \cap C) - H] = 30$
30 personas comen exactamente dos tipos de esta comida.

<u>Problemas con enunciado</u>

1. – En una investigación a mil estudiantes de un Instituto se determinó que 720 tenían cassettes, 670 poseían CD y 540 tenían ambas cosas. Determinar:
a) ¿Cuántos estudiantes tienen cassettes o CD?
b) ¿Cuántos estudiantes no tienen cassettes ni CD?
c) ¿Cuántos estudiantes tienen sólo CD?
d) ¿Cuántos estudiantes tienen sólo cassettes?

2. – Se investigó un grupo de 5500 personas en relación con la estrategia a seguir con objeto de conservar el combustible. De éstas, 2000 opinaron que lo aceptable era el racionamiento, 1500 dijeron que lo apropiado sería fijar un impuesto adicional por litro, y 750 personas indicaron que lo apropiado sería la aplicación de ambos procedimientos.
El resto de las personas no aceptan ninguno de los dos sistemas.
Determinar:
a) Un diagrama de Venn, que resuma lo anterior.
b) ¿Cuántas personas aceptarían en forma voluntaria el racionamiento pero no el impuesto?
c) ¿Cuántas personas aceptarían en forma voluntaria el impuesto, pero no el racionamiento?
d) ¿Cuántas personas no aceptarían en forma voluntaria ninguno de los dos cursos de acción?

3. – En una elección de directorio de una empresa asistieron 595 de un universo de 703 accionistas. Según los estatutos de la empresa cada accionista recibe una papeleta con los nombres de todos los candidatos y en donde el accionista marcará, si lo desea, hasta dos preferencias.
De los resultados de la elección se determinó la siguiente información referente a las tres primeras mayorías.
El candidato A obtuvo 324 preferencias, 47 de los accionistas sólo votaron por A, 203 votaron por A y no por B, 164 votaron por C y B, 358 votaron por C y 42 votaron sólo por B. Determinar:
a) ¿Quién obtuvo la primera mayoría?
b) ¿Quién obtuvo la segunda mayoría?
c) ¿Cuántos votaron por dos candidatos?
d) De todos lo asistentes, ¿cuántos no votaron por C?
e) ¿Cuántos sólo votaron por C?
f) ¿Cuántos de los asistentes no votaron por ninguno de los tres?
g) ¿Cuántos accionistas no se hicieron presente?
h) ¿Cuántos accionistas votaron por los tres candidatos?

4. – De una encuesta a 200 personas que compran pasta de dientes 80 compran Pepsodent, 60 compran solamente Odontine, 20 compran solamente Signal, 14 compran Pepsodent y Odontine, 20 compran Odontine y Signal, 12 compran Pepsodent y Signal y 10 compran todos. El resto compra otra marca.
a) ¿Cuántos compran al menos una de estas marcas?
b) ¿Cuántos no compran estos dentríficos?
c) ¿Cuántos compran solamente Pepsodent?
d) ¿Cuántos compran Signal?
e) ¿Cuántos no compran Odontine?
f) ¿Cuántos compran Signal u Odontine?

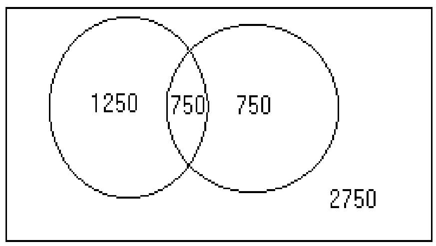
5. – Se realizó una encuesta a 200 alumnos de Ingeniería en Ejecución en diversas disciplinas acerca de la forma en que ocupaban su tiempo libre, 30 dicen que sólo leen, 60 dicen que sólamente escuchan música, 20 dicen que sólo estudian, 16 dicen que leen y escuchan música, 50 dicen que estudian, 16 dicen que escuchan música y estudian y 8 hacen las tres cosas .
De acuerdo a la encuesta, responda las preguntas dadas:

a) Grafique la información.
b) ¿Cuántos sólo leen o estudian?
c) ¿De los que opinan, cuántos dicen que no leen?
d) ¿Cuántas personas no contestan alguna de estas tres alternativas?
e) ¿Cuántas personas escuchan música, pero no leen?
f) ¿Cuántas personas estudian y escuchan música, pero no leen?

Respuesta

1. – $a)$ 850
$b)$ 150
$c)$ 130
$d)$ 180

2. – $a)$

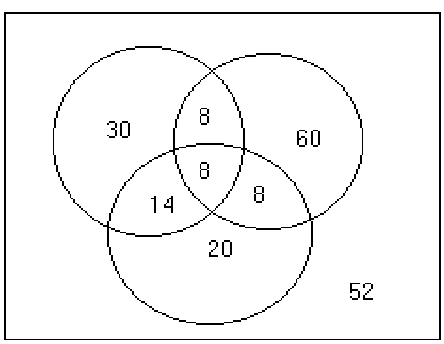


$b)$ 1250
$c)$ 750
$d)$ 2750

3. – $a)$ C $b)$ B $c)$ 441
$d)$ 237 $e)$ 38 $f)$ 27
$g)$ 108 $h)$ ninguno

4. – $a)$ 170 $b)$ 30 $c)$ 64
$d)$ 42 $e)$ 116 $f)$ 106

5. – $a)$



$b)$ 64 $c)$ 88 $d)$ 52
$e)$ 68 $f)$ 8

.-

Autoevaluación

3.- Una encuesta realizada a 100 estudiantes arrojó la siguiente información:

32 estudian Cálculo I
20 estudian Física
45 estudian Química
15 estudian Cálculo I y Química
7 estudian Cálculo I y Física
10 estudian Física y Química
30 no estudian ninguna de las tres asignaturas

Determina el número de alumnos que:

a) estudian las tres asignaturas
b) cursan una y sólo una de las tres asignaturas

4.- Si sabemos que un conjunto G es subconjunto de un conjunto A no vacío, determina la veracidad de los siguientes enunciados:

a) $A \cap G = G$
b) $(G - A) \supset A$
c) $G \cup A = A$
d) $(A - G) \cap A = (A - G)$

5.- ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Si $A \cap B = B$, entonces $B \subseteq A$
b) Si $A \cup B = B$, entonces $A \subseteq B$
c) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $B = \emptyset$
d) Si $A \subseteq B$ y $x \in B$ entonces $x \in A$
e) Si $x \in A$, entonces $x \in A \cap B$
f) Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$

Soluciones

3.- a) Hay cinco alumnos que estudian las tres asignaturas
b) Hay 48 alumnos que estudian una y sólo una de las asignaturas.

4.- a) V
b) F
c) V
d) V

5.- a) V
b) V
c) F
d) F
e) F
f) V

Producto cartesiano

Para entender la idea de **producto cartesiano** debemos saber que se trata de una operación entre dos **conjuntos** , de tal modo que se forma otro conjunto con todos los p **pares ordenados** posibles.

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$, su producto cartesiano es:

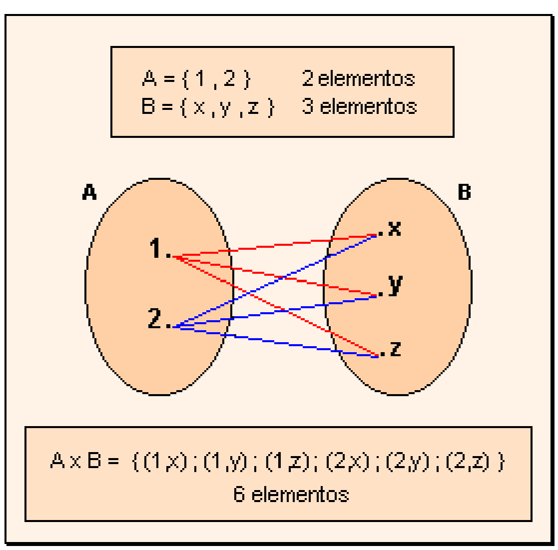
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$

Los elementos de **A x B** son pares ordenados. Cada par que se forma con un elemento del conjunto A y uno del conjunto B, **en ese orden,** recibe el nombre de par ordenado. Sus elementos se colocan entre paréntesis, separados por coma.

Entonces:

El producto cartesiano de dos conjuntos cualesquiera A y B, será un nuevo conjunto, identificado como **A x B** , y consistirá de un conjunto de parejas ordenadas, (x, y), donde **x** pertenece al conjunto A e **y** pertenece al conjunto B.

Como ejemplo:



Ventajas de la Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos nos permite visualizar las intersecciones que puedan existir entre las partes que conforman un problema, así como cada parte con el todo. Es un instrumento esencial para el desarrollo de la capacidad de análisis

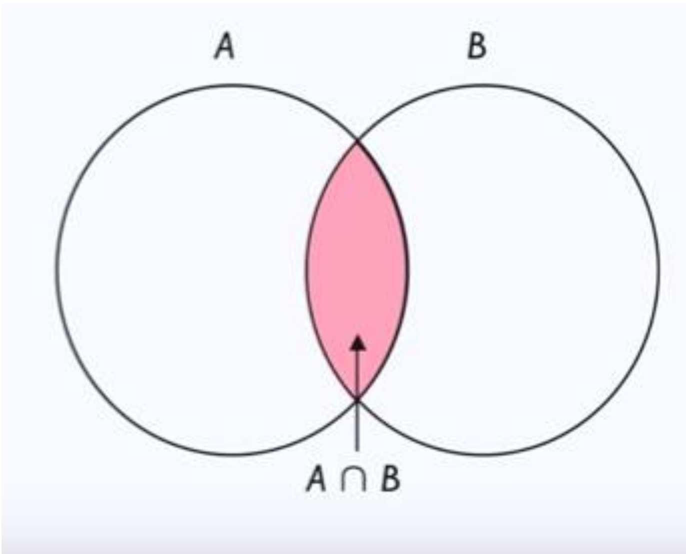


Tabla de pertenencia

Se considera cada combinación de conjuntos en los que un elemento puede pertenecer y se verifica que los elementos en la misma combinación de conjuntos pertenecen a ambos conjuntos en la identidad.

Probar $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Probar $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

1 representa $x \in$ **Conjunto**
0 representa $x \notin$ **Conjunto**

Probar $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A\cap B$	$\overline{A\cap B}$	$\overline{A}\cup\overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Probar $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A\cap B$	$\overline{A\cap B}$	$\overline{A}\cup\overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Probar $\overline{A\cup(\overline{A}\cap B)} = \overline{A} \cap (A\cup\overline{B})$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cap B$	$A\cup(\overline{A}\cap B)$	$\overline{A\cup(\overline{A}\cap B)}$	$A\cup\overline{B}$	$\overline{A}\cap(A\cup\overline{B})$
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

Probar $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$

A	B	C	$\overline{A}$	$B \cap C$	$\overline{B \cap C}$	$\overline{A} \cap (\overline{B \cap C})$	$A \cup (B \cap C)$	$\overline{A \cup (B \cap C)}$
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1

Complete la tabla para (A – B)

A	B	A-B
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	?

Complete la tabla para (A – B)

A	B	A-B
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Probar $A \cap (B - A) = \varnothing$

A	B	B-A	$A \cap (B-A)$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Probar $A \cup (B - A) = A \cup B$

A	B	B-A	$A \cup (B-A)$	$A \cup B$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

Aplicaciones de la teoría de conjuntos en las ingenierías

Teoría de conjuntos e ingeniería informática

La teoría de conjunto se relaciona con la informática al ser uno de los primeros lenguajes que soportaban conjuntos fue Pascal; muchos lenguajes lo incluyen ahora, ya sea en el núcleo del lenguaje o en una librería estándar.

El Lenguaje de programación Java ofrece la clase "conjunto" para templates, que implementa a un conjunto ordenado usando un árbol de búsqueda binario; , implementando conjuntos con una tabla de hash. Python tiene un tipo de conjunto incorporado, pero no un conjunto en sí.

Teoría de conjuntos e ingeniería en administración de empresas

La teoría de conjuntos es particularmente útil para el tratamiento de los datos recolectados específicamente para cada puesto.

Al lograr organizar a la empresa de acuerdo a las aptitudes, actitudes y temperamentos de cada colaborador se obtiene un mejor clima laboral y trato; asimismo, se puede mejorar la relación entre cliente-trabajador.

Se crean mejores equipos de trabajo, con más eficiencia y más productividad.

La visión en cuanto a selección de personal se vuelve más amplia.

Teoría de conjuntos e ingeniería industrial

Dentro de esta asignatura existe la denominada la teoría general de sistemas (TGS) que trata de ir desengranando los factores que intervienen en el resultado final, a cada factor le otorga un valor conceptual que fundamenta la coherencia de lo observado, enumera todos los valores y trata de analizar todos por separado y, en el proceso de la elaboración de un postulado, trata de ver cuantos conceptos son comunes y no comunes con un mayor índice de repetición, así como los que son comunes con un menor índice de repetición. Con los resultados en mano y un gran esfuerzo de abstracción, se les asignan a conjuntos (teoría de conjuntos), formando objetos.

UNIDAD Nº1
LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

LÓGICA

Toda estructura matemática necesita tener un razonamiento válido a través de un lenguaje que sea de uso universal. Ante esta situación es que se necesita una simplificación y uso de simbolismos inequívocos que nos permitan razonar en forma válida con reglas establecidas con claridad. En este contexto, surgen conceptos tales como el de:

Proposición: Es una expresión con sentido, en algún lenguaje, que afirma o niega algo y que nos proporciona información.

Las proposiciones se denotan con la letras p, q , r …..

Ejemplo 1:

p : El pizarrón es verde

q : $2+3=7$

r : A ella le gusta la música

Si observa las proposiciones, estas pueden ser verdaderas o falsas (no aceptan ambigüedades).

No son proposiciones:

a) el interruptor

b) $2x+3=6$

c) ¿Qué hora es ?.

Estos enunciados no son proposiciones porque no tienen sentido, no afirman ni niegan.

Valor de Verdad: Es una función que define una proposición. El valor de verdad puede ser Verdadero (V) o Falso (F).

Tabla de Verdad : Una tabla de verdad es una forma de resumir el valor de verdad de las proposiciones. Esta se construye de acuerdo al número de proposiciones distintas que se den.

El número de combinaciones posibles de valores de verdad se determina al resolver la expresión 2^n, donde n representa el número de proposiciones dadas.

¡¡ Veamos cómo funciona esto!!

- Si hay una sola proposición, $n = 1$, resolvemos $2^1 = 2$. Esto significa que se pueden dar dos posibles valores de verdad y la tabla que resulta es:

p	
V	
F	

- Si hay 2 proposiciones distintas p y q, $n = 2$, entonces resolvemos $2^2 = 4$

Esto significa que se pueden dar cuatro combinaciones de valores de verdad y la tabla que resulta es :

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

– Si hay tres proposiciones , $n = 3$, resolvemos $2^3 = 8$

Es decir, se pueden dar ocho combinaciones de valores de verdad y la tabla es:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

...y así sucesivamente.

Las proposiciones pueden ser **simples o compuestas**. Son proposiciones simples las que se dan en el ejemplo anterior :

p : El pizarrón es verde

q : $2 + 3 = 7$

r : A ella le gusta la música

Son compuestas aquella que se unen mediante símbolos llamados Conectivos.

Conectivos Lógicos u Operadores Lógicos:

Son símbolos que permiten relacionar una o más proposiciones.

Los conectivos son: la negación ($\sim$), la conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\longrightarrow$) y bicondicional ($\leftrightarrow$).

1. – **Negación** : $\sim p$

Dado un enunciado p, se puede formar otro enunciado que se llama negación de p, escribiendo "es falso que..." ó "no..." antes de la proposición p.

Simbólicamente se representa por:

$$\boxed{\sim \boldsymbol{p}}$$

Ejemplo :

p : el día está nublado

$\sim p$: el día no está nublado

El valor de verdad de la negación depende del valor de verdad de la proposición original. Si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso y viceversa.

La tabla de verdad que resume esto es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

2. – **Conjunción**: $p \wedge q$

Dos proposiciones simples cualesquiera, se pueden unir mediante la palabra "y" para formar una proposición compuesta, que se llama Conjunción.

Simbólicamente se denota por:

$$\boxed{\boldsymbol{p \wedge q}}$$

Ejemplo :

p : Está nublado
q : Hace frío
$p \wedge q$: Está nublado y hace frío.
La tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. – **Disyunción** : $p \vee q$

Dos enunciados cualesquiera, se pueden combinar mediante la palabra "o" (en el sentido y/o) para formar un nuevo enunciado que se llama disyunción de los dos enunciados previos. Simbólicamente se denota por:

$$\boxed{\boldsymbol{p \vee q}}$$

Ejemplo :

p : La puerta se abre
q : La silla es de madera

$p \vee q$: La puerta se abre o la silla es de madera
La tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. – **Condicional** : $p \rightarrow q$

Muchos enunciados en matemática son de la forma "si p entonces q", estos se llaman condicionales y se les denota por:

$$\boxed{\boldsymbol{p \rightarrow q}}$$

Ejemplo:

p : son las 10 de la mañana
q : la clase es de matemática

$p \rightarrow q$: Si son las 10 de la mañana entonces la clase es de matemática
La tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. – **Bicondicional** : $p \leftrightarrow q$

Otro enunciado muy usado es el de la forma "p sí y sólo si q", los cuales se llaman bicondicionales y se les denota por :

$$\boxed{\boldsymbol{p \leftrightarrow q}}$$

Ejemplo
p : Hoy voy a ir al cine
q : Hace calor

$p \leftrightarrow q$: Hoy voy a ir al cine, sí y sólo si, hace calor
La tabla de verdad es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejercicios
1. – Sean las proposiciones

p : El va a la fiesta
q : Ella es su polola

Escriba con palabras los siguientes enunciados:

$a)$ $\sim q$: ....

$b)$ $q \vee \sim p$: ……………………………………………………………….

$c)$ $\sim \sim p$: …………………………………………………………………

$d)$ $\sim \sim q$: ………………………………………………………………

$e)$ $\sim p \leftrightarrow q$: ……………………………………………………………..

$f)$ $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$:……………………..……………………..……………

$g)$ $p \rightarrow \sim q$: ……………………………………………………………....

2. – Sean las proposiciones:

p : Tengo dinero
q : Hoy dejaré de fumar

Escriba los siguientes enunciados verbales en forma simbólica usando p y q:

$a)$ No tengo dinero

$b)$ Si tengo dinero entonces hoy no dejaré de fumar

$c)$ Tengo dinero, sí y sólo si, hoy dejo de fumar

$d)$ No es verdad que, hoy no dejaré de fumar

$e)$ No es verdad que, no tengo dinero y que hoy no dejaré de fumar

$f)$ Es falso que, no tengo dinero o que hoy dejaré de fumar

Respuesta

1. –

a) Ella no es su polola
b) Ella es su polola o él no va a la fiesta
c) No es verdad que, él no va a la fiesta
d) No es verdad que, ella no es su polola
e) El no va a la fiesta, sí y sólo si, ella es su polola
f) Si él va a la fiesta y ella no es su polola, entonces él va a la fiesta
g) Si él va a la fiesta, entonces ella no es su polola

2. –

$a)\quad \sim p$

$b)\quad p \rightarrow \sim q$

$c)\quad p \leftrightarrow q$

$d)\quad \sim \sim q$

$e)\quad \sim (\sim p \wedge \sim q)$

$f)\quad \sim (\sim p \vee q)$

USO DE PARÉNTESIS

El uso de paréntesis es un símbolo que forma parte de la lógica secuencial, el uso de ellos es lógico y no retórico, sin los paréntesis las fórmulas o expresiones lógicas pueden carecer de sentido.

En el siguiente ejemplo, puede observar que las expresiones son claramente distintas:

$a)\ p \rightarrow (q \vee r)$

$b)\ (p \rightarrow q) \vee r$

TABLAS DE VERDAD PARA RESOLVER PROPOSICIONES COMPUESTAS

Una manera de mostrar la relación entre el valor de verdad de una proposición $P(p, q, \ldots)$ y los valores de verdad de las proposiciones $p, q, \ldots$ es mediante una tabla de verdad.

Ejemplo

Sea la proposición $\sim (p \wedge \sim q)$

Primero se completan las dos primeras columnas correspondientes a las proposiciones p y q

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Segundo se resuelve el paréntesis de la proposición, desde adentro hacia afuera:

p	q	$\sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Luego, se va completando la expresión que está dentro del paréntesis

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

...y por último: se completa toda la expresión en la tabla

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Por lo tanto, la solución de $\sim (p \wedge \sim q)$ está dada en la última columna.

Existe otra forma de completar la tabla de verdad de $\sim (p \wedge \sim q)$ y es la siguiente:
Se escribe toda la expresión en la tabla colocando cada parte de ésta en un cuadrado de la tabla

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$

Se va completando la tabla de la siguiente forma:

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$
V	V		V		F
V	F		V		V
F	V		F		F
F	F		F		V

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$
V	V		V	F	F
V	F		V	V	V
F	V		F	F	F
F	F		F	F	V

p	q	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V

La solución de $\sim (\, p \wedge \sim q\,)$ está dada en la columna de la negación $(\sim)$.

Ejercicios

1. – Construya la tabla de verdad de las siguientes expresiones lógicas:

$a)$ $(\, p \wedge \sim q\,) \rightarrow p$

$b)$ $(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q$

$c)$ $\sim (p \rightarrow q) \wedge p$

$d)$ $(\, p \vee \sim q\,) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$e)$ $\sim (p \rightarrow r) \wedge q$

$f)$ $[\sim p \rightarrow (\, q \wedge r\,)] \leftrightarrow \sim q$

2. – Si

p : Cecilia Bolocco es Primera Dama
q : $1+1=2$
r : $2-5 \neq 4$

Determine el valor de verdad de:

$a)\, [(r \vee \sim q) \wedge p] \vee \sim q$

$b)\, \sim [(\sim q \rightarrow \sim p) \vee \sim r] \leftrightarrow p$

3. – Si

$p : 3x + 3y = 9$
$q : 5x + y = 7$
$r : 5y + x = 11$ $\qquad x = 1,\ y \neq 2,\ y \in \mathbb{R}$

Determine el valor de verdad de:

$a)\, [(p \vee q) \wedge \sim r] \rightarrow \sim q$

$b)\, \sim [(\sim q \rightarrow \sim p) \vee \sim r]$

$c)\, (\sim p \vee r) \rightarrow \sim q$

Respuesta

$a)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow p$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

$b)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

$c)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$\sim (p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

$d)$

					1	2
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$1 \vee 2$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

$e)$

p	q	r	$p \rightarrow r$	$\sim (p \rightarrow r)$	$\sim (p \rightarrow r) \wedge q$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F

$f)$

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$q \wedge r$	$\sim p \rightarrow (q \wedge r)$	$[\sim p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F

2. – $a)\, F$
$b)\, V$

3. – Los valores de verdad de las proposiciones son:

$p:\ F \qquad q:\ F \qquad r\ :F$

$a)\,[\,(p \vee q) \wedge \sim r\,] \rightarrow \sim q$
$[\,(F \vee F\,) \wedge \sim F\,] \rightarrow \sim F$
$[\quad (\ F\ \ ) \wedge V\,] \rightarrow V$
$F \rightarrow V$
V

$b)\ \sim [\,(\ \sim q \rightarrow \sim p\,) \vee \sim r\,]$
$\sim [\,(\ \sim F \rightarrow \sim F\,) \vee \sim F\,]$
$\sim [\,(V \rightarrow V\,) \vee V\,]$
$\sim [\,V \vee V\,]$
$\sim [\,V\,]$
F

$c)\ (\ \sim p \vee r\,) \rightarrow \sim q$
$(\ \sim F \vee F\,) \rightarrow \sim F$
$(\,V \vee F\,) \rightarrow V$
$(\,V\ ) \rightarrow V$
V

Clasificación de las Proposiciones Compuestas

Tautología
Una proposición $P\,(p, q, ...)$ es una Tautología si todos los valores de verdad de su última columna son Verdaderos, sean cuáles sean los valores de verdad de sus proposiciones.

Contradicción
Una proposición $P\,(p, q, ...)$ es una Contradicción si todos los valores de verdad de su última columna son Falsos, sean cuáles sean los valores de verdad de sus proposiciones.

Contingencia
Una proposición $P\,(p, q, ...)$ es una Contingencia si todos los valores de verdad de su última columna son Verdaderos y Falsos.

Ejemplo

Demuestre que la siguiente proposición es una tautología

$\sim (\,p \vee \sim q\,) \leftrightarrow (\,\sim p \wedge q\,)$

Respuesta

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\vee \sim q$	$\sim(p\vee \sim q)$ (1)	$\sim p\wedge q$ (2)	$1\leftrightarrow 2$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V

Por lo tanto, $\sim(\,p\vee \sim q\,)\leftrightarrow(\,\sim p\wedge q\,)$ es una Tautología.

Ejercicios

De las expresiones lógicas dadas, determine cuál de ellas es Tautología, Contradicción o Contingencia.

$a)\ (\,\sim\ p\ \wedge\ q\,)\ \rightarrow\ \sim q$

$b)\,p\ \vee\ [\ \sim\ (p\ \wedge\ \sim q)\ \leftrightarrow r\ ]$

Observación 1:

Cuando las proposiciones que se relacionan por el conectivo $\rightarrow$ determinan una Tautología, entonces la expresión es una implicancia lógica y el conectivo cambia a $\Rightarrow$.

Ejercicio

Demuestre que la siguiente expresión es una implicancia lógica

$(\,p\wedge q\,)\rightarrow(\,p\leftrightarrow q\,)$

Observación 2:

Cuando las proposiciones que se relacionan por el conectivo $\leftrightarrow$ determinan una Tautología, entonces la expresión es una equivalencia lógica y el conectivo cambia a $\Leftrightarrow$

Ejemplo

En el ejercicio anterior, la expresión

$\sim(\,p\vee \sim q\,)\leftrightarrow(\,\sim p\wedge q\,)$ es una Tautología, por lo tanto la escribimos:

$\sim(\,p\vee \sim q\,)\Leftrightarrow(\,\sim p\wedge q\,)$

Un ejemplo de equivalencia lógica son las leyes Proposicionales.

Leyes del Algebra Proposicional

1. – Idempotencia

$a)\ p \wedge p \Leftrightarrow p$ $\quad$ $b)\ p \vee p \Leftrightarrow p$

2. – No Idempotencia

$a)\ p \wedge F \Leftrightarrow F$ $\quad$ $d)\ p \vee V \Leftrightarrow V$

$b)\ p \vee F \Leftrightarrow p$ $\quad$ $e)\ p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

$c)\ p \wedge V \Leftrightarrow p$ $\quad$ $f)\ p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

3. – Conmutatividad

$a)\ p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $\quad$ $b)\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$c)\ p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

4. – Asociatividad

$a)\ (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$b)\ (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

5. – Distributividad

$a)\ (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$b)\ (p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

6. – Absorción

$a)\ p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $\quad$ $b)\ p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. – Negación

$a)\ \sim F \Leftrightarrow \mathrm{V}$

$b)\ \sim V \Leftrightarrow F$

$c)\ \sim (\sim V) \Leftrightarrow V$

8. – De Morgan

$a)\ \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

$b)\ \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

9. – Condicionales

$a)\ (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

$b)\ (p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

10. – Doble Implicación

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

Usando las leyes proposicionales también es posible encontrar otra expresión equivalente a la que se da, esto se hace simplificando la proposición compuesta dada.

<u>Ejemplo</u>
Simplifique la expresión $(p \vee q) \rightarrow \sim p$ e indique cada paso que realizó

<u>Respuesta</u>

$(p \vee q) \rightarrow \sim p$	
$\sim (p \vee q) \vee \sim p$	Por Condicional
$(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$	De Morgan
$\sim p \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Conmutatividad
$\sim p$	Absorción

Por lo tanto $(p \vee q) \rightarrow \sim p \Leftrightarrow \sim p$

<u>Ejercicios</u>

I) Simplifique las siguientes expresiones:

1. – $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$ 2. – $p \vee (\sim q \rightarrow p)$

3. – $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee q)$ 4. – $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

II) Niegue las siguientes expresiones:

$i)$ $\sim p \wedge q$ $ii)$ $[p \vee (q \wedge \sim p)]$

$iii)$ $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ $iv)$ $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

III) Demuestre que:

$i)$ $[\sim p \rightarrow (\sim q \wedge p)] \Leftrightarrow p$

$ii)$ $[(p \rightarrow q) \vee (\sim p \rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow V$

$iii)$ $[p \vee (q \wedge \sim p)] \Leftrightarrow (p \vee q)$

$iv)$ $[(p \rightarrow \sim q) \vee \sim q] \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

$v)$ $[(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow \sim p \wedge q$

<u>Respuesta</u>

I) 1. – V 2. – $p \vee q$ 3. – V 4. – V

II) $iv)$ F III) Se dejan al estudiante

LOGICA CUANTIFICACIONAL

Es una rama de la lógica que utiliza determinados símbolos llamados CUANTIFICADORES, los cuales permiten indicar el número de elementos de un conjunto que al ser sustituidos en un enunciado hacen de él una proposición verdadera.

Función lógica o proposicional

Es una afirmación que contiene una o más variable.
Las funciones proposicionales se denotan por letras minúsculas, y las variables se escriben dentro de un paréntesis, por ejemplo:

$p(x)$, $q(x)$, $r(y)$ son funciones proposicionales, x e y son variables.

Ejemplo 1:

Sea $A = \{1,2,3\}$ y la función proposicional $p(x) : x + 2 \leq 5$, $x \in A$
Determine qué valores cumple la función.

Respuesta

Sustituiremos cada elemento de A en la función proposicional $p(x)$.

Sea $x = 1 \Rightarrow p(1) = 1 + 2 \leq 5$
$3 \leq 5$ V

Sea $x = 2 \Rightarrow p(2) = 2 + 2 \leq 5$
$4 \leq 5$ V

Sea $x = 3 \Rightarrow p(3) = 3 + 2 \leq 5$
$5 \leq 5$ V

Observe que " todos los elementos que están en A cumplen la proposición $p(x)$"
,esto se puede simbolizar por el cuantificador: $\forall$ y es el Cuantificador Universal.

$\forall$ se lee, " para todo " , " todo"

Simbólicamente escribimos todo el enunciado de la siguiente forma:

$$\boxed{(\forall x \in A)(p(x) : x + 2 \leq 5)}$$

Esta función lógica es cuantificada.

Ejemplo 2:

Sea $A = \{-1,0,1\}$ y $q(x) : |x| + 3 = 4$

Determine qué valores del conjunto A cumplen con la proposición

Respuesta

Sustituiremos todos los elementos

$$x = -1, \quad q(-1): |-1| + 3 = 4$$
$$1 + 3 = 4$$
$$4 = 4 \qquad V$$

$$x = 0, \quad q(0): |0| + 3 = 4$$
$$0 + 3 = 4$$
$$3 = 4 \qquad F$$

$$x = 1, \quad q(1): |1| + 3 = 4$$
$$1 + 3 = 4$$
$$4 = 4 \qquad V$$

Observe que sólo algunos elementos de A cumplen la proposición $q(x)$, esto se simboliza por otro cuantificador: $\exists$, llamado Cuantificador Existencial.

$\exists$ se lee, "existen algunos elementos " o " existe al menos un …"

Simbólicamente escribimos todo el enunciado de la siguiente forma:

$$\boxed{(\exists x \in A)(q(x): |x| + 3 = 4)}$$

ó

$$\boxed{\exists x, x \in A, q(x): |x| + 3 = 4}$$

Ejemplo 3:

Sea $A = \{-2, \sqrt{3}, -3\}$ y $r(x): x^2 + 6 = x^4$

Determine qué valores del conjunto A cumplen con la proposición

Respuesta

Sustituiremos cada elemento en $r(x)$

$$x = -2, \quad r(-2): (-2)^2 + 6 = (-2)^4$$
$$4 + 6 = 16$$
$$10 = 16 \qquad \text{F}$$

$$x = \sqrt{3}, \quad r(\sqrt{3}): (\sqrt{3})^2 + 6 = (\sqrt{3})^4$$
$$3 + 6 = (\sqrt{3})^2 . (\sqrt{3})^2$$
$$9 = 9 \qquad \text{V}$$

$$x = -3, \quad r(-3): (-3)^2 + 6 = (-3)^4$$
$$9 + 6 = 81$$
$$15 = 81 \qquad \text{F}$$

En este ejemplo, de todos los elementos de A , sólo $\sqrt{3}$ cumple con la proposición, esto se simboliza por $\exists!$, el cual es otro Cuantificador Existencial.

$\exists!$ se lee, "existe un único "

Del ejemplo anterior: $\exists!\, x \in A,\, r(x):\ x^2 + 6 = x^4,\ A = \{-2, \sqrt{3}, -3\}$

Ejemplo

Sea $p(x)$ una función proposicional, sobre el conjunto $\mathbb{R}$, use cuantificadores para escribir: Todo real cumple con $p(x)$

Respuesta

$\forall\, x,\ x \in \mathbb{R},\, p(x)$

¡¡ Ahora resuelva usted !!

Ejercicios

Sea $p(x)$ una función proposicional, sobre el conjunto $\mathbb{R}$, use cuantificadores para escribir los siguientes enunciados.

a) Existe un real que cumple con $p(x)$: ……………...............…………………….....
b) Algún real cumple con $p(x)$: ……………………………………..……….......
c) Todo real al cuadrado es positivo o cero : ……………………………………….
d) La ecuación $2x + 3 = 0$ tiene solución única en $\mathbb{R}$:
e) Existe por lo menos un real tal que su raíz cuadrada no es real :

...........................…………………………………………………………..

$f)$ No todos los números enteros son positivos :

....

Respuestas

a) $\exists\, !x,\, x \in \mathbb{R}\ ,p(x)$

b) $\exists\, x,\, x \in \mathbb{R}\ ,p(x)$

c) $\forall\, x,\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 \geq 0$

d) $\exists\, !\, x, x \in \mathbb{R}\ ,p(x) : 2x + 3 = 0$

e) $\exists\, x,\, x \in \mathbb{R}\ ,\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$

f) $\exists\, x,\, x \in \mathbb{Z},\, x \leq 0$

¿Se podrán agrupar de alguna forma todos los elementos de un conjunto que cumplen con una proposición?
Si, en un conjunto llamado Conjunto de Validez.

Por lo tanto, el conjunto de validez es aquel en el cual están todos lo valores para los cuales la proposición es verdadera.

Su notación es V_p, donde p indica la proposición.

¡¡ Veamos un ejemplo de esto !!

Ejemplo

Sea $A = \{2, 3, 4\}$, $s(x) : x - 1 > 2$

Respuesta

Sea $x = 2$ $\quad s(2) : 2 - 1 > 2$
$1 > 2 \quad F$

$x = 3$ $\quad s(3) : 3 - 1 > 2$
$2 > 2 \quad F$

$x = 4$ $\quad s(4) : 4 - 1 > 2$
$3 > 2 \quad V$

Es decir, el conjunto de Validez es $V_s = \{4\}$, ya que sólo el 4 cumple con la proposición $s(x)$.

Valor de Verdad de una función proposicional

El valor de verdad de una función proposicional depende del cuantificador y del conjunto de validez.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la función: $\forall x, x \in A, p(x) : 2x + 1 = 5$

Respuesta:

Si sustituimos cada elemento de A en $p(x)$, se observa que sólo cuando $x = 2$, la proposición se cumple, es decir:

$$p(2) : 2(2) + 1 = 5$$
$$4 + 1 = 5$$
$$5 = 5$$

$V_p = \{2\}$
Como la función lógica decía que:
Para todos los elementos de A se cumple la proposición $p(x)$, obviamente esto es FALSO, ya que sólo se cumple para un elemento.
Por lo tanto : $\forall x, x \in A, p(x) : 2x + 1 = 5$ es falso

Ejercicios

Determine el conjunto de validez y el valor de verdad para cada función lógica dada:
Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

a) $\forall\ x, x \in A,\ p(x) \quad : x + 2 \leq 1$

b) $\exists\ x, x \in A, q(x) \quad : |x| + 1 \geq 1$

c) $\exists!\ x, x \in A, r(x) \quad : x + 1 < 2$

d) $\forall\ x, x \in A,\ p(x) \quad : -x + 2 \leq 3$

e) $\exists\ x, x \in A, s(x) \quad : 3|x| - 1 \geq -1$

Respuesta

a) $V_p = \{-2, -1\}$

Valor de verdad : Falso

b) $V_q = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Valor de verdad : Verdadero

c) $V_r = \{-2, -1, 0\}$

Valor de verdad : Falso

d) $V_p = \{-1, 0, 1, 2\}$
Valor de verdad : Falso

e) $V_s = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Valor de verdad : Verdadero

Ahora, recurriremos a las tablas verdad vistas anteriormente, pero las llamaremos **Tablas de doble Entrada** para resolver las siguientes funciones lógicas:

Ejemplo

Determine el valor de verdad de:

$$\forall\ x, x \in A,\ p(x) \leftrightarrow [p(x) \rightarrow q(x)]$$

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ con :

$p(x) : 2x + 1 \leq 4$

$q(x) : x - 3 < x^2$

Respuesta:

Se construye la tabla de doble entrada de la forma siguiente:

	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \to q(x)$	$p(x) \leftrightarrow [p(x) \to q(x)]$
-1				
0				
1				
2				

Luego, se sustituyen los elementos de A, en cada una de las proposiciones, para determinar cuáles

de ellos cumplen con la proposición dada:

	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \to q(x)$	$p(x) \leftrightarrow [p(x) \to q(x)]$
-1	V	V	V	V
0	V	V	V	V
1	V	V	V	V
2	F	V	V	F

Conjunto de Validez $V_{(p,\, q)} = \{-1, 0, 1\}$
Valor de verdad: Falso

¿Y qué pasa si el conjunto es el de los números reales?

Veamos un ejercicio en el cuál el conjunto es el de los números reales.

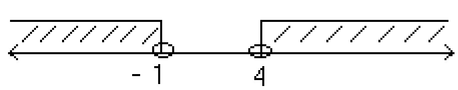
Ejemplo:

$\exists \; x, x \in \mathbb{R},\; x+1 < 0 \;\vee\; x - 3 > 1$

$i)$ Para determinar el Conjunto de Validez, se resuelven las inecuaciones y se determina la solución
Total:

$$x + 1 < 0 \qquad \vee \qquad x - 3 > 1$$
$$x < -1 \qquad \vee \qquad x > 4$$

Recuerda que los conjuntos soluciones en los reales se representan con intervalos.
La solución es :



Conjunto de validez : $\left]-\infty,\, -1\right[\, U \, \left]4,\, +\infty\right[$

$ii)$ Para determinar el Valor de verdad, se lee el cuantificador y se compara con el Conjunto de Validez.

Valor de Verdad : Verdadero

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios , determine:

a) Tabla de verdad
b) Conjunto de validez
c) Valor de verdad

1.− Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y la función proposicional:

$\exists\ x, x \in A, \sim p(x) \leftrightarrow [q(x) \wedge \sim r(x)]$

$p(x) : x^2 + 2x + 1 = 0$

$q(x) : x - 1 \geq 0$

$r(x) : \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}$

2.− Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la función proposicional:

$\exists\ x, x \in A, [(\sim q(x) \wedge \sim p(x)) \rightarrow r(x)]$

$p(x) : 2x + 1 \leq 4$

$q(x) : x + 3 > 0$

$r(x) : x$ es divisible por 2

3.− $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la función proposicional:

$\exists\ x, x \in A, p(x) \leftrightarrow [(\sim p(x) \vee r(x)) \rightarrow q(x)]$

$p(x) : x + 3 < 5$

$q(x) : x^2 + 1 \leq 3$

$r(x) : x > 0$

4.− $\exists\ x, x \in \mathbb{R},\ 2x+1 \leq 1 \wedge 2x - 3 < 5$

5.− $\exists!\ x, x \in \mathbb{R},\ x+2 \leq -1 \vee \frac{2x-3}{4} < 5$

6.− $\forall x, x \in \mathbb{R},\ 3x + 2 < -1 \wedge \frac{5x+7}{4} > -9$

<u>Respuesta</u>

1. –
a)

1

	$p\,(x)$	$q\,(x)$	$r(x)$	$\sim p(x)$	$\sim r(x)$	$q(x)\,\wedge\,\sim r(x)$	$\sim p(x)\,\leftrightarrow [\,1\,]$
-2	F	F	V	V	F	F	F
-1	V	F	V	F	F	F	V
0	F	F	V	V	F	F	F
1	F	V	V	V	F	F	F
2	F	V	V	V	F	F	F

b) $V_{(p,q,r)} = \{-1\}$

c) Verdadero

2. –
a)

1

	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$\sim p(x)$	$\sim q(x)$	$\sim q(x)\,\wedge\,\sim p\,(x)$	$1\,\rightarrow r(x)$
0	V	V	F	F	F	F	V
1	V	V	F	F	F	F	V
2	F	V	V	V	F	F	V
3	F	V	F	V	F	F	V
4	F	V	V	V	F	F	V

b) $V_{(p,q,r)} = \{0,1,2,3,4\}$

c) Verdadero

3. –

a) 1 2

	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$\sim p(x)$	$\sim p(x)\,\vee r(x)$	$1 \rightarrow q(x)$	$p\,(x) \leftrightarrow 2$
0	V	V	F	F	F	V	V
1	V	V	V	F	V	V	V
2	F	F	V	V	V	F	V
3	F	F	V	V	V	F	V
4	F	F	V	V	V	F	V

b) $V_{(p,q,r)} = \{0,1,2,3,4\}$
c) Verdadero

4) b) $V = \,]-\infty,\,0]$ c) Verdadero

5) b) $V = \,]-\infty,\,23/2[$ c) Falso

6) b) $V = \,]-\infty,\,-43/5[$ c) Falso

NEGACION DE PROPOSICIONES QUE CONTIENEN CUANTIFICADORES

Para negar una proposición cuantificada hay que cambiar el cuantificador y negar la función proposicional reduciéndola al máximo usando las leyes proposicionales.

Por ejemplo:

$\exists\, x\,,\ x\,\in A,\ p\,(\,x\,)\ \rightarrow\ q(x)$ A es un conjunto numérico cualquiera

La negación es : $\sim (\,\exists\, x\,,\ x\,\in A,\ p\,(\,x\,)\ \rightarrow\ q(x)\,)$

La negación de $\exists$ es $\forall$ **La negación de $\forall$ es $\exists$**

La negación de $p\,(\,x\,) \rightarrow q\,(x)$ la desarrollaremos aparte:

$$\sim\ [\,p\ \ \rightarrow q\ \ ]$$
$$\sim\ \ [\,\sim p\ \ \vee\ q\,]$$
$$p\ \ \wedge\ \sim q$$

Por lo tanto, la expresión negada de: $\exists\, x\,,\ x\,\in A,\ p\,(\,x\,)\ \rightarrow\ q\,(x)$ resulta :

$$\forall\, x\,,\ x\,\in A,\ p\,(x)\ \wedge\ \sim q\,(x)$$

¡¡Recuerda!! El conjunto A nunca se niega, es decir, que es incorrecto escribir:
$\boldsymbol{x \notin A}$

La negación de: $>$ es $\leq$; $<$ es $\geq$; $\wedge$ es $\vee$; $=$ es $\neq$ y viceversa.

<u>Ejercicios</u>

Sean las siguientes proposiciones, encuentre su negación:

1. – $\exists\, x\,,\ x\,\in A,\ \ p\,(\,x\,)\ \vee\ q\,(x)$

2. – $\forall\ x\,,\ x\,\in A,\ \sim p\,(\,x\,)\ \rightarrow\ q\,(x)$

3. – $\exists\, x\,,\ x\,\in A,\ [\,(\,\sim\ p\,(\,x\,)\ \vee\ q\,(x)\,) \rightarrow p\ (\,x)\,]$

4. – $\forall\, x\ \ , x\,\in \mathbb{R}\,,\ 2\,x + 1\ \leq 1\ \wedge\ 2x\ -\ 3\ < 5$

5. – $\exists\, x\,,\ x\,\in A,\ 5\,x\ \geq 1\ +\ x\ \ \vee\ \ 6\,x\ -1\ <\ -3$

<u>Respuesta</u>

1. – $\forall\ \ x\,,\ x\,\in A,\ (\,\sim\ p\,(\,x\,)\wedge\ \sim\ q\,(x)\,)$

2. – $\exists\ \ x\,,\ x\,\in A,\ (\,\sim p\,(\,x\,)\ \wedge\ \sim\ q\,(x)\,)$

3. – $\forall\ \ x\,,\ x\,\in A,\ \ \sim\ p\,(\,x\,)$

4. – $\exists\ \ x\ \ , x\,\in \mathbb{R}\,,\ 2\,x + 1 > 1\ \vee\ 2x\ -\ 3\ \geq 5$

5. – $\forall\, x\,,\ x\,\in A,\ 5\,x\ < 1\ +\ x\ \ \wedge\ \ 6\,x\ -1\ \geq\ -3$