6. Distancia entre dos puntos dados. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos dados cualesquiera (fig. 7). Vamos a determinar la distancia d entre P_1 y P_2, siendo $d = |\overline{P_1P_2}|$. Por P_1P_2 tracemos las perpendiculares P_1A y P_2D a ambos ejes coordenados, como se indica en la figura, y sea E su punto de intersección. Consideremos el triángulo rectángulo P_1EP_2. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2E}^2 + \overline{EP_1}^2. \tag{1}$$

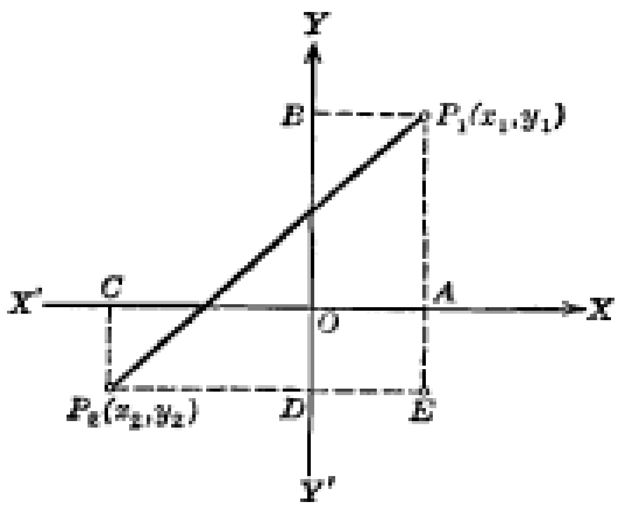

Fig. 7

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son $A(x_1, 0)$, $B(0, y_1)$, $C(x_2, 0)$, $D(0, y_2)$. Luego, por el teorema 1 (Art. 3) tenemos

$$\overline{P_2E} = \overline{CA} = x_1 - x_2, \quad \overline{EP_1} = \overline{DB} = y_1 - y_2.$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

de donde,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este resultado se enuncia como sigue:

TEOREMA 2. *La distancia* d *entre dos puntos* $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ *está dada por la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

NOTAS. 1. En la demostración del teorema 2, no se hizo mención de los cuadrantes en que se encuentran los puntos P_1 y P_2. Según esto el resultado del teorema 2 es completamente general e independiente de la situación de los puntos P_1 y P_2. La posición de un punto en un cuadrante particular está determinada por los signos de sus coordenadas.

2. La distancia d es *positiva*, siendo P_1P_2 el valor numérico o *absoluto* de la longitud del segmento rectilíneo. Por esta razón no aparece en la fórmula ningún signo delante del radical. Debe entenderse, *por convenio*, que si no aparece ningún signo delante de la raíz cuadrada indicada de una cantidad, *se considera siempre que se trata del valor positivo*. Si se debe tomar la raíz cuadrada negativa, debe aparecer el signo menos delante del radical. Así, el valor positivo de la raíz cuadrada de una cantidad a se expresa por $\sqrt{a}$, el valor negativo por $-\sqrt{a}$, y *ambos* valores, el positivo y el negativo por $\pm\sqrt{a}$.

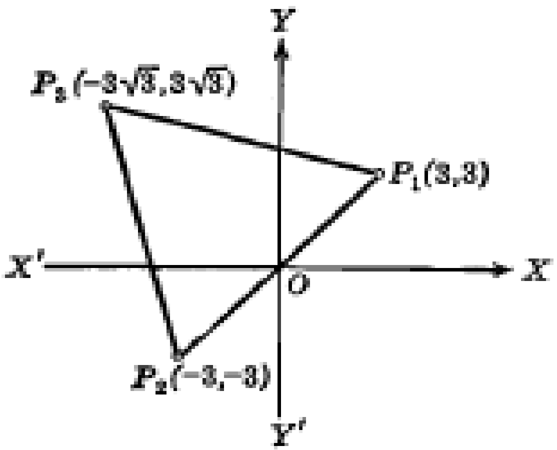

Fig. 8

Ejemplo. Demostrar que los puntos

$$P_1(3,\ 3),\quad P_2(-3,\ -3),\quad P_3(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$$

son vértices de un triángulo equilátero.

Solución. El triángulo del problema es el indicado en la figura 8. Por el teorema 2, tenemos:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(3+3)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2},$$

$$|\overline{P_2P_3}| = \sqrt{(-3+3\sqrt{3})^2 + (-3-3\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{(9 - 18\sqrt{3} + 27) + (9 + 18\sqrt{3} + 27)}$$

$$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2},$$

$$|\overline{P_3P_1}| = \sqrt{(-3\sqrt{3} - 3)^2 + (3\sqrt{3} - 3)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Luego el triángulo es equilátero, ya que todos sus lados son de igual longitud.

7. División de un segmento en una razón dada.

TEOREMA 3. *Si* $P_1(x_1,\ y_1)$ *y* $P_2(x_2,\ y_2)$ *son los extremos de un segmento* P_1P_2, *las coordenadas* (x, y) *de un punto* P *que divide a este segmento en la razón dada* $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ *son*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r},\quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r},\quad r \neq -1.$$

DEMOSTRACIÓN. Por los puntos P_1, P, P_2, tracemos perpendiculares a los ejes coordenados, tal como se indica en la figura 9.

Por Geometría elemental, las tres rectas paralelas P_1A_1, PA y P_2A_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1A_2. Por tanto, podemos escribir

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}. \tag{1}$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje X son $A_1(x_1, 0)$, $A(x, 0)$, $A_2(x_2, 0)$. Por tanto, por el teorema 1, del Artículo 3, tenemos

$$\overline{A_1A} = x - x_1,$$
$$\overline{AA_2} = x_2 - x.$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x},$$

de donde,

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

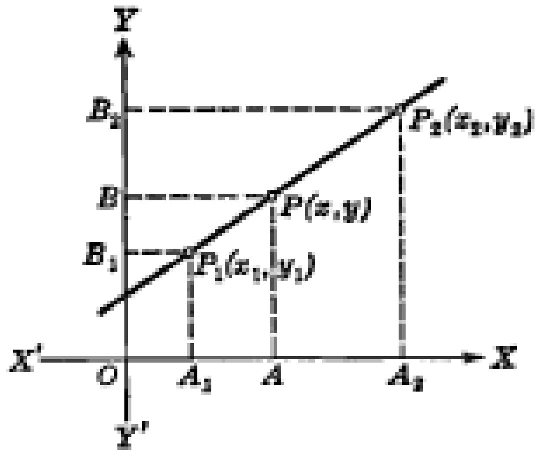

Fig. 9

Por un procedimiento semejante para las ordenadas, obtenemos

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \tag{2}$$

de donde,

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

En el caso particular en que P es el punto medio del segmento dirigido P_1P_2, es $r = 1$, de manera que los resultados anteriores se reducen a

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Según esto tenemos el siguiente

COROLARIO. *Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos son* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *son*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

NOTAS. 1. En Geometría elemental, las relaciones (1) y (2) se escriben sin considerar el signo. En Geometría analítica, en cambio, las razones deben ser consideradas con su signo, ya que estamos tratando con segmentos rectilíneos dirigidos.

2. Al usar las fórmulas del teorema 3, debe cuidarse de que la sustitución de las coordenadas sea correcta. Por esta razón, frecuentemente es preferible no sustituir en estas fórmulas sino escribir directamente los valores de las razones, tal como los dan las fórmulas (1) y (2). Esto se muestra en el ejemplo que damos a continuación.

3. Si el punto de división P es externo al segmento dirigido P_1P_2, la razón r es negativa.

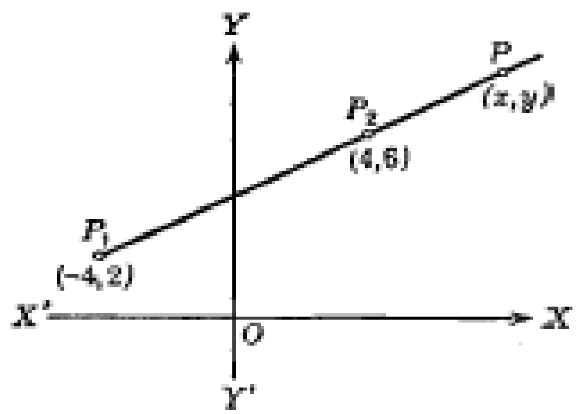

Fig. 10

Ejemplo. Si $P_1(-4, 2)$ y $P_2(4, 6)$ son los puntos extremos del segmento dirigido P_1P_2, hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = -3$.

Solución. Como la razón r es negativa, el punto de división P es externo, tal como se indica en la figura 10. Si aplicamos el teorema 3 directamente, obtenemos

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + (-3)4}{1 - 3} = 8,$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{2 + (-3)6}{1 - 3} = 8.$$

Si, como se sugiere en la nota 2 anterior, escribimos las razones directamente, obtenemos también

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{x - (-4)}{4 - x} = -3, \text{ de donde, } x = 8;$$

y

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{y - 2}{6 - y} = -3, \text{ de donde, } y = 8.$$

EJERCICIOS. Grupo 2

Dibújese una figura para cada ejercicio.

1. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $(-2, -1)$, $(2, 2)$, $(5, -2)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

3. Demostrar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

4. Demostrar que los tres puntos $(12, 1)$, $(-3, -2)$, $(2, -1)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma línea recta.

5. Demostrar que los puntos $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(7, 2)$, $(4, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

6. Los vértices de un triángulo son $A(3, 8)$, $B(2, -1)$ y $C(6, -1)$. Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

7. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(11, 6)$, $(9, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$. *Sugestión.* Usese la segunda fórmula del Apéndice IA, 1.

9. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones.)

10. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y) equidista de los dos puntos $(-3, 5)$, $(7, -9)$.

11. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(-2, 3)$ y $(6, -3)$.

12. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2, 4)$ y $P_2(8, -4)$. Hallar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$.

13. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$, y su punto medio es $(4, 3)$. Hallar el otro extremo.

14. Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7, 4)$ y $P_2(-1, -4)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(1, -2)$ divide al segmento.

15. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(2, 5)$, $(4, 2)$ y $(1, 1)$. Hallar las coordenadas de los tres vértices.

16. Los vértices de un triángulo son $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC, demostrar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

17. En el triángulo rectángulo del ejercicio 3, demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

18. Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero del ejercicio 1 forman un paralelogramo.

19. Los vértices de un triángulo son $(2, -1)$, $(-4, 7)$, $(8, 0)$. Hallar, para cada una de las medianas, el punto de trisección más cercano al punto medio del lado correspondiente. Demostrar que este punto es el mismo para cada una de las medianas y, por tanto, que las medianas concurren en un punto. Este punto se llama *baricentro* del triángulo.

20. En el triángulo cuyos vértices son (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), demostrar que las coordenadas del baricentro son

$$(\tfrac{1}{3}[x_1 + x_2 + x_3], \ \tfrac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3]).$$

Utilizar este resultado para comprobar el ejercicio 19.

8. Pendiente de una recta. Dos rectas al cortarse forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice (fig. 11). Por tanto, la expresión ''el ángulo comprendido entre dos rectas'' es ambigua, ya

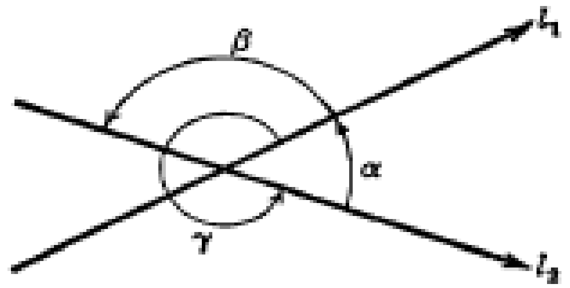

Fig. 11

que tal ángulo puede ser el α o bien su suplemento el β. Para hacer una distinción entre estos dos ángulos, consideramos que las rectas están dirigidas y luego establecemos la siguiente

Definición. Se llama *ángulo de dos rectas dirigidas* al formado por los dos lados que se alejan del vértice.

Así, por ejemplo, según esta definición, el ángulo que forman las rectas dirigidas l_1 y l_2 (fig. 11) es el ángulo α. Sin embargo, si la dirección de una de estas rectas, digamos l_2, se invierte, el ángulo formado por las dos rectas es el ángulo suplementario β.

Si l_1 y l_2 son paralelas, diremos que el ángulo comprendido entre ellas es de $0°$ cuando tienen la misma dirección, y de $180°$ cuando tienen direcciones opuestas.

Nota. En la figura 11, teniendo las rectas sus direcciones marcadas, el ángulo $\gamma = 360° - \alpha$ también, según la definición 1, es el ángulo de las rectas l_1 y l_2. Este ángulo $\gamma > 180°$ se llama *ángulo cóncavo*. Siempre que hablemos de ángulo de dos rectas, sólo consideraremos ángulos $\leq 180°$.

DEFINICIÓN 2. Se llama *ángulo de inclinación* de una recta el formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba.

Así, de acuerdo con las definiciones 1 y 2, el ángulo de inclinación de la recta l (fig. 12) es α, y el de l' es α'. Evidentemente, α puede tener cualquier valor comprendido entre $0°$ y $180°$; es decir, su intervalo de variación está dado por

$$0° \leq \alpha \leq 180°. \qquad (1)$$

Para la mayor parte de los problemas de Geometría analítica, emplearemos más la tangente del ángulo de inclinación que el ángulo mismo. Según esto:

DEFINICIÓN 3. Se llama *pendiente* o *coeficiente angular* de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m. Por tanto, podemos escribir

$$m = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

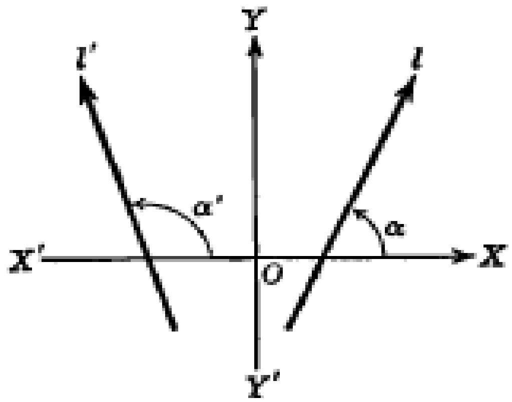

Fig. 12

Por (1) y (2) se ve que la pendiente puede tomar *todos* los valores reales. Si α es agudo, la pendiente es positiva, como para la recta l en la figura 12; si α' es obtuso, como para la recta l', la pendiente es negativa. Cualquier recta que coincida o sea paralela al eje Y será perpendicular al eje X, y su ángulo de inclinación será de $90°$. Como tg $90°$ no está definida, la pendiente de una recta paralela al eje Y no existe. Podemos establecer, por lo tanto, que *toda recta perpendicular al eje* X *no tiene pendiente*. El estudiante recordará, probablemente, la igualdad tg $90° = \infty$, cuyo significado debe considerar muy cuidadosamente ya que ∞ no es un número. Esta igualdad es una manera simbólica de expresar que, a medida que el ángulo α se aproxima más y más a $90°$, tg α se hace y permanece mayor que cualquier número positivo por grande que se suponga.

TEOREMA 4. *Si* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es*

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2. \qquad (3)$$

Demostración. Consideremos la recta P_1P_2 de la figura 13, determinada por los puntos P_1 y P_2, y sea α su ángulo de inclinación. Por P_1 y P_2 tracemos las perpendiculares P_1A_1 y P_2A_2 al eje X, y por P_2 tracemos una paralela al eje X que corte a P_1A_1 en B. El ángulo $P_1P_2B = \alpha$, y, por Trigonometría, tendremos

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BP_1}}{\overline{P_2B}}. \qquad (4)$$

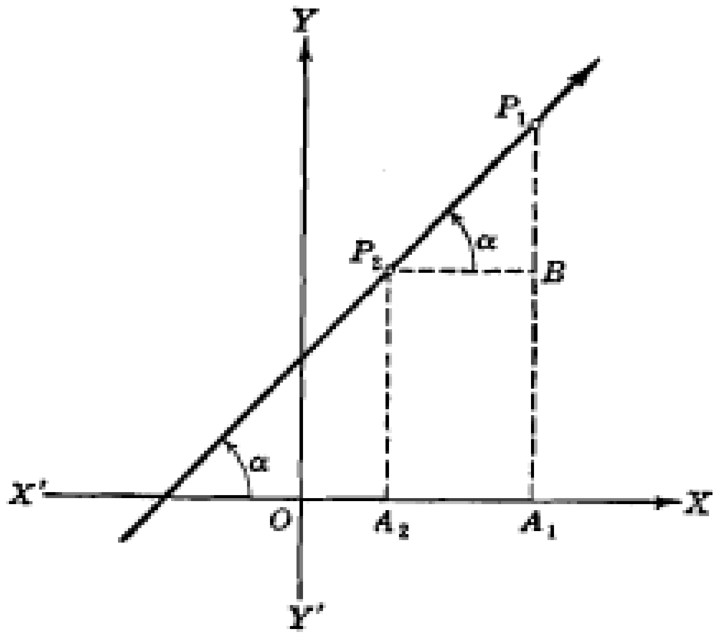

Fig. 13

Las coordenadas de los puntos A_1, A_2 y B son $A_1(x_1, 0)$, $A_2(x_2, 0)$ y $B(x_1, y_2)$. Por tanto, por el teorema 1, Art. 3, tenemos

$$\overline{BP_1} = y_1 - y_2, \quad \overline{P_2B} = \overline{A_2A_1} = x_1 - x_2.$$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos lo que se quería demostrar.

Notas. 1. El valor de m dado por la fórmula (3) no está definido analíticamente para $x_1 = x_2$. En este caso, la interpretación geométrica es que una recta determinada por dos puntos diferentes con abscisas iguales es paralela al eje Y y, por tanto, como se anotó anteriormente, no tiene pendiente.

2. El orden en que se toman las coordenadas en (3) no tiene importancia, ya que $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. El estudiante debe evitar, en cambio, el error muy frecuente de tomar las ordenadas en un orden y las abscisas en el orden contrario, ya que esto cambia el signo de m.

Ejemplo. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(1, 6)$, $(5, -2)$.

Solución. Esta recta se muestra en la figura 14. Por el teorema 4 tenemos, para la pendiente,

$$m = \frac{6-(-2)}{1-5} = \frac{8}{-4} = -2.$$

De la tabla B del Apéndice II tenemos, para ángulo de inclinación,

$$\alpha = \text{arc tg } (-2) = 116° 34'.$$

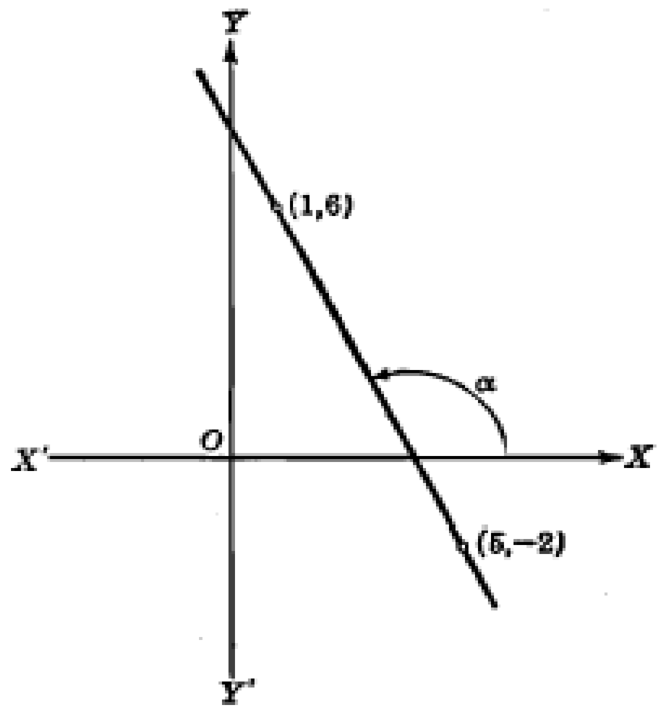

Fig. 14

9. Significado de la frase "condición necesaria y suficiente". En este artículo nos apartaremos momentáneamente de nuestro estudio de la Geometría analítica para considerar el significado de una expresión que se presenta frecuentemente en Matemáticas. La expresión particular a que nos referimos es "una condición necesaria y suficiente". Veamos primero su significado con un ejemplo.

Consideremos el sencillo teorema siguiente de la Geometría elemental:

Si un triángulo es isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Este teorema establece que si un triángulo es isósceles *necesariamente* se verifica que los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales. Por tanto, podemos decir que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición necesaria* para que el triángulo sea isósceles.

Pero el *recíproco* de este teorema también es verdadero, a saber: Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a estos ángulos son también iguales, y el triángulo es isósceles.

Este teorema establece que la existencia de dos ángulos iguales es *suficiente* para que un triángulo sea isósceles. De ahí deducimos que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición suficiente* para que el triángulo sea isósceles.

Podemos entonces combinar ambos teoremas, directo y recíproco, en el siguiente enunciado único:

Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que dos de sus ángulos sean iguales.

Una frase de uso frecuente en lugar de "una condición necesaria y suficiente" es "*si y solamente si*". Así el enunciado precedente puede escribirse:

Un triángulo es isósceles *si y solamente si* dos de sus ángulos son iguales.

De una manera más general, si la hipótesis A de un teorema implica la verdad de una tesis B, entonces B es una *condición necesaria* para A. Por otra parte, si, recíprocamente, B implica la verdad de A, entonces B es una *condición suficiente* para A

Debemos hacer notar, sin embargo, que una condición puede ser necesaria sin ser suficiente, y viceversa. Por ejemplo, para que un triángulo sea equilátero, es *necesario* que sea isósceles; pero la condición no es suficiente, ya que un triángulo puede ser isósceles sin ser equilátero.

Puede haber más de una condición necesaria y suficiente para la verdad de un teorema. Así, una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero es que sea equiángulo. Y otra condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea equilátero es la igualdad de sus tres alturas.

A medida que vayamos avanzando en nuestro estudio de la Geometría analítica, tendremos ocasiones frecuentes de deducir condiciones necesarias y suficientes de naturaleza analítica para diversas propiedades geométricas.

10. Angulo de dos rectas. Consideremos (fig. 15) las dos rectas l_1 y l_2. Sea C su punto de intersección y A y B los puntos en que cortan al eje X. Sean θ_1 y θ_2 los dos ángulos suplementarios que forman. Cada uno de estos ángulos, θ_1 y θ_2, se miden, tal como indican las flechas curvadas, en *sentido contrario al de las manecillas de un reloj*, o sea, en *sentido positivo*, como en Trigonometría. La recta a partir de la cual se mide el ángulo se llama *recta inicial;* la recta hacia la cual se dirige el ángulo se llama *recta final*. Las pendientes de las rectas inicial y final se llaman *pendiente inicial* y *pendiente final*, respectivamente.

Designemos por α_1 el ángulo de inclinación de la recta l_1 y por m_1 la pendiente; para la recta l_2, sean α_2 y m_2 el ángulo de inclinación y la pendiente, respectivamente. Para el ángulo θ_1, la recta inicial es l_1, la pendiente inicial es m_1, la recta final es l_2 y la pendiente final es m_2; para el ángulo θ_2, la recta y la pendiente iniciales, y la

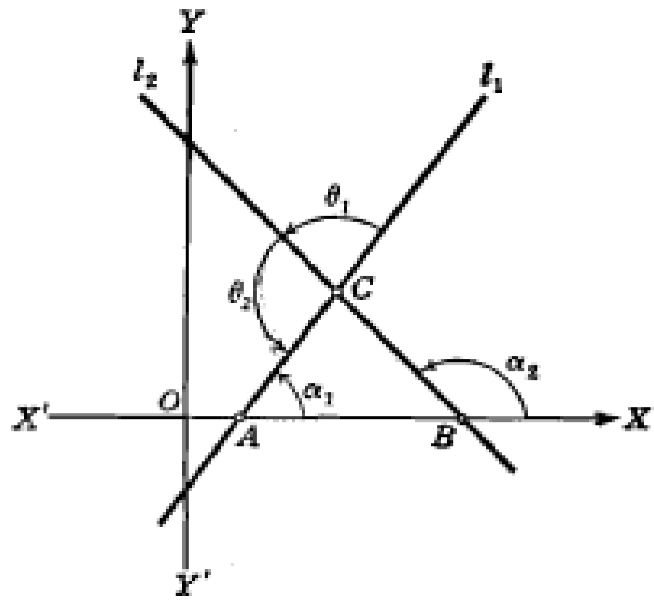

Fig. 15

recta y pendiente finales, están dadas por l_2, m_2, l_1 y m_1, respectivamente. Vamos ahora a calcular cada uno de los ángulos θ_1 y θ_2 cuando se conocen las pendientes m_1 y m_2 de los lados que forman estos ángulos.

Por Geometría elemental, un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Por tanto, en el triángulo ABC, siendo θ_1 = ángulo ACB, tendremos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1,$$

o sea,

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{1}$$

Tomando las tangentes de ambos miembros de (1), tenemos (Apéndice IC, 6)

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1}. \tag{2}$$

Pero $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ y $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Luego, de (2),

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \tag{3}$$

Para el triángulo ABC, con θ_2 por ángulo exterior, tenemos

$$\theta_2 = \alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2).$$

Tomando tangentes de ambos miembros, obtenemos (Apéndice IC, 6 y 3)

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha_2)}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha_2)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

de donde obtenemos el resultado buscado:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}. \tag{4}$$

Comparando (3) y (4), vemos que solamente difieren en el signo, lo cual era de esperarse, ya que θ_1 y θ_2 son ángulos suplementarios. Para calcular un ángulo especificado es esencial saber si se debe usar la fórmula (3) o la (4), es decir, debemos tener la seguridad de que estamos calculando un ángulo particular o su suplemento. Esto se resuelve muy sencillamente si observamos que, en *ambos resultados*, el numerador se obtiene *restando la pendiente inicial de la pendiente final*. De acuerdo con esto tenemos el siguiente

TEOREMA 5. *Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula*

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1, \tag{5}$$

en donde m_1 es la pendiente inicial y m_2 la pendiente final correspondiente al ángulo θ.

NOTA. Si $m_1 m_2 = -1$, $\operatorname{tg} \theta$ no está definida por la fórmula (5). Este caso será considerado más adelante en el corolario 2.

Del teorema 5 podemos deducir las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, conocidas sus pendientes.

En efecto, según vimos en el Artículo 8, si dos rectas son paralelas, el ángulo formado por ellas es 0° ó 180°. En cualquiera de los dos casos, la fórmula (5) se reduce a

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

de donde, $m_1 = m_2$; es decir, las pendientes son iguales.

Recíprocamente, si $m_1 = m_2$, (5) se reduce a

$$\operatorname{tg} \theta = 0,$$

de donde se deduce que θ es igual a $0°$ ó $180°$, y, en consecuencia, los rectas son paralelas. Por tanto, de acuerdo con el Artículo 9, una condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas es que sus pendientes sean iguales. De aquí se deduce el siguiente corolario de gran importancia práctica:

COROLARIO 1. La condición necesaria y suficiente para que *dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales*.

Si dos rectas son perpendiculares, el ángulo comprendido entre ellas es de $90°$. En este caso, como no puede usarse la relación (5) para hallar el valor de θ, escribiremos (5) en la forma

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}. \qquad (6)$$

Como $\operatorname{ctg} 90° = 0$, para que la fracción sea cero debe anularse el numerador, es decir,

$$0 = 1 + m_1 m_2,$$

de donde, $m_1 m_2 = -1$.

Recíprocamente, si $m_1 m_2 = -1$, la fórmula (6) se anula y, por lo tanto,

$$\operatorname{ctg} \theta = 0,$$

de donde, $\theta = 90°$, y las rectas son perpendiculares. Según esto tenemos el

COROLARIO 2. La condición necesaria y suficiente para que *dos rectas sean perpendiculares entre sí, es que el producto de sus pendientes sea igual a* -1.

NOTA. El corolario 2 se enuncia frecuentemente en la siguiente forma equivalente: Dos rectas son perpendiculares entre sí si la pendiente de una de las rectas es recíproca y de signo contrario de la pendiente de la otra recta, o, más brevemente, si las pendientes son negativamente recíprocas.

Ejemplo. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(10, 7)$ y $D(7, 3)$.

Solución. El primer paso es indicar la dirección positiva del ángulo que se busca que, en este caso, es el ángulo C de la figura 16. Entonces el lado BC da la pendiente inicial m_1 y el lado CD la pendiente final m_2.

Por el teorema 4 del Artículo 8 tenemos para las pendientes

$$m_1 = \frac{7-5}{10-1} = \frac{2}{9}, \quad m_2 = \frac{7-3}{10-7} = \frac{4}{3}.$$

Después, por el teorema 5, tenemos

$$\operatorname{tg} C = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{9}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{9}} = \frac{36 - 6}{27 + 8} = \frac{6}{7},$$

de donde, $C = 40° 36'$.

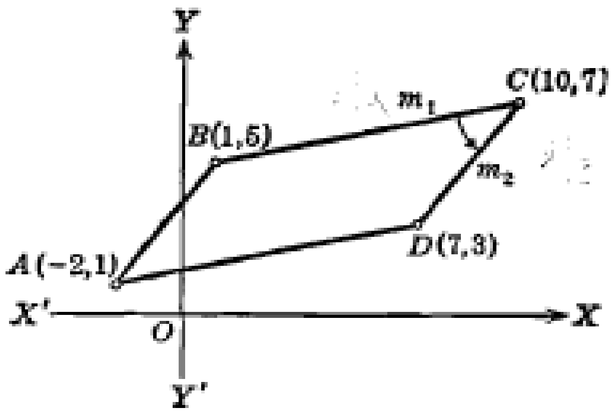

Fig. 16

EJERCICIOS. Grupo 3

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Dígase el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) El eje Y. *c*) Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la derecha. *d*) Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la izquierda.

2. Dígase la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) Una recta paralela al eje X y dirigida ya sea a la derecha o a la izquierda. *c*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante I. *d*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II

3. Demostrar el teorema 4 del Artículo 8, empleando una figura en la cual el ángulo de inclinación α sea obtuso.

4. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(7, -3)$.

5. Los vértices de un triángulo son los puntos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ y $(4, 5)$. Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

6. Demostrar, por medio de pendientes, que los puntos $(9, 2)$, $(11, 6)$, $(3, 5)$ y $(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

7. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $(3, 2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2, 7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿cuál es la abscisa de A y cuál la ordenada de B?

9. Tres de los vértices de un paralelogramo son $(-1, 4)$, $(1, -1)$ y $(6, 1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿cuál es su abscisa?

10. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, -2)$. Comprobar los resultados.

11. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(8, 0)$ y $(4, -2)$ son vértices de un paralelogramo, y hallar su ángulo obtuso.

12. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$ y $(6, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles, y hallar uno de los ángulos iguales.

13. Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(2, 5)$, $(7, 3)$, $(6, 1)$ y $(0, 0)$. Comprobar los resultados.

14. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

15. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°. La recta inicial pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

16. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, -3)$, $B(3, 3)$ y $C(6, -1)$ empleando el seno del ángulo BAC. *Sugestión.* Ver Apéndice IC, 12.

17. Por medio de las pendientes demuéstrese que los tres puntos $(6, -2)$, $(2, 1)$ y $(-2, 4)$ son colineales.

18. Una recta pasa por los dos puntos $(-2, -3)$, $(4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

19. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los dos puntos $(2, -1)$, $(7, 3)$.

20. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

21. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $(-2, 5)$ y $(4, 1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $(-1, 1)$ y $(3, 7)$.

22. Una recta l_1 pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -6)$, y otra recta l_2 pasa por el punto $(-7, 1)$ y el punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2.

23. Demostrar que los tres puntos $(2, 5)$, $(8, -1)$ y $(-2, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

24. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(6, -2)$ y $(1, -1)$ son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

25. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 2)$, $(5, 6)$, $(9, 9)$ y $(6, 5)$ son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

12. Resumen de fórmulas. A intervalos apropiados el estudiante debe construir tablas que comprendan un sumario de los resultados obtenidos. En tales tablas se apreciará a simple vista no solamente las relaciones importantes sino también algunas analogías o propiedades comunes; también servirán para reducir a un mínimo los resultados que deben aprenderse de memoria. Como ejemplo, presentamos a continuación un resumen, en forma de tabla, de los principales resultados obtenidos en este capítulo. El estudiante debe tener estos resultados claramente definidos en su mente, y, en particular, debe notar el paralelismo entre la condición geométrica por una parte y su representación analítica por otra.

CONDICION GEOMETRICA	REPRESENTACION ANALITICA
Longitud P_1P_2 de un segmento de recta dirigido, P_1P_2, con punto inicial P_1 y punto final P_2.	
P_1P_2 coincidiendo con el eje X: $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$. P_1P_2 paralelo al eje X: $P_1(x_1, y)$, $P_2(x_2, y)$, $y \neq 0$.	$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$.
P_1P_2 coincidiendo con el eje Y: $P_1(0, y_1)$, $P_2(0, y_2)$. $\overline{P_1P_2}$ paralelo al eje Y: $P_1(x, y_1)$, $P_2(x, y_2)$, $x \neq 0$.	$\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1$.
Distancia d entre dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

CONDICION GEOMETRICA	REPRESENTACION ANALITICA
Coordenadas (x, y) del punto P que divide al segmento rectilíneo dirigido $\overline{P_1 P_2}$, con puntos extremos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en la razón dada $r = \overline{P_1 P} : \overline{P P_2}$.	$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + r x_2}{1 + r} \\ y = \dfrac{y_1 + r y_2}{1 + r} \end{array}\right\} r \neq -1.$
Coordenadas (x, y) del punto medio del segmento dirigido, $\overline{P_1 P_2}$ cuyos extremos dados son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.
Pendiente m de la recta que pasa por los dos puntos dados diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2.$
Angulo θ formado por dos rectas con pendiente inicial m_1 y pendiente final m_2.	$\operatorname{tg} \theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \quad m_1 m_2 \neq -1.$
Condición necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas dadas de pendientes m_1 y m_2.	$m_1 = m_2$.
Condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de dos rectas dadas de pendientes m_1 y m_2.	$m_1 m_2 = -1$.