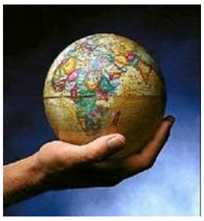
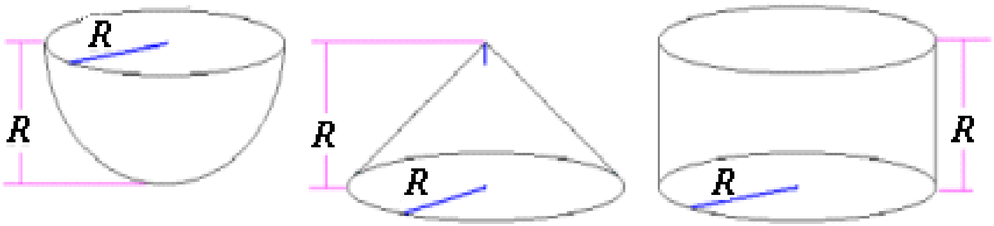
VOLUMEN DE UNA ESFERA

Desde que se descubrió que la Tierra era redonda, el hombre detallo las características físicas de nuestro planeta (el volumen, el área, el diámetro, la masa, la densidad, etc.) gracias a estudios que ya se habían realizado por diferentes matemáticos. Uno de esos matemáticos fue Arquímedes quien calculo el volumen de una esfera. Este método es simple e ingenioso a la vez. Veamos cómo lo consiguió:



- **Arquímedes imagino una semiesfera, un cono recto y un cilindro, tales que todos tuvieran altura R y radio R**.



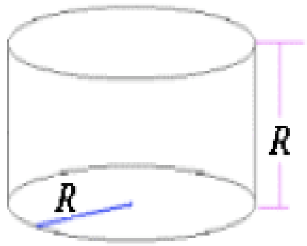
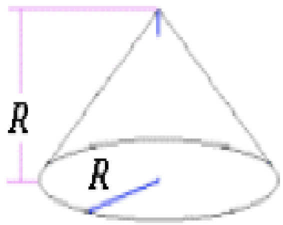
Nosotros ya sabemos calcular los volúmenes de un cilindro y de un cono.
¿Cómo son? ¿El del cilindro y el del cono?

¿Cuál sería el volumen del cilindro de altura R y radio R?

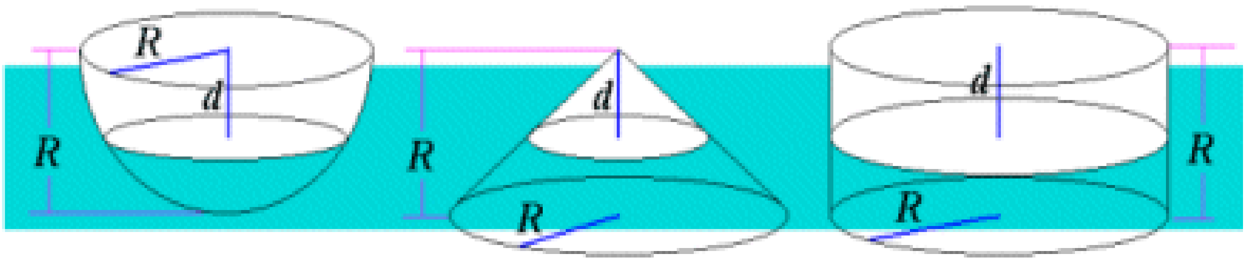
$$V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot R = \pi R^3$$

Y ¿Cuál sería el volumen del cono de altura R y radio R?

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3$$

CILINDRO	CONO
Radio *R* y altura *R* 	Radio *R* y altura *R* 
$V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot R = \pi R^3$	$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3$

✐ **Luego Arquímedes cortó las figuras con un plano paralelo a la base del cilindro y del cono, y a una distancia *d* de la parte superior de las figuras.**

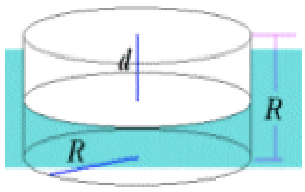


Y se preguntó ¿cómo serían las secciones determinadas por este plano en la semiesfera, el cono y el cilindro?

✐ **La sección del cilindro**

¿Cómo es la sección que determina el plano en el cilindro?

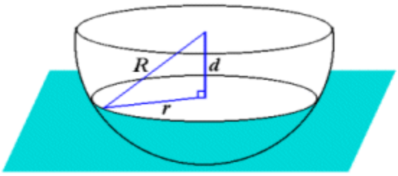
En el cilindro la sección que determina el plano es un círculo de radio R.



¿Cuál será el área de esa sección (del circulo)?

$$A_{sec.\ cilindro} = \pi \cdot R^2$$

✐ La sección de la semiesfera



¿Cómo es la sección que determina el plano en la semiesfera?

La sección circular que determina el plano que corta a la semiesfera, tiene un radio r

(r < R) que depende de la distancia d.

¿Cuál será el área de esa sección (del circulo)?

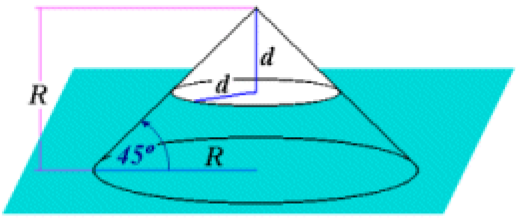
$$A_{sec.esfera} = \pi \cdot r^2$$

¿Qué relación se puede obtener en la semiesfera?

¿Sabemos que el plano corta a la semiesfera a una distancia d? Y que el radio de la sección circular que se determina el plano tiene radio r**.** Entonces podemos formar un triangulo rectángulo donde uno de sus catetos es d y el otro es r**.** ¿Cuánto valdría su hipotenusa? Si consideramos el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de lados R, d y r se cumple que:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

✐ La sección en el cono



¿Cómo es la sección que determina el plano en el cono?

¿Qué altura y radio basal tiene el cono recto?

Si se considerara un triangulo por dicho radio basal, altura y la pared del cono es rectángulo ¿cómo sería este triangulo? Si aplicamos semejanza de triángulos ¿Cuánto mediría el radio del círculo que determina el plano que corta al cono?

¿Cuál será el área de esta sección?

$$A_{sec.cono} = \pi \cdot d^2$$

Hasta el momento **¿Qué sabemos?**

$A_{sec.\ cilindro} = \pi \cdot R^2$

$A_{sec.semi\,esfera} = \pi \cdot r^2$

$$A_{sec.cono} = \pi \cdot d^2$$

Pero de la semiesfera obtuvimos que:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

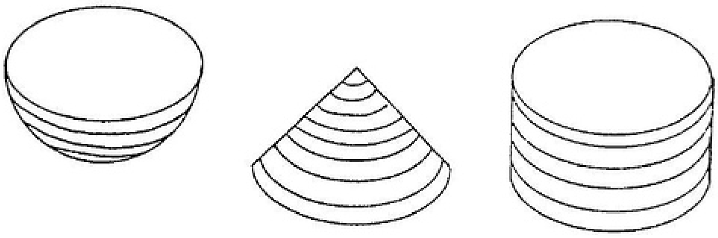
¿Nos servirá de algo esta relación? ¿Qué podríamos hacer con ella?

¿Si la reemplazamos en el área del cilindro? ¿Remplazaríamos R^2 por $r^2 + d^2$?

¿Quedando?

$$\begin{aligned} A_{sec.\ cilindro} &= \pi \cdot R^2 \\ &= \pi \cdot (r^2 + d^2) \\ &= \pi \cdot r^2 + \pi \cdot d^2 \\ &= A_{sec.\ semi\,esfera} + A_{sec.cono} \end{aligned}$$

Como d es un valor arbitrario, entonces esto ocurriría para cualquier valor de ***d***, por lo tanto, si consideramos las secciones como rebanadas finas, para cada trío de rebanadas tendríamos que:



Rebanada cilindro = rebanada esfera + rebanada cono

Considerando la relación anterior, aplicamos el Teorema de Cavalieri, tenemos

$$V_{cilindro} = V_{semi\,esfera} + V_{cono}$$

Reemplazamos

$$\pi \cdot R^3 = V_{\text{semi esfera}} + \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$$

Despejando

$$\begin{aligned} V_{\text{semi esfera}} &= \pi \cdot R^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi \cdot R^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de la **esfera** es el doble de la semiesfera.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\,\pi \cdot R^3$$

Así de sencillo y original demostró Arquímedes el volumen de una esfera. Tanto le impresionó esto a él mismo que mandó que en su tumba se grabase esta figura en recuerdo de la mejor de sus ideas.