CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

13. Dos problemas fundamentales de la Geometría analítica. En este capítulo haremos un estudio preliminar de *dos problemas fundamentales* de la Geometría analítica.

I. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.

II. Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

El lector observará que estos problemas son esencialmente inversos entre sí. Estrictamente hablando, sin embargo, ambos problemas están tan estrechamente relacionados que constituyen juntos el problema fundamental de toda la Geometría analítica. Por ejemplo, veremos más adelante que, después de obtener la ecuación para una condición geométrica dada, es posible, frecuentemente, determinar por un estudio de esta ecuación posteriores características geométricas y propiedades para la condición dada. Nuestro propósito al considerar inicialmente separados los dos problemas no es de mucha necesidad sino, más bien, de conveniencia; de esta manera tenemos que enfocar nuestra atención sobre un número menor de ideas a la vez.

14. Primer problema fundamental. Gráfica de una ecuación. Supongamos que se nos da una ecuación de dos variables, x y y, que podemos escribir, brevemente, en la forma

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

En general, hay un número infinito de pares de valores de x y y que satisfacen esta ecuación. Cada uno de tales pares de valores *reales* se toma como las *coordenadas* (x, y) *de un punto en el plano*. Este convenio es la base de la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1. El conjunto de los puntos, y *solamente* de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación (1), se llama *gráfica de la ecuación* o, bien, su *lugar geométrico*.

Otro concepto importante está dado por la

DEFINICIÓN 2. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1) *pertenece a la gráfica de la ecuación*.

No debe insistirse mucho en aquello de que *solamente* aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación pertenecen a su lugar geométrico. Lo importante es que si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente, si un punto está sobre la gráfica de una ecuación, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Esto es, evidentemente, el enunciado de una condición necesaria y suficiente (Art. 9). Como las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas por su ecuación tales puntos estarán localizados, en general, en posiciones tales que, tomadas en conjunto, formen un trazo definido llamado curva, gráfica, o lugar geométrico.

Como ejemplo de las notas precedentes consideremos la ecuación

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \tag{2}$$

Dando diversos valores a x y calculando los valores correspondientes de y, obtenemos los pares de valores que figuran en la tabla. Cada par de valores correspondientes, tomado como las coordenadas de un punto, nos permite trazar varios puntos, tal como se muestra en la figura 20.

En Algebra se estudia el trazado de gráficas del tipo (2). El procedimiento consiste en trazar un cierto número de puntos y dibujar una línea continua que pasa por todos ellos, tal como está indicado en la figura 20. Pero, al hacer esto, se supone que la gráfica entre dos puntos sucesivos cualesquiera tiene la forma de la curva continua que se dibuja uniendo los puntos. Aunque esto es verdadero para la gráfica particular que estamos considerando, no es verdadero para las gráficas de todas las ecuaciones. Por tanto, bajo este supuesto, podemos introducir muchos errores en el trazado de la gráfica *entre* dos de sus puntos. Para evitar errores de este tipo, debemos hacer una investigación preliminar de la ecuación para ciertas características *antes* de proceder al trazado de la curva. Esto se llama *discutir la ecuación* y se describirá en los artículos que siguen inmediatamente al presente.

El lector no debe creer que toda ecuación del tipo (1) tiene, necesariamente, una gráfica. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4 = 0 \tag{3}$$

se satisface para un número infinito de pares de valores de x y y, pero en ningún caso son *ambos* valores números *reales*. Por esto no se puede trazar ningún punto cuyas coordenadas satisfagan esta ecuación, ya que estamos restringidos a puntos cuyas coordenadas sean *ambas números reales*. Decimos entonces que (3) *no tiene gráfica* en el sistema coordenado rectangular *real* que estamos empleando.

x	y
0	0
1	8
2	6
3	0
4	−4
5	0
6	18
−1	−24

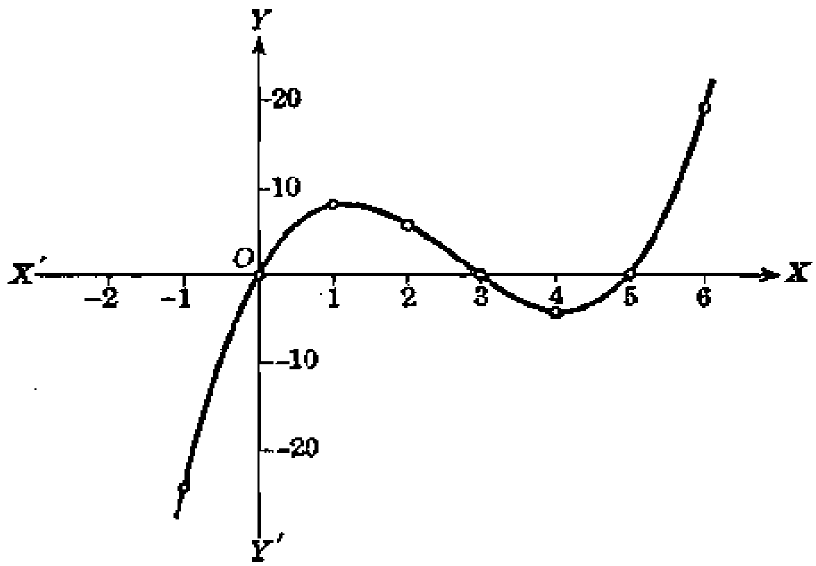

Fig. 20

Otro ejemplo es la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{4}$$

en donde, $x = 0$, $y = 0$ es el único par de valores reales que la satisfacen. En este caso, en nuestro sistema coordenado rectangular real, la gráfica de la ecuación (4) es un solo punto, el origen.

15. Intercepciones con los ejes. El primer punto que estudiaremos en relación con la discusión de una ecuación es el de las *intercepciones* de la curva con los ejes coordenados.

DEFINICIONES. Llamaremos *intercepción* de una curva con el eje X a la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje. Análogamente, la intercepción con el eje Y es la ordenada del punto de intersección de la curva con dicho eje. *

El método para obtener la intercepciones es evidente a partir de la definición. Como la intercepción con el eje X es la abscisa de un

* N. DEL T. Muchos autores llaman intersecciones a las intercepciones sobrentendiendo que al decir punto de intersección se quiere indicar abscisa u ordenada del punto.

punto que está sobre el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero. Por tanto, haciendo $y = 0$ en la ecuación de la curva, las soluciones reales de la ecuación resultante en x nos darán las intercepciones con el eje de las X. Análogamente, haciendo en la ecuación $x = 0$, las soluciones reales de la ecuación resultante en y nos darán las intercepciones con el eje Y.

Como ejemplo del método, consideremos la ecuación (2) del Artículo 14:

$$y = x^3 - 8x^2 + 15x. \qquad (1)$$

Para $y = 0$, esta ecuación se reduce a

$$x^3 - 8x^2 + 15x = 0,$$

de donde,

$$x(x - 3)(x - 5) = 0,$$

y las raíces son

$$x = 0,\ 3,\ 5.$$

Por tanto, las intercepciones de (1) con el eje X son 0, 3, 5. Para $x = 0$ en (1), $y = 0$, de manera que la intercepción con el eje Y es 0. Todas estas intercepciones están indicadas en la figura 20 del Artículo 14.

16. Simetría. El segundo punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es la *simetría* de la curva que representa, con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen.

DEFINICIÓN 1. Se dice que dos puntos son *simétricos con respecto a una recta* si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

La recta con respecto a la cual son simétricos los dos puntos se llama *eje de simetría*. Así, en la figura 21, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al eje de simetría l si la recta l es perpendicular al segmento AB en su punto medio.

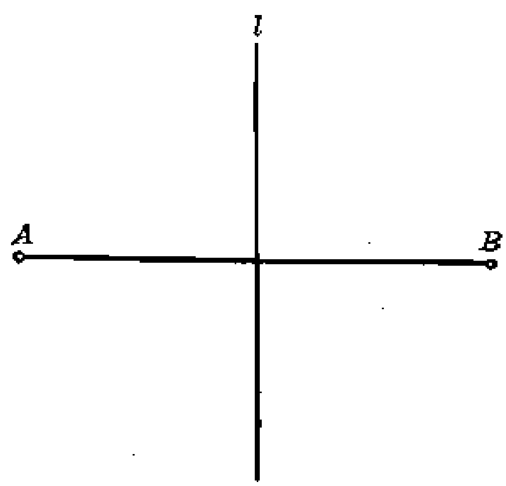

Fig. 21

DEFINICIÓN 2. Se dice que dos puntos son *simétricos con respecto a un punto* O si O es el punto medio del segmento que los une.

El punto O se llama *centro de simetría*. Así, en la figura 22, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al centro de simetría O siempre que O sea el punto medio del segmento AB.

Ahora vamos a extender las definiciones 1 y 2 hasta incluir la simetría de una curva plana completa con respecto a una línea o un punto.

Definición 3. Se dice que una curva es *simétrica con respecto a un eje de simetría* cuando para *cada* punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto al eje.

Definición 4. Se dice que una curva es *simétrica con respecto a un centro de simetría* O cuando para *cada* punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto a O.

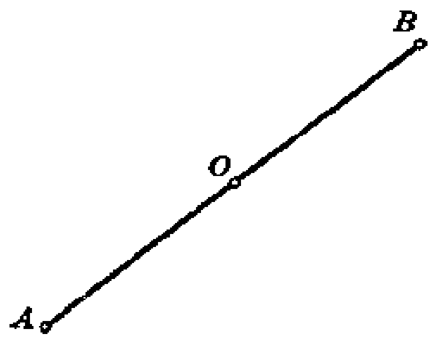

Fig. 22

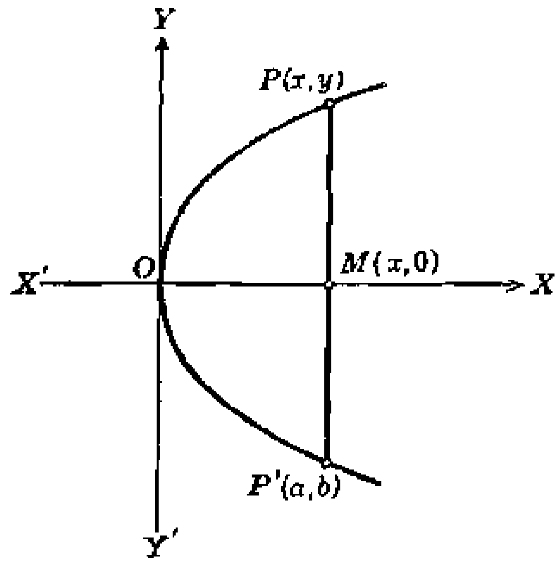

Fig. 23

Todas las definiciones anteriores son puramente geométricas. Ahora interpretaremos estas definiciones analíticamente, usando los ejes coordenados como ejes de simetría y el origen como centro de simetría.

a) *Simetría con respecto al eje* X. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (fig. 23). Si esta curva es simétrica con respecto al eje X, de la definición 3 se deduce que debe haber otro punto $P'(a, b)$ sobre la curva, tal que el segmento PP' queda bisecado perpendicularmente por el eje X. Sea M el punto medio de PP'; sus coordenadas son, evidentemente, $(x, 0)$. Entonces, por las fórmulas del punto medio dadas en el corolario del teorema 3, Art. 7, tenemos

$$x = \frac{a + x}{2}, \quad 0 = \frac{b + y}{2},$$

de donde $a = x$ y $b = -y$. Por tanto, las coordenadas de P' son $(x, -y)$. Pero, como P' está sobre la curva, de la definición 1, Artículo 14, se deduce que sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación de la curva. Es decir, una ecuación $f(x, y) = 0$ que se satisface para las coordenadas (x, y) de P se satisface también para las coordenadas $(x, -y)$ de P' siempre que la curva sea simétrica respecto al eje X. Este resultado se enuncia como sigue:

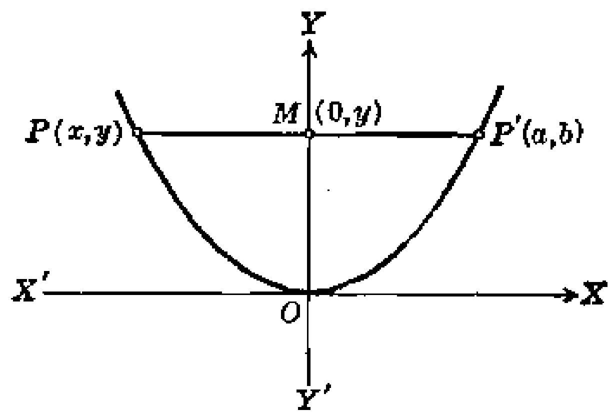

Fig. 24

TEOREMA 1. *Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable* y *es reemplazada por* $-$ y, *la curva es simétrica con respecto al eje* X.

NOTA. El recíproco del teorema 1 también es verdadero. La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

Un ejemplo sencillo del teorema 1 es la curva cuya ecuación es $y^2 = x$. Se deja como ejercicio al estudiante la construcción de esta curva, que es una parábola.

b) *Simetría con respecto al eje* Y. Usando la figura 24, podemos establecer un teorema análogo al teorema 1 para la simetría de una curva con respecto al eje Y. La demostración se deja como ejercicio al estudiante.

TEOREMA 2. *Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable* x *es reemplazada por* $-$ x, *la curva es simétrica con respecto al eje* Y, *y recíprocamente.*

Un ejemplo sencillo del teorema 2 es la curva cuya ecuación es $y = 2x^2 + 1$. Se deja al estudiante el trazado de esta curva.

c) *Simetría con respecto al origen.* Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (fig. 25). Para que esta curva sea simétrica con respecto al origen O, de la definición 4 se deduce que debe haber otro punto $P'(a, b)$, sobre la curva, tal que O sea el punto medio del segmento PP'. Por las fórmulas del punto medio tenemos

$$0 = \frac{x + a}{2}, \quad 0 = \frac{y + b}{2},$$

de donde $a = -x$ y $b = -y$, de manera que las coordenadas de P' son $(-x, -y)$. Como P' está sobre la curva, sus coordenadas $(-x, -y)$ deben satisfacer la ecuación de la curva. Por tanto, para que haya simetría con respecto al origen, la ecuación del lugar

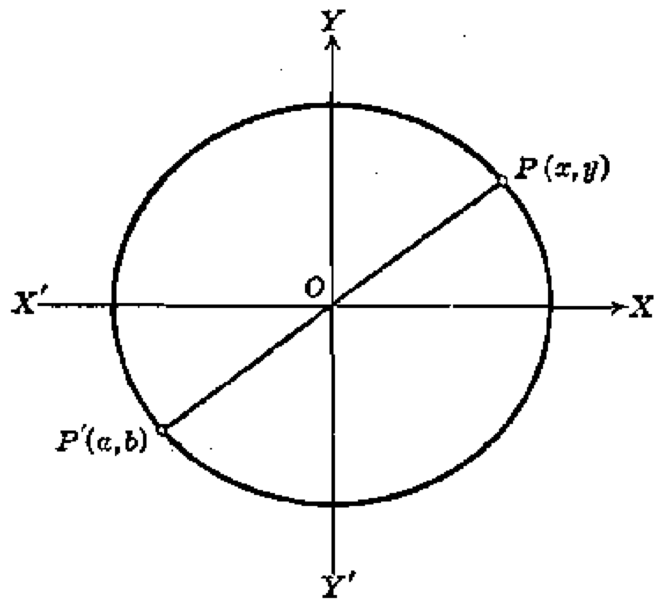

Fig. 25

geométrico no debe alterarse al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$. El recíproco de este enunciado también es verdadero y puede demostrarse. Estos resultados nos dan el

TEOREMA 3. *Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar las variables* x *y* y *por* $-$ x *y* $-$ y, *respectivamente, la curva es simétrica con respecto al origen; y recíprocamente.*

Un ejemplo sencillo del teorema 3 es la curva $y = x^3$. Se recomienda al estudiante la construcción de esta curva. Se llama *parábola cúbica*

NOTA. Si comparamos los teoremas 1, 2 y 3 veremos que, si una curva es simétrica con respecto a *ambos* ejes coordenados, es también simétrica con respecto al origen. Pero el recíproco no es necesariamente verdadero. Por ejemplo, la curva cuya ecuación es $xy = 1$ es simétrica con respecto al origen, pero no es simétrica con respecto a ninguno de los ejes coordenados. Se recomienda al estudiante la construcción de la gráfica de esta ecuación que se llama *hipérbola equilátera*.

17. Extensión de una curva. El tercer punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es el estudio de la *extensión* de la curva. Con este término queremos expresar la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de x y y son valores reales. Esta información es útil por dos razones: 1) Da la localización general de la curva en el plano coordenado. 2) Indica si la curva es cerrada o si es de extensión indefinida.

x	y
0	0
1	± 1
2	± 2.8
3	± 5.2

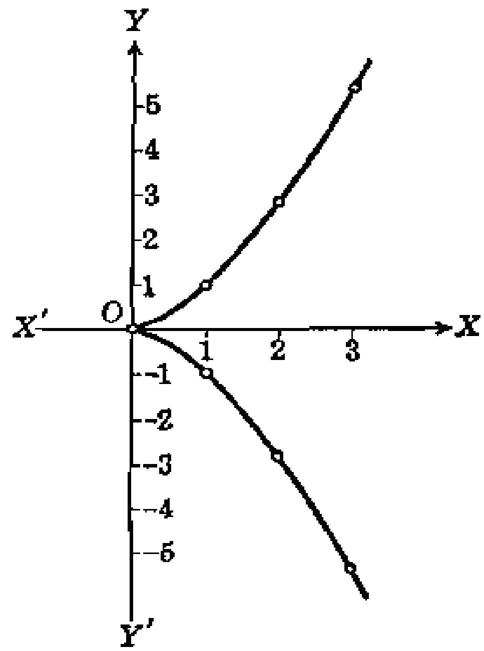

Fig. 26

Los intervalos para los cuales los valores de x y y son reales se determinan, simplemente, resolviendo la ecuación dada para y, en términos de x, y para x en términos de y.

Ejemplo. Discutir la ecuación $y^2 = x^3$, estudiando las intercepciones, simetría y extensión de la curva. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. *a) Intercepciones.* Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto de intersección con los ejes coordenados es el origen.

b) Simetría. Si se sustituye y por $-y$, la ecuación no se altera. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje X. Si sustituimos x por $-x$, la ecuación se altera; por tanto, la curva no es simétrica con respecto al eje Y. Si se sustituyen x y y por $-x$ y $-y$, respectivamente, la ecuación también cambia; luego, la curva no es simétrica con respecto al origen.

c) *Extensión*. Despejando y en función de x, obtenemos

$$y = \pm\sqrt{x^3}. \tag{1}$$

Vemos inmediatamente que y es compleja si x es negativa; por tanto, todos los valores negativos de x quedan excluídos. Esto significa que ninguna porción de la curva está a la izquierda del eje Y. En cambio, pueden tomarse todos los valores positivos de x.

Despejando x en función de y, obtenemos

$$x = y^{2/3}.$$

Evidentemente, y puede tomar todos los valores positivos y negativos. Esto, agregado al hecho de que todos los valores positivos de x son admisibles, indica que la curva se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia ambos lados, arriba y abajo, del eje X. Por tanto, la curva no es cerrada.

Finalmente, por medio de (1), calculamos unos cuantos pares de valores para x y y como los que aparecen en la tabla. La curva es la trazada en la figura 26. Es una *parábola semicúbica*.

EJERCICIOS. Grupo 5

En cada uno de los ejercicios 1-25 discútase la ecuación estudiando las intercepciones, simetría y extensión. Después trácese la gráfica correspondiente.

1. $5x + 4y - 20 = 0$.
2. $3x - 2y = 0$.
3. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$.
4. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$.
5. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$.
6. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.
7. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.
8. $16x^2 - y = 0$.
9. $16y^2 - x = 0$.
10. $x^2 - y^3 - 9 = 0$.
11. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9$.
12. $8x^3 - y = 0$.
13. $x^3 - x - y = 0$.
14. $x^4 - 9x^2 - y = 0$.
15. $x - y^4 + 9y^2 = 0$.
16. $x^2 - y^3 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
18. $x^2 - 6x + y^2 = 0$.
19. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$
20. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.
21. $x^2 + 4x + 3y + 1 = 0$.
22. $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$.
23. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.
24. $4x^2 - y^2 - 2y = 2$.
25. $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$.
26. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 1, Artículo 16.
27. Demostrar el teorema 2, Artículo 16.
28. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 3, Artículo 16.
29. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera cuando se intercambian las variables x y y, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes I y III.
30. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera al sustituir la variable x por $-y$ y la variable y por $-x$, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes II y IV.

18. Asíntotas. El cuarto punto que consideraremos, en relación con la discusión de una ecuación, es la determinación de las asíntotas que la curva pueda tener.

Definición. Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva.

Esta definición implica dos cosas: 1) una curva que tiene una asíntota no es cerrada o de extensión finita, sino que se extiende indefinidamente; 2) una curva se aproxima a la asíntota más y más a medida que se extiende más y más en el plano coordenado.

Siendo la asíntota una línea recta, puede tener una cualquiera de tres posiciones particulares. Si es paralela o coincide con el eje X, se llama *asíntota horizontal;* si es paralela o coincide con el eje Y, *asíntota vertical;* y si no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, *asíntota oblicua*. Aquí consideraremos solamente la determinación de asíntotas verticales y horizontales. Posteriormente veremos la determinación de asíntotas oblicuas para una curva particular conocida con el nombre de hipérbola.

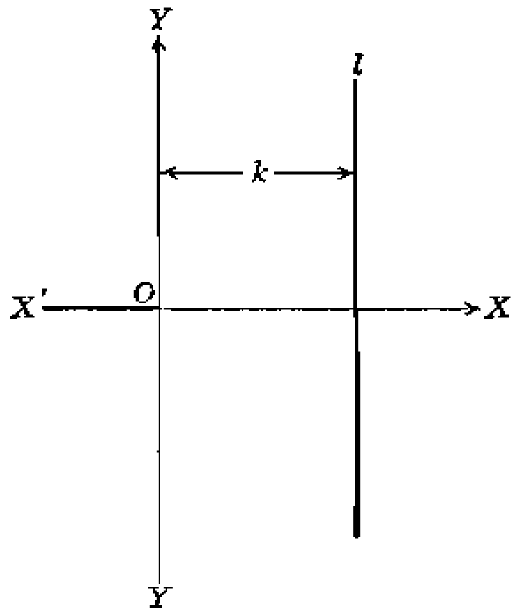

Fig. 27

El estudiante debe tener presente que una curva no tiene necesariamente una o más asíntotas. Hay muchas curvas que no tienen asíntotas. Sin embargo, si una curva tiene asíntotas, su determinación será, como veremos, una gran ayuda para construir su gráfica.

En el capítulo siguiente haremos un estudio detallado de la ecuación general de la recta. Pero ahora tenemos necesidad de saber hallar ecuaciones de asíntotas verticales y horizontales. Para ello sea l (fig. 27) una recta cualquiera paralela al eje Y y que dista k unidades del eje. Todo punto de l, cualquiera que sea el valor de su ordenada, tiene una abscisa igual a k. Las coordenadas de todos los puntos de l satisfacen, por tanto, la ecuación $x = k$. Recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación es un punto cuya abscisa es k y situado, por tanto, a una distancia de k unidades del eje Y, y, en consecuencia, está sobre la recta l.

De aquí que la ecuación de l es $x = k$. Por un razonamiento análogo hallamos que $y = k$ es la ecuación de una recta paralela al eje X, a k unidades del eje.

Vimos (Art. 17) que se puede determinar la extensión de una curva despejando y en función de x y x en función de y. Para obtener las asíntotas verticales y horizontales, usaremos estas mismas ecuaciones en las que aparecen despejadas las variables.

Ejemplo. Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la curva cuya ecuación es

$$xy - y - 1 = 0. \qquad (1)$$

Solución. Despejando y en función de x, resulta

$$y = \frac{1}{x-1}. \qquad (2)$$

Según la ecuación (2) y no está definida para $x = 1$. Sin embargo, si se le asigna a x un valor que sea ligeramente mayor que 1, vemos que y toma un valor positivo muy grande; y si se le da a x un valor ligeramente menor que 1, resulta que y toma un valor negativo numéricamente muy grande. En cualquiera de estos dos casos, obtenemos un punto de la curva para el cual la abscisa tiene un valor muy aproximado a 1 y la ordenada es, numéricamente, muy grande. A medida que x se aproxima al valor 1, el valor absoluto de y se hace mayor que cualquier número por grande que se le suponga. Bajo estas condiciones la curva se extiende indefinidamente lejos y se aproxima a una recta cuyos puntos tienen todos la propiedad común de que su abscisa es igual a 1. La ecuación de dicha recta es, evidentemente, $x = 1$, y, de acuerdo con nuestra definición de asíntota, es la ecuación de una asíntota vertical. Este resultado se obtiene simplemente igualando a cero el denominador $x - 1$ de la ecuación (2).

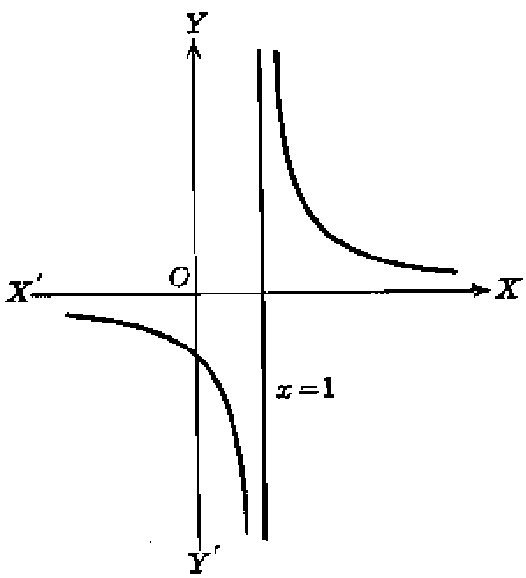

Fig. 28

Despejando de (1) el valor de x en función de y se obtiene

$$x = \frac{y+1}{y}. \qquad (3)$$

Aplicando precisamente el mismo argumento a (3), obtenemos $y = 0$, o sea, el eje X, como asíntota horizontal. La gráfica de (1) se muestra en la figura 28. Se llama una *hipérbola*.

NOTAS. 1. Una curva puede tener más de una asíntota vertical u horizontal. Así, la curva cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

tiene dos asintotas verticales, $x = 1$ y $x = 2$.

2. La discusión anterior sugiere un método general para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales. Para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales, resuélvase la ecuación dada para y en función de x e iguálese a cero cada uno de los factores lineales del denominador; estas son las ecuaciones buscadas. Análogamente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales, resuélvase la ecuación dada para x en función de y e iguálese a cero cada uno de los factores lineales del denominador.

3. Para muchas ecuaciones en las variables x y y, veremos que, frecuentemente, es ventajoso investigar el comportamiento de una de las variables cuando a la otra se le dan valores cada vez más grandes en valor absoluto. Esto es particularmente útil para la determinación de las asíntotas. Asi, para la ecuación (2) de nuestro ejemplo,

$$y = \frac{1}{x-1},$$

si damos valores a x cada vez más grandes, en valor absoluto, el valor de y se aproxima a cero. Es decir, a medida que el punto sobre la curva se aleja indefinidamente del origen, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, la curva se aproxima a la recta $y = 0$ que, por lo tanto es una asíntota horizontal.

Análogamente, si escribimos la ecuación (3) en la forma

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

vemos que, a medida que y toma valores cada vez mayores en valor absoluto, x se aproxima a 1. Por tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical.

4. El estudiante debe observar la ventaja de usar las asíntotas de una curva, cuando existen, en el trazado de la curva. Las asíntotas actúan como *líneas guía* de la gráfica.

19. Construcción de curvas. La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituyen, en conjunto, un problema de tan gran importancia en todas las ramas de la Matemática y sus aplicaciones, que se le ha dado el nombre especial de *construcción de curvas*. Dedicaremos el presente artículo a hacer un resumen de los resultados obtenidos en los artículos inmediatamente precedentes. Desde nuestro punto de vista, el trazado de una curva constará de los seis pasos siguientes:

1. Determinación de las intercepciones con los ejes coordenados.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.
3. Determinación de la extensión de la curva.

4. Determinación de las ecuaciones de las asíntotas verticales u horizontales que la curva puede tener.

5. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.

6. Trazado de la curva.

Ejemplo 1. Construir la curva cuya ecuación es

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0. \qquad (1)$$

Solución. 1. *Intercepciones.* Para $y = 0$, $x = 0$; para $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto de intersección con los ejes coordenados es el origen.

x	y
0	0
0,25	$\pm$ 0,14
0,5	$\pm$ 0,5
0,75	$\pm$ 1,3

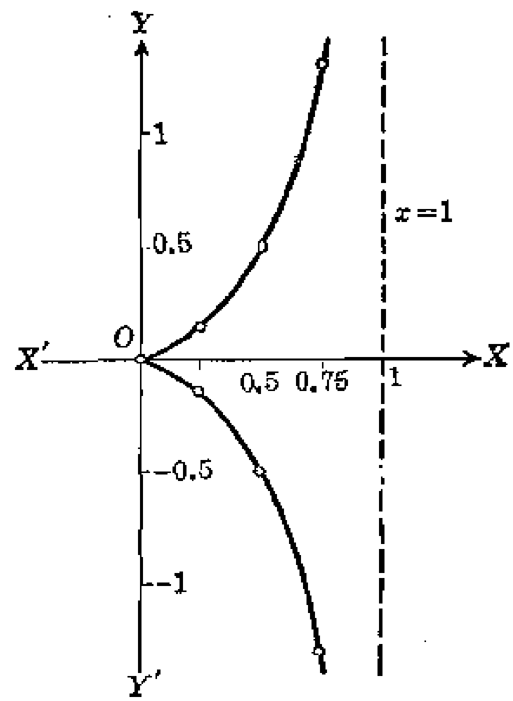

Fig. 29

2. *Simetría.* La ecuación dada solamente no se altera en el caso en que y es reemplazada por $-y$. Por tanto, la única simetría de la curva es con respecto al eje X.

3. *Extensión.* Despejando y en función de x, resulta

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}. \qquad (2)$$

De (2) vemos que y es compleja cuando x es negativa. Por tanto, todos los valores negativos de x quedan excluídos; según esto no hay curva a la izquierda del eje Y. Además, y no está definida para $x = 1$ y es compleja para todos los valores de x mayores que 1. Por tanto, los valores de x para los cuales y está definida y es real, están dados por el intervalo de variación

$$0 \leq x < 1. \tag{3}$$

El despejar x en función de y no se puede efectuar fácilmente ya que es una ecuación cúbica en x. Sin embargo, en (2) vemos que y puede tomar todos los valores reales asignando a x valores comprendidos dentro del intervalo de variación dado por (3). La gráfica es, por consiguiente, una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia arriba y abajo del eje X.

4. *Asíntotas.* De la ecuación (2) vemos, inmediatamente, que $x = 1$ es una asíntota vertical. Como de (1) no podemos despejar fácilmente x en función de y, no podemos investigar la posible existencia de una o más asíntotas horizontales tan rápidamente como determinamos la asíntota vertical. Sin embargo, de acuerdo con la nota 3, Artículo 18, se pueden investigar las asíntotas horizontales dando a x valores cada vez mayores en valor absoluto. Pero este procedimiento queda aquí excluido por el intervalo de variación permisible para los valores de x dado por (3). Por tanto, no hay asíntotas horizontales.

5. *Cálculo de coordenadas.* Las coordenadas de los puntos pueden obtenerse a partir de (2) asignando a x valores comprendidos en el intervalo dado por (3). Tales pares de valores están dados en la tabla.

6. *Construcción de la curva.* La gráfica está trazada en la figura 29; se llama *cisoide*.

Ejemplo 2. Construir la curva cuya ecuación es

$$x^2y - x^2 - y = 0. \tag{4}$$

Solución. 1. *Intercepciones.* El único punto de intersección con los ejes es el origen.

2. *Simetría.* La curva solamente es simétrica con respecto al eje Y.

3. *Extensión.* Despejando de (4) el valor de y en función de x se obtiene

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}. \tag{5}$$

En (5), y no está definida para $x = \pm 1$. Para $x > 1$ y $x < -1$, y es positiva; para valores de x comprendidos en el intervalo $-1 < x < 1$, y es negativa o cero. A medida que x se aproxima a $+1$ ó -1, y aumenta numéricamente sin límite.

Despejando de (4) el valor de x en función de y obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{y - 1}}. \tag{6}$$

En (6), x no está definida para $y = 1$. También x es compleja para los valores de y comprendidos en el intervalo $0 < y < 1$. Por tanto, deben excluirse tales valores de y. A medida que y se aproxima a 1 decreciendo, x aumenta numéricamente sin límite.

Las conclusiones que hemos deducido de las ecuaciones (5) y (6), respecto a los intervalos en los cuales los valores de las variables x y y son reales, nos dan una buena idea de la localización de la curva en el plano coordenado. Hay tres regiones definidas en las cuales la curva existe: arriba de la recta $y = 1$ y a la derecha de la recta $x = 1$; arriba de la recta $y = 1$ y a la izquierda de la recta $x = -1$; y abajo del eje X y entre las rectas $x = 1$ y $x = -1$. Se trata, evidentemente, de una curva abierta.

4. *Asíntotas.* De (5) vemos que hay dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$. De (6) vemos que hay una asíntota horizontal: $y = 1$. También podemos obtener estas asíntotas tal y como se sugiere en la nota 3 del Artículo 18.

5. *Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.* Las coordenadas de unos cuantos puntos pueden obtenerse a partir de (5), dentro de los intervalos de

x	y
0	0
$\pm \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{15}$
$\pm \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\pm \frac{3}{4}$	$-\frac{9}{7}$
$\pm \frac{5}{4}$	$\frac{25}{9}$
$\pm \frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$
$\pm \frac{7}{4}$	$\frac{49}{33}$
± 2	$\frac{4}{3}$
$\pm \frac{9}{4}$	$\frac{81}{65}$

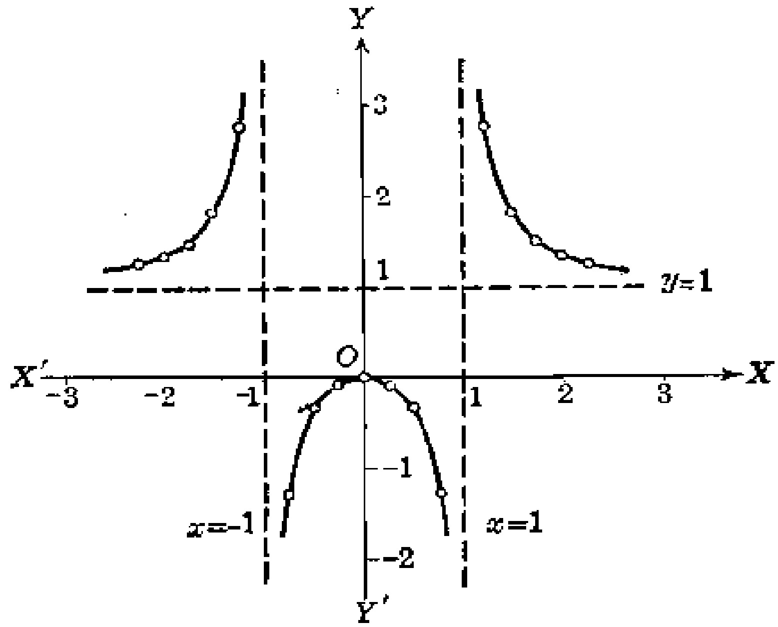

Fig. 30

variación obtenidos en el paso 3. Alguno de tales pares de valores están dados en la tabla.

6. *Construcción de la curva.* La gráfica está trazada en la figura 30. El estudiante debe hacer siempre un estudio particular para comprobar que la gráfica y la discusión de una ecuación estén en completo acuerdo.

EJERCICIOS. Grupo 6

En cada uno de los siguientes ejercicios, construir la curva correspondiente a la ecuación dada.

1. $xy - 2y - 3 = 0$.
2. $xy - 2x - 1 = 0$.
3. $x^4 + y^4 = 16$.
4. $x^3 + x - y = 0$.
5. $xy - 3y - x = 0$.
6. $xy - 3x - y = 0$.
7. $xy - 2x - 2y + 2 = 0$.
8. $x^4 - 4x^2 - y = 0$.
9. $x^2+2xy+y^2+2x-2y-1 = 0$.
10. $x^2-2xy+y^2-6x-6y+3=0$.
11. $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$.
12. $y^3 - x^2 + 3y^2 + 2x + 3y = 0$.
13. $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x - 2y - 2 = 0$.
14. $x^2y - 4y - x = 0$.
15. $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$.
16. $x^2y - xy - 2y - 1 = 0$.
17. $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$.
18. $x^2 - xy + 5y = 0$.

19. $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0$.
20. $xy^2 + 2xy - y^2 + x = 0$.
21. $x^2y - x^2 + xy + 3x = 2$.
22. $xy^2 - y^2 - xy + y = 0$.
23. $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$.
24. $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0$.
25. $y^3 + x^2y - x^3 = 0$.

20. Ecuaciones factorizables. El trazado de curvas se puede simplificar considerablemente para ciertos tipos de ecuaciones a las que llamaremos ecuaciones *factorizables;* es decir, aquellas que pueden escribirse en forma del producto de dos o más factores variables igualado a cero. Por ejemplo, es evidente que la ecuación

$$x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

puede escribirse en la forma equivalente

$$(x - y)(x + y) = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) solamente se satisface para valores de x y y que anulen a uno, por lo menos, de los factores de su primer miembro (Apéndice IB, 2). Es decir, la ecuación (2) se satisface para valores que satisfagan a una cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$x - y = 0, \tag{3}$$

$$x + y = 0. \tag{4}$$

Las coordenadas de cualquier punto que satisfagan ya sea a (3) o (4) satisfarán también (2) y, por tanto, a (1). Por lo tanto, de acuerdo con la definición 1 del Artículo 14, la gráfica de la ecuación (1) constará de dos curvas que son las gráficas de las ecuaciones (3) y (4). Se recomienda al estudiante que trace las gráficas de (3) y (4) y compruebe que se trata de dos rectas que pasan por el origen y tienen de pendientes 1 y -1, respectivamente.

En general, si la ecuación

$$f(x, y) = 0 \tag{5}$$

es factorizable, es decir, si $f(x, y)$ puede escribirse como el producto de dos o más factores variables, la gráfica de (5) constará de las gráficas de las ecuaciones obtenidas al igualar a cero cada uno de estos factores.

21. Intersecciones de curvas. Consideremos dos ecuaciones independientes

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$g(x, y) = 0. \tag{2}$$

Si sus gráficas se cortan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos se llama *punto de intersección*. Como un punto de intersección de dos curvas (1) y (2) está sobre *cada una* de dichas curvas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, *ambas* ecuaciones (1) y (2), de acuerdo con las definiciones del Artículo 14. La interpretación analítica de un punto de intersección es obvia; en el caso que estamos estudiando, es un punto cuyas coordenadas representan una *solución común* de las ecuaciones (1) y (2).

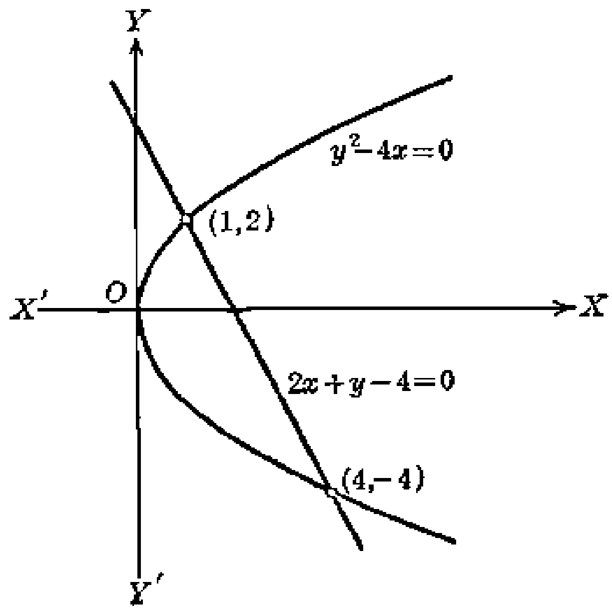

Fig. 31

Como las coordenadas de un punto deben ser ambas números reales, una solución común (x, y) de (1) y (2) no puede representar un punto de intersección en nuestro sistema coordenado real a menos que ambos valores de x y y sean reales. Además, si las ecuaciones (1) y (2) son incompatibles, es decir, no tiene solución común, sus gráficas no se cortan.

Ejemplo. Hallar analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las dos curvas (la primera es realmente una recta) cuyas ecuaciones son

$$2x + y - 4 = 0, \tag{3}$$

$$y^2 - 4x = 0. \tag{4}$$

Solución. De (3), $y = 4 - 2x$; sustituyendo en (4) se obtiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

cuyas raíces son $x = 1, 4$.

Sustituyendo en (3) se obtiene que los valores correspondientes de y son 2, -4. Por tanto, los puntos de intersección son (1, 2) y (4, -4).

Gráficamente, los puntos de intersección se obtienen trazando la recta (3) y la curva (4). La gráfica correspondiente aparece en la figura 31

EJERCICIOS. Grupo 7

En cada uno de los ejercicios 1-10, factorizar la ecuación correspondiente y trazar la gráfica.

1. $x^2 - 4y^2 = 0$.
2. $9x^2 - 2y^2 = 0$.
3. $x^3 - x^2y - 2xy^2 = 0$.
4. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.
5. $6x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 7y - 3 = 0$.
6. $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 4x - 4y = 0$.
7. $x^3 - x^2y - xy + y^2 = 0$.
8. $x^2y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0$.
9. $x^2y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = 0$.
10. $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 11-20 hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección, cuando los haya, para las curvas dadas.

11. $2x - y - 1 = 0$; $3x + y - 9 = 0$.
12. $x + 4y + 7 = 0$; $2x - 3y - 8 = 0$.
13. $x + y - 5 = 0$; $3x + 3y + 7 = 0$.
14. $y^2 - x = 0$; $2x - y - 6 = 0$.
15. $x^2 - y = 0$; $y^2 - x = 0$.
16. $x^2 + y^2 = 4$; $x + y = 2$.
17. $x^2 + y^2 = 8$; $y^2 = 2x$.
18. $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 - y^2 = 4$.
19. $x^2 + y^2 = 13$; $xy = 6$.
20. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$; $3x - y - 8 = 0$.

22. Segundo problema fundamental. Consideremos ahora el segundo problema fundamental de la Geometría analítica, ya enunciado en el Artículo 13: Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Una figura geométrica, tal como una curva, se da, generalmente, por su *definición*. Por *definición de un objeto* entendemos una descripción de ese objeto, de tal naturaleza que sea posible identificarlo de una manera definida entre todos los demás objetos de su clase. Debemos observar cuidadosamente lo que implica este enunciado: expresa una *condición necesaria y suficiente* para la existencia del objeto definido (Art. 9). Así, consideremos que estamos definiendo una curva plana del tipo C por medio de una propiedad P que únicamente posee C. Entonces, entre todas las curvas planas, una curva es del tipo C *si y solamente si* posee la propiedad P.

Como un ejemplo específico, consideremos una curva plana muy conocida, *la circunferencia*. *Definimos* una circunferencia como una curva plana que posee la propiedad única P de que todos sus puntos están a igual distancia de un punto

fijo en su plano. Esto significa que toda circunferencia tiene la propiedad P, y recíprocamente, toda curva plana que tenga la propiedad P es una circunferencia.

Para una curva, dar la *condición* que deben cumplir sus puntos es dar una *ley* a la cual deben obedecer los puntos de la curva. Esto significa que *todo punto* de la curva debe satisfacer la ley particular de la curva. De acuerdo con esto se define frecuentemente una curva como *el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley especificada.* Así, una circunferencia puede definirse como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a un punto fijo de ese plano es constante.

Un lugar geométrico no debe satisfacer necesariamente una sola condición; puede satisfacer dos o más condiciones. Así podemos tener una curva que sea el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: 1) pasa por un punto dado, y 2) se conserva siempre a una distancia constante de una recta dada. Podemos entonces hacer el resumen de las notas precedentes en la siguiente

DEFINICIÓN. Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

El estudiante debe observar que esta definición implica que la condición o condiciones dadas sean necesarias y suficientes para la existencia de la curva. Esta definición debe también compararse con la definición 1 del Artículo 14.

En este artículo hemos estudiado el problema desde un punto de vista puramente geométrico. En el siguiente, consideraremos la interpretación analítica.

23. Ecuación de un lugar geométrico. Estudiaremos ahora el problema de la determinación de la ecuación de un lugar geométrico en el caso de que la interpretación analítica de la condición o condiciones geométricas definen el lugar geométrico. El método está indicado claramente por dos definiciones previas, la definición 1 del Artículo 14 y la última definición del Artículo 22. Combinando estas dos definiciones tenemos una nueva

DEFINICIÓN. Se llama *ecuación de un lugar geométrico plano* a una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x y y son todas las coordenadas de aquellos puntos, y *solamente* de aquellos puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico.

Nótese que esta definición expresa una condición necesaria y suficiente para que (1) sea la ecuación de un lugar geométrico. De acuerdo con esto, el procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico es esencialmente como sigue:

1. Se supone que el punto P, de coordenadas (x, y) es un punto *cualquiera* que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.

2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x y y.

3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma (1).

4. Se comprueba el recíproco: sean (x_1, y_1) las coordenadas de *cualquier* punto que satisfacen (1) de tal manera que la ecuación

$$f(x_1, y_1) = 0 \tag{2}$$

es verdadera. Si de (2) se puede deducir la expresión analítica de la condición o condiciones geométricas dadas, cuando se aplica al punto (x_1, y_1), entonces (1) es la ecuación del lugar geométrico que se buscaba.

En la práctica se omite, generalmente, el paso 4, ya que la repetición del trabajo del paso 3 al paso 2 es, generalmente, inmediata. Nótese en el paso 1 que, al tomar P como un punto *cualquiera* del lugar geométrico, estamos considerando *todos* los puntos de ese lugar geométrico.

Ahora aplicaremos este procedimiento a dos ejemplos. Se recomienda al lector que estudie cuidadosamente estos ejemplos, porque una gran parte de nuestro futuro trabajo en Geometría analítica será la determinación de las ecuaciones de lugares geométricos.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados $A(-1, 2)$ y $B(4, -1)$.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces P debe satisfacer la condición geométrica de que los segmentos PA y PB sean iguales en longitud, o sea, que

$$|\overline{PA}| = |\overline{PB}| \tag{3}$$

2. Por el teorema 2 del Artículo 6, tenemos

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

$$|\overline{PB}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}.$$

Por tanto, la condición geométrica dada (3) esta expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}. \qquad (4)$$

3. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de (4), desarrollamos, trasponemos y simplificamos, la ecuación se reduce a

$$5x - 3y - 6 = 0. \qquad (5)$$

4. Sean (x_1, y_1) las coordenadas de un punto cualquiera P_1 que satisfacen (5) de tal manera que la ecuación

$$5x_1 - 3y_1 - 6 = 0 \qquad (6)$$

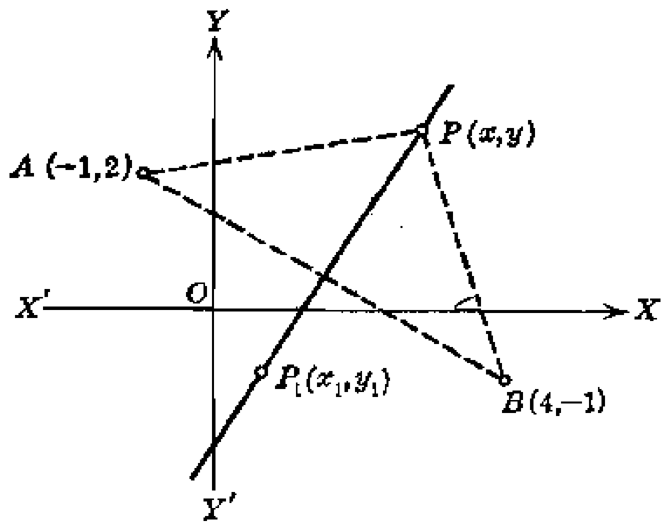

Fig. 32

es verdadera. Invirtiendo los pasos dados para reducir (4) a (5), podemos demostrar que de la ecuación (6) se deduce la ecuación

$$\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-4)^2+(y_1+1)^2},$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (3) aplicada al punto P_1.

Luego (5) es la ecuación buscada. El lugar geométrico, que aparece en la figura 32, es la perpendicular al segmento AB en su punto medio, es decir, la *mediatriz* del segmento AB.

Ejemplo 2. Un punto se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto $A(4, 0)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Sea B el pie de la perpendicular bajada de P al eje Y (fig. 33). Según el problema, P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{PB}| = |\overline{PA}|. \qquad (7)$$

2. Por definición de abscisa (Art. 4),

$$|\overline{PB}| = |x|,$$

y por el teorema 2 del Artículo 6,

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Por tanto, la condición geométrica (7) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$|x| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}. \tag{8}$$

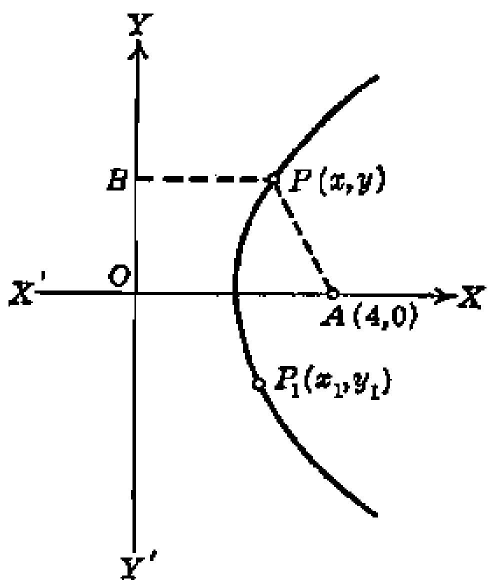

Fig. 33

3. Elevando al cuadrado ambos miembros de (8), desarrollando, y trasponiendo, obtenemos

$$y^2 - 8x + 16 = 0. \tag{9}$$

4. Si (x_1, y_1) son las coordenadas de cualquier punto P_1 que satisfacen (9), entonces

$$y_1^2 - 8x_1 + 16 = 0. \tag{10}$$

Si aplicamos a (10), en orden inverso, las mismas operaciones empleadas para reducir (8) a (9), obtenemos

$$|x_1| = \sqrt{(x_1-4)^2 + y_1^2},$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (7) aplicada al punto P_1.

Por tanto, (9) es la ecuación buscada. El lugar geométrico, una parábola, está trazado en la figura 33.

EJERCICIOS. Grupo 8

En cada uno de los ejercicios siguientes se recomienda al lector que, después de obtener la ecuación del lugar geométrico, construya la curva de acuerdo con lo dicho en el Artículo 19.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: *a*) se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje Y; *b*) está siempre 4 unidades arriba del eje X; *c*) está siempre a igual distancia de los ejes X y Y.

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que: *a*) su abscisa es siempre igual al doble de su ordenada; *b*) su ordenada es siempre igual a su abscisa incrementada en 2; *c*) su abscisa es siempre igual a la recíproca de su ordenada.

3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje Y disminuída en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

4. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su intepretación geométrica.

5. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2, 3)$ es siempre igual a 5. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

6. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 4)$. Identificar el lugar geométrico, y construirlo gráficamente.

7. Una recta contiene los dos puntos $A(-1, 5)$ y $B(1, 3)$. Expresar, analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x, y)$ está sobre la recta. Deducir la ecuación de la recta.

8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $(4, 1)$ es siempre igual a su distancia del eje Y.

9. Una recta l, que pasa por el punto $A(-5, 1)$, es perpendicular a otra cuya pendiente es $\frac{1}{2}$. Expresar, analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x, y)$ está sobre la recta l, y deducir, de aquí, su ecuación.

10. Una circunferencia de radio 3 tiene su centro en el punto $C(-3, -2)$. A partir de la definición, hallar la ecuación de esta circunferencia.

11. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje X es siempre igual a su distancia del punto $A(0, 4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

12. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(3, 5)$ y $B(-4, 2)$ es siempre igual a 30.

13. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(2, -2)$ y $B(4, 1)$ es siempre igual a 12. (Dos casos.)

14. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2, 4)$ es siempre igual a su distancia del eje Y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 8.