Potencias

−Potencias:

$$a^n \quad a^m = a^{n+m}$$
$$a^n \quad a^m = a^{n-m}$$
$$\left(a^n\right)^m = a^{n\,m}$$
$$\frac{a}{b}^{\;n} = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\frac{a}{b}^{\;-n} = \frac{b}{a}^{\;n}$$
$$a^n = a \quad a \quad a\ldots.. \qquad n\ veces$$

−Propiedades:

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$Ejemplos:$

$$a)\left(-3\right)^4 = 81$$
$$b)3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$
$$c)\left(-2\right)^{-3} = \frac{1}{-2^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$
$$d)\ \frac{3}{4}^{\;-2} = \frac{4}{3}^{\;2} = \frac{16}{9}$$
$$e)\ -\frac{5}{7}^{\;3} = -\frac{125}{343}$$
$$f)\ -\frac{2}{9}^{\;-4} = \frac{9}{2}^{\;4} = \frac{6561}{16}$$

RADICALES

$$c\ \sqrt[n]{a}$$

c : coeficiente del radical

n : indice

a : radicando

Ejemplos :

$a)\ 5\sqrt[3]{14}$

$b)\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$c)\ \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$d)\ \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$

Multiplicación

$$\sqrt[n]{a}\ \ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\ \ b}$$

Ejemplos :

$a)\ \sqrt{3}\ \ \sqrt{2} = \sqrt{3\ \ 2}$

$b)\ \sqrt[3]{2}\ \ \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2}\ \ \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{4\ \ 27} = \sqrt[6]{108}$

$c)\ \sqrt[4]{7^3}\ \ \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[20]{7^{15}}\ \ \sqrt[20]{3^{16}} = \sqrt[20]{7^{15}\ \ 3^{16}}$

División

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos :

$a)\ \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{\frac{3}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$b)\ \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[4]{2^5}} = \frac{\sqrt[12]{5^8}}{\sqrt[12]{2^9}} = \sqrt[12]{\frac{5^8}{2^9}} = \sqrt[2]{\frac{5}{2^2}}$

$c)\ \frac{\sqrt[4]{x^2\ \ y^3}}{\sqrt[7]{x^4\ \ y}} = \frac{\sqrt[28]{x^{14}\ \ y^{21}}}{\sqrt[28]{x^{16}\ \ y^4}} = \sqrt[28]{\frac{x^{14}\ \ y^{21}}{x^{16}\ \ y^4}} = \sqrt[28]{\frac{y^{17}}{x^2}}$

Potencias

$$\left[\sqrt[n]{a}\right]^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{1/n\ \ m} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos :

$a)\ \left(\sqrt[7]{2}\right)^3 = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$

$b)\ \left(\sqrt[5]{3^2}\right)^2 = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$

Raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}$$

Ejemplos :

$a)\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = \sqrt[16]{2}$

$b)\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}} = \sqrt[30]{8}$

Racionalización

Ejemplos :

$a)\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\;\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$b)\ \dfrac{7}{2\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}\;\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2\;\;3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

$c)\ \dfrac{3}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{3}{\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{3}{\sqrt[4]{2^3}}\;\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{2}$

$d)\ \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\;\dfrac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\;\left(1-\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2-2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5^2}} = \dfrac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = \dfrac{2-2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$e)\ \dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\;\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3-2} = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

$f)\ \dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\;\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\;\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \dfrac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}} = \dfrac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a-b}$

Suma/Resta

$$a\sqrt[n]{c} \text{ y } b\sqrt[n]{c} \textit{ Son semejantes}$$

Solo se puede sumar si loss radicales son sejemantes

Ejemplos :

$a)3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$b) - 8\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = -11\sqrt[3]{5}$

$c)2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{50} = 2\sqrt{2^3} + 3\sqrt{3^2\;\;2} - 5\sqrt{5^2\;\;2} = 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 25\sqrt{2} = -12\sqrt{2}$

MONOMIOS

$$a \quad x^n$$
$$a = Coeficiente$$
$$x = Inc\ gnita$$
$$n = Grado, \quad N$$

$Ejemplos:$

$a) 3x^2$

$b) 7x^3$

$c) x$

$d) -3x$

$e) 8 \qquad Grado\ 0 \qquad 8 \quad x^0 = 8 \quad 1 = 8$

$f) 5xy^2 \qquad Grado\ 3 \qquad 2+1=3$

$g) x^2y^3 \qquad Grado\ 5$

$h) \dfrac{xy}{3} \qquad \dfrac{1}{3} \quad xy$

Multiplicación

$$(ax^n) \ (bx^m) = abx^{n+m}$$

$Ejemplos:$

$a) (4x^2) \ (-5x^6) = -20x^8$

$b) (5xy) \ (-5x^2y^4z) = -15x^3y^5z$

$c) 3(8x^3) = 24x^3$

División

$$\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b} \ \frac{x^n}{x^m} = \frac{a}{b} \quad x^{n-m}$$
$$n \quad m$$

$Ejemplo:$

$a) \dfrac{-12x^4}{3x} = -4x^3$

Potencia

$$(ax^n)^m = a^m \quad x^{nm}$$

$Ejemplo:$

$a) (-3x^3)^4 = 81x^{12}$

Suma/Resta

$$ax^n + bx^n = (a+b)x^n$$

Los monomios han de ser necesariamente semejantes(mismas inc gnitas y grados)

Ejemplos :

$a)(3x^2) + (2x^2) - (x^2) - (7x^2) + (5x^2) = 2x^2$

$b)5x^2 - x^3$ *No se puede hacer nada*

POLINOMIOS

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 3$$

Grado del polinomio: el grado del sumando con mayor grado en este caso 3

Termimino *independiente:* 3

Ejemplo :

$a)Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Suma/Resta

Agrupar los términos semejantes y Sumar/Restar

Ejemplos :

$$P(x) = x^3 - 2x + 3$$
$$Q(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 4$$
$$P(x) + Q(x) = (x^3 - 2x + 3) + (3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 4) = 3x^4 + 2x^2 + x + 7$$
$$P(x) - Q(x) = (x^3 - 2x + 3) - (3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 4) = -3x^4 + 2x^3$$

Multiplicación

$$P(x) = x^3 - 2x + 3$$
$$R(x) = \qquad x - 1$$

$$\quad -x^3 \qquad + 2x - 3$$
$$x^4 \qquad - 2x^2 + 3x$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$

Potencia de un polinomio

$$P(x)^n = P(x) \;\; P(x) \;\; P(x)...... \qquad n \text{ veces}$$

$$(a+b)^n$$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Triangulo de Tartaglia (cociente de las potencias de un polinomio)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

División de polinomios

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 1$$
$$Q(x) = x^2 - 1$$
$$P(x) : Q(x)$$

$3x^4 + 2x^3 - x^2 + 7x - 1$
$: \quad x^2 - 1$

$-3x^4 \quad + 3x^2$
$3x^2 + 2x$
+2

$0 \quad + 2x^3 + 2x^2 + 7x - 1$

$-2x^3 \quad + 2x$

$0 \quad + 2x^2 + 9x - 1$

$-2x^2 \quad + 2$

$0 \quad + 9x + 1$

Dividendo =divisor + cociente + resto

$x^2 - x - 2$
$: x - 2$

$-x^2+2x$
$x+1$

$0+x-2$

$-x+2$

$0+0$

$x^2-x-2=(x-2)\ (x+1)$
x^2-x-2 *es m ltip lo de x-2*
x^2-x-2 *es m ltip lo de* $x+1$
$x-2$ *es divisor de* x^2-x-2
$x+1$ *es divisor de* x^2-x-2

Regla De Ruffini

$\frac{P(x)}{x-a}$ *Permite dividir un polinomio cualquiera, de grado mayor o igual que* 1, *entre el binomio x-a*
Se colocan los cocientes de todos los terminos, *cuando no haya ninguno, se coloca un* 0(*tambien se incluye el* termino *independiente pese a que no tenga inc g nita.*
se crea la caja y en la esquina izquierda se pone el valor de x en el binomio x-a, osea $x=a$
Ejemplo :
$a)x^2-x-2:x-2$

$1-1-2$

$x=2 \quad +2+2$

$1+1 \quad 0$

El resto es 0 *por lo* tan*to obtenemos dos divisores x-*2(*el primero que nos daban)y el segundo es el resultad de la divisi n (si l os cocientes son* 1 *y* 1 *y el polinomio principal esta elevado a* 2 *significara que este estara elevado a* 1)$x+1$

Factorización

Factorizar un polinomio es buscar una serie de polinomios divisores .

P(x), a R, a es raiz de P(x) si P(a) es igual a 0

Ejemplos:

$P(x) = x^2 - x - 2$, *di si* $x = 0,1,3,2,-1$ *son raizes de P(x).*

$P(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2$ *No es raiz*

$P(1) = 1^2 - 1 - 2 = -2$ *No es raiz*

$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$ *Es raiz de P(x)*

$P(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4$ *No es raiz*

$P(-1) = -1^2 - (-1) - 2 = 0$ *Es raiz de P(x)*

Un polinomio de grado (m) tiene a lo sumo (m)raices reales

− Si "a" es raiz de P(x) x-a es divisor de P(x)

$(x-2)\,y\,(x+1)$ *son divisores de* $x^2 - x - 2$

Teorema del resto

Si se le da un valor a la x en un polinomio se obtiene el resto, de lo que si sustituimos la x por un valor y el resto da 0 *podemos asegurar que* (a) *es raiz de ese polinomio por lo tanto* $(x-a)$ *es divisor del mismo*

Ejemplo:

$a) P(x) = x^2 - x - 2$

$P(1) = 1^2 - 1 - 2 = -2$, *sabemos que al dividir el polinomio* $P(x) = x^2 - x - 2$ *entre* $x - 1$ *nos da resto* -2

$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$, *sabemos que al dividir el polinomio* $P(x) = x^2 - x - 2$ *entre* $x - 2$ *nos da resto* 0 *por lo tanto* 2 *es raiz del polinomio y x-2 es divisor del mismo*

Polinomios primos

Un polinomio es primo cuando es divisor de el mismo o una constante

Los polinomios de grado 1 *o* 0 *son primos*

Ejemolo: $(x-2)$

Factorizar

$-$ *Factorizar un polinomio es* exp *resarlo como producto de polinomios*

Pasos :

1)*Sacar factor com n* :

$P(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x = 2x(x^2 - 2x + 3)$

2)*Identificar el polinomio con a* lg *una identidad notable:*

$a)\, P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$b)\, Q(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

$c)\, R(x) = x^2 - 4 = (x-2)\ \ (x+2)$

$d)\, S(x) = 4x^2 - 9 = (2x-3)\ \ (2x+3)$

3)*Buscar divisores de la forma* $(x-a)$:

$-$ *Si un polinomio con coeficientes enteros tiene a* lg *una raiz entera entonces la raiz es divisor del ter* min *o independiente:*

$P(x) = x^2 + 5x + 6$

$Div. = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$

Fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ejemplos :

$a)\, \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

$b)\, \dfrac{1}{x}$

$c)\, \dfrac{x + 1}{x}$

$d)\, \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 3x + 4}$

Fracciones algebraicas equivalentes

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)} \qquad P(x)\ \ S(x) = Q(x)\ \ R(x)$$

Ejemplo :

$\dfrac{x + 1}{x^2 - 2} = \dfrac{2x + 2}{2x^2 - 4}$

Suma/Resta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \quad Q(x)}{Q(x)}$$

$Ejemplos:$

$$a)\ \frac{2x+3}{x-1} + \frac{5x-2}{x-1} = \frac{7x+1}{x-1}$$

$$b)\ \frac{x^2+2x-3}{x^2+8} - \frac{5x^3-x^2+2x-4}{x^2+8} = \frac{-5x^3+2x^2-4}{x^2+8}$$

$$c)\ \frac{5x+2}{x^2-1} + \frac{x-3}{x-1}$$

$$a^n \ \ a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \ \ a^m = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a}{b}^{\;n} = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a}{b}^{\;-n} = \ \frac{b}{a}^{\;n}$$