CAPITULO IV

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

38. Introducción. Después de la recta, la línea más familiar al estudiante es la circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de Geometría elemental. En el Artículo 22 hemos considerado la circunferencia como un ejemplo específico de lugar geométrico. En este capítulo haremos un estudio detallado de la ecuación de la circunferencia y deduciremos algunas de sus propiedades especiales.

39. Ecuación de la circunferencia; forma ordinaria. La ecuación de la circunferencia se obtendrá a partir de la siguiente

DEFINICIÓN. *Circunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*.

TEOREMA 1. *La circunferencia cuyo centro es el punto* (h, k) *y cuyo radio es la constante* r, *tiene por ecuación*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $P(x, y)$ (fig. 53) un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r. Entonces, por definición de circunferencia, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{CP}| = r, \tag{1}$$

la cual, por el teorema 2 del Artículo 6, está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r,$$

de donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{2}$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2), de manera que se verifica la igualdad

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2.$$

De aquí se deduce, extrayendo la raíz cuadrada,

$$\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} = r,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, demostrados los teoremas directo y recíproco, resulta que (2) es la ecuación buscada.

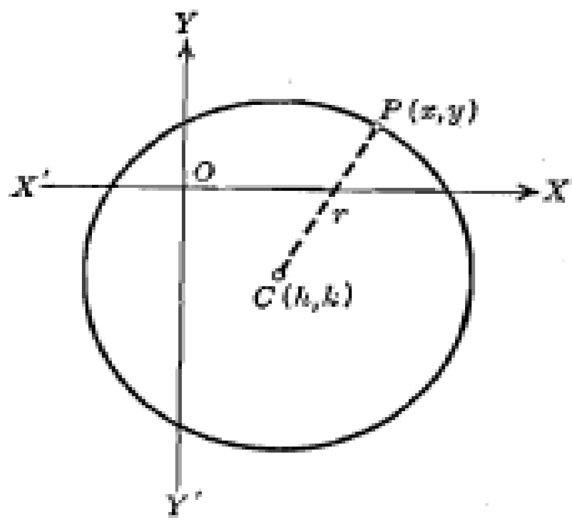

Fig. 53

Para el caso particular en que el centro C está en el origen, $h = k = 0$, y tenemos:

Corolario. *La circunferencia de centro en el origen y radio* r *tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

Notas. 1. La ecuación (2) se conoce como la *ecuación ordinaria* o *forma ordinaria* de la ecuación de una circunferencia. En general, designaremos como forma ordinaria aquella ecuación de una curva que nos permita obtener más rápida y fácilmente sus características importantes. Así, por ejemplo, en el caso de la ecuación (2) podemos obtener, inmediatamente, las coordenadas del centro y el radio.

2. El tipo más simple de la ecuación ordinaria de una curva se denomina frecuentemente *forma canónica*. Por tanto, la ecuación (3) es la forma canónica de la ecuación de una circunferencia.

Por el teorema 1 observamos que, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse inmediatamente. Esto sugiere un método para obtener la ecuación de una circunferencia en cualquier problema dado; todo lo que se necesita es obtener las coordenadas del centro y la longitud del radio a partir de las condiciones dadas. La construcción de una circunferencia, en Geometría elemental, implica la determinación del centro y el radio; el método allí empleado, aunque no siempre es el más corto, puede usarse para obtener en Geometría analítica la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $P_1(-1, 1)$, $P_2(3, 5)$ y $P_3(5, -3)$.

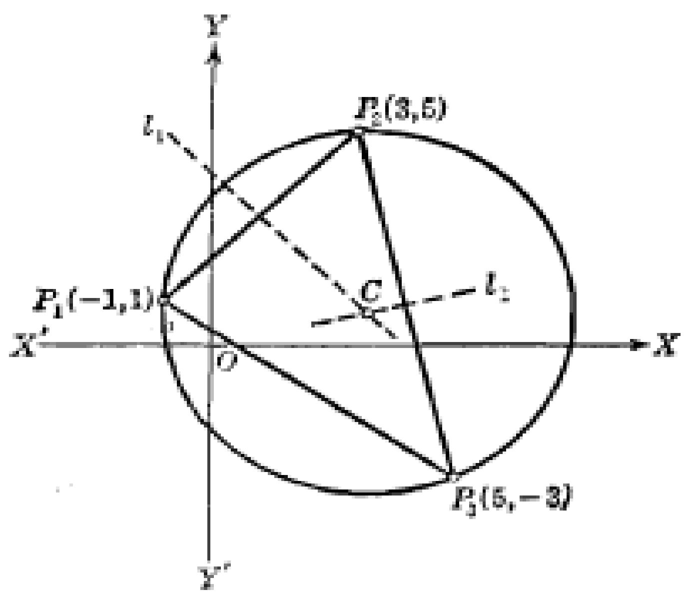

Fig. 54

Solución. La construcción de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es un problema conocido de la Geometría elemental. El método consiste en construir las mediatrices l_1 y l_2, respectivamente, de dos cualesquiera de los lados, digamos P_1P_2 y P_2P_3 (fig. 54). La intersección C de l_1 y l_2 es el centro y la distancia de C a uno cualquiera de los puntos P_1, P_2, P_3 es el radio. Ahora determinaremos la ecuación de la circunferencia siguiendo este mismo método analíticamente.

Por los métodos del Capítulo III, se puede demostrar rápidamente que las ecuaciones de las mediatrices l_1 y l_2 son $x + y = 4$ y $x - 4y = 0$, respectivamente. La solución común de estas dos ecuaciones es $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, de manera que las coordenadas del centro C son $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Por el teorema 2 del Artículo 6, el radio está dado por

$$r = |\overline{CP_1}| = \sqrt{\left(\frac{16}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 1\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{442}\,.$$

Por tanto, por el teorema 1 anterior, la ecuación buscada es

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}.$$

Se recomienda al estudiante que verifique el hecho de que las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y P_3 satisfacen la ecuación hallada de la circunferencia.

EJERCICIOS. Grupo 15

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3, -5)$ y radio 7.

2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 5)$. Hallar la ecuación de la curva.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(7, -6)$ y que pasa por el punto $A(2, 2)$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -4)$ y que es tangente al eje Y.

5. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$.

7. La ecuación de una circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Demostrar que el punto $A(2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4, 1)$ es exterior.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$, $2x + 7y + 9 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$.

10. Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x - 7y + 25 = 0$. Hállese la longitud de la cuerda.

11. Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda del ejercicio 10, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Los ejercicios 12-16 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(2, \frac{9}{4})$ y $C(5, 0)$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

16. Demostrar que la circunferencia del ejercicio 15 pasa por los pies de las alturas del triángulo.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje X y que pasa por los dos puntos $A(1, 3)$ y $B(4, 6)$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje Y y que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(6, -4)$.

19. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3, 3)$ y $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hállese su ecuación.

20. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $9x + 2y + 13 = 0$, $3x + 8y - 47 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

21. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$ El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

22. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuacióm de la tangente a este círculo en el punto $(6, 7)$.

23. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $(3, 3)$. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B(3, -1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$. (Dos soluciones.)

40. Forma general de la ecuación de la circunferencia. Si desarrollamos la ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{1}$$

obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0,$$

lo cual puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

en donde

$$D = -2h, \quad E = -2k \quad \text{y} \quad F = h^2 + k^2 - r^2.$$

Se deduce, por lo tanto, que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede escribirse en la forma (2), llamada *forma general* de la ecuación de la circunferencia. El problema que se presenta ahora es averiguar si, recíprocamente, toda ecuación de la forma general (2) representa una circunferencia. Para contestar esta pregunta, pasaremos de la forma (2) a la forma (1) empleando el método de completar cuadrados. Ordenando los términos de (2), resulta

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F;$$

y sumando $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$ a ambos miembros, obtenemos

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

de donde,

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad (3)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (3), vemos que depende del valor del segundo miembro de (3) el que (3) represente o no una circunferencia. Hay tres casos posibles por considerar:

a) Si $D^2+E^2-4F>0$, la ecuación (3) representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

b) Si $D^2+E^2-4F=0$, la ecuación (3) se dice, con frecuencia, que representa una circunferencia de radio cero; se dice también que es un círculo punto o círculo nulo. Desde nuestro punto de vista, sin embargo, la ecuación (3) representa un solo punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$.

c) Si $D^2+E^2-4F<0$, la ecuación (3) se dice que representa un círculo imaginario. En nuestra Geometría real, sin embargo, la ecuación (3) *no representa*, en este caso, un *lugar geométrico*.

Aunque el caso (*b*) puede considerarse como un caso límite del caso (*a*), en adelante consideraremos que una ecuación representa una circunferencia solamente en el caso (*a*). Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación* $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ *representa una circunferencia de radio diferente de cero, solamente si*

$$D^2+E^2-4F>0.$$

Las coordenadas del centro son, entonces, $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ *y el radio es* $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

NOTA. Si se da la ecuación de una circunferencia en la forma general, se aconseja al estudiante que no proceda mecánicamente, usando las fórmulas dadas en el teorema 2, para obtener el centro y el radio. En vez de esto, es conveniente que reduzca la ecuación a la forma ordinaria por el método de completar cuadrados, tal como se hizo en la deducción del teorema mismo.

Ejemplo. Reducir las tres ecuaciones siguientes a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hállense su centro y su radio.

$$a)\quad 2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0.$$
$$b)\quad 36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0.$$
$$c)\quad x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0.$$

Solución. *a*) Primero dividimos la ecuación por 2, coeficiente de x^2, y pasamos el término independiente al segundo miembro. Esto nos da, después de volver a ordenar los términos,

$$(x^2 - 5x) + (y^2 + 3y) = \frac{15}{2}.$$

Para completar los cuadrados, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros. Esto nos da

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4},$$

que puede escribirse en la forma

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16.$$

Por tanto, la ecuación dada representa una circunferencia cuyo centro es $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ y cuyo radio es 4.

b) Dividiendo la ecuación por 36, trasponiendo el término independiente, y volviendo a ordenar los términos, obtenemos

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + (y^2 - 3y) = -\frac{97}{36}.$$

Completando los cuadrados, resulta

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -\frac{97}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4},$$

de donde,

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (*b*) es el punto único $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$.

c) Ordenando los términos y completando los cuadrados, obtenemos

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -29 + 16 + 9,$$

de donde,

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -4.$$

Por tanto, la ecuación (*c*) no representa ningún lugar geométrico real.

41. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas. En la ecuación ordinaria de la circunferencia (Art. 39),

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \tag{1}$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, h, k y r. De manera semejante, en la ecuación general (Art. 40),

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, D, E y F. Como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse en cualquiera de las dos formas (1) o (2), la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por tanto, *analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes*. Geométricamente, una circunferencia queda, también, perfectamente determinada por tres condiciones independientes; así, por ejemplo, queda determinada por tres cualesquiera de sus puntos. El estudiante debe comparar estas observaciones con la discusión análoga que sobre la recta dimos en el Artículo 29. Vemos, por lo tanto, que además del método estudiado en el Artículo 39 tenemos ahora otro método para determinar la ecuación de una circunferencia.

Ejemplo 1. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -3)$.

Solución. Este problema es idéntico al ejemplo dado en el Artículo 39. Supongamos que la ecuación buscada es, en la forma general,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

en donde las constantes D, E y F deben ser determinadas.

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (2). De acuerdo con esto, tenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados:

$$\begin{cases} (-1, 1), & 1 + 1 - D + E + F = 0, \\ (3, 5), & 9 + 25 + 3D + 5E + F = 0, \\ (5, -3), & 25 + 9 + 5D - 3E + F = 0, \end{cases}$$

que pueden escribirse más abreviadamente así:

$$\begin{cases} D - E - F = 2, \\ 3D + 5E + F = -34, \\ 5D - 3E + F = -34. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D = -\frac{32}{5}, \quad E = -\frac{8}{5}, \quad F = -\frac{34}{5},$$

de manera que sustituyendo estos valores en (2), obtenemos

$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{34}{5} = 0,$$

o sea,

$$5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$$

como ecuación de la circunferencia buscada.

El centro y el radio de obtienen reduciendo la última ecuación a la forma ordinaria

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25},$$

de donde el centro es $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y el radio es $\frac{1}{5}\sqrt{442}$.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos (6, 2), (8, 0) y cuyo centro está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$.

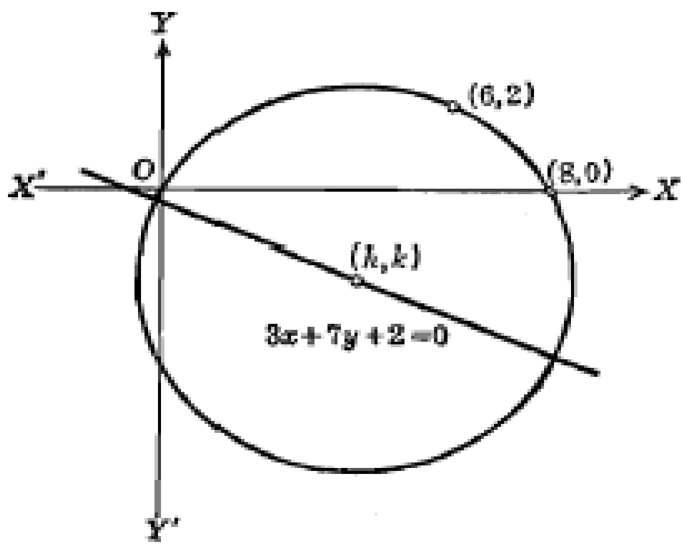

Fig. 55

Solución. Supongamos que la ecuación buscada, en la forma ordinaria, es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Como el centro (h, k) está sobre la recta $3x + 7y + 2 = 0$, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta, y tenemos

$$3h + 7k + 2 = 0. \qquad (3)$$

También, como los puntos $(6, 2)$ y $(8, 0)$ están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Por tanto, tenemos las dos ecuaciones

$$(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2, \tag{4}$$

$$(8 - h)^2 + k^2 = r^2. \tag{5}$$

La solución del sistema formado por las tres ecuaciones (3), (4) y (5) con las tres incógnitas h, k y r da

$$h = 4, \quad k = -2, \quad r = 2\sqrt{5}.$$

Por tanto, la ecuación buscada es

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

El centro es el punto $(4, -2)$ y el radio es $2\sqrt{5}$. La gráfica aparece en la figura 55.

En el Artículo 35 obtuvimos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados diferentes en forma de determinante. Por un argumento semejante, podemos obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, no colineales, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, en forma de determinante. El resultado está dado por el

Teorema 3. *La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no colineales* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ *viene dada por el determinante*

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nota. Esta forma es útil para determinar si cuatro puntos dados están o no sobre una circunferencia. Se dice que tales puntos son *concíclicos*.

EJERCICIOS. Grupo 16

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3, reduciendo la ecuación dada a la forma ordinaria, determinar si representa o no una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa, hallar su centro y su radio.

1. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0.$
2. $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0.$
3. $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0.$
4. Hallar el área del círculo cuya ecuación es

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0.$$

5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es

$$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0.$$

6. Demostrar que las circunferencias $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ son concéntricas.

7. Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes.

8. Demostrar, por dos métodos, que las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0 \quad y \quad 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$$

no se cortan.

En cada uno de los ejercicios 9-11, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, usando el método del ejemplo 1, Artículo 41.

9. $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(7, 0)$.

10. $(2, -2)$, $(-1, 4)$, $(4, 6)$.

11. $(4, -1)$, $(0, -7)$, $(-2, -3)$.

12. Resolver el ejercicio 9 por el método del ejemplo del Artículo 39.

13. Resolver el ejercicio 10 por el método del ejemplo 2, Artículo 41.

14. Resolver el ejercicio 11 usando el determinante del teorema 3, Artículo 41.

15. Por medio del teorema 3, Artículo 41, demostrar que los cuatro puntos $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, $(7, 3)$ son concíclicos.

16. Resolver el ejercicio 15 hallando la ecuación de la circunferencia que pasa por tres cualesquiera de los puntos y demostrando después que las coordenadas del cuarto punto satisfacen esta ecuación.

17. Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes son

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0.$$

Hallar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que sean concéntricas.

18. La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $5x - 12y = 1$.

19. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$$

en el punto $(4, 5)$.

20. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(11, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. (Dos soluciones.)

21. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -4)$, $(2, -1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x + 7y + 5 = 0$.

22. Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto $(3, 2)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

23. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$$

en el punto $(6, 5)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto $(-2, 1)$.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(5, 9)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto $(1, 1)$.

26. Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos $(0, 2)$, $(7, 3)$. Hállese su ecuación. (Dos soluciones.)

27. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta que pasa por el punto $(-1, 5)$ no puede ser tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interpretar el resultado geométricamente.

28. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $7x - 2y - 1 = 0$ y que es tangente a cada una de las rectas $5x - 12y + 5 = 0$ y $4x + 3y - 3 = 0$. (Dos soluciones.)

29. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son $4x - 3y = 0$, $4x + 3y - 8 = 0$, $y = 0$.

[redacted] Una circunferencia que es tangente a un lado de un triángulo y a las [redacted]longaciones de los otros dos lados se llama *exinscrita* al triángulo. Hallar las ecuaciones de las tres circunferencias exinscritas al triángulo del ejercicio 29. (Véase el ejercicio 16 del grupo 12.)

31. Determinar el valor de la constante k para que la recta $2x + 3y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$.

32. Hallar las ecuaciones de las rectas que tienen de pendiente 5 y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$.

33. Desde el punto $A(-2, -1)$ se traza una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. Si B es el punto de contacto, hallar la longitud del segmento AB.

34. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(6, 1)$ y es tangente a cada una de las rectas $4x - 3y + 6 = 0$, $12x + 5y - 2 = 0$. (Dos soluciones.)

35. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, -1)$ y $(5, 3)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 13 = 0$. (Dos soluciones.)

42. Familias de circunferencias. Ahora consideraremos familias o haces de circunferencias de la misma manera que en el Artículo 36 consideramos familias de rectas. En el Artículo 41 demostramos que una circunferencia y su ecuación se determinan cada una por tres condiciones independientes. Una circunfererencia que satisface menos de tres condiciones independientes no es, por lo tanto, única. La ecuación de una circunferencia que satisface solamente a dos condiciones, contiene una constante arbitraria llamada *parámetro*. Se dice entonces que tal ecuación representa una *familia* de circunferencias *de un parámetro*. Por ejemplo, la familia de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(1, 2)$ tiene por ecuación

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = k^2,$$

en donde el parámetro k es cualquier número positivo

Consideremos ahora el caso importante de la familia de curvas que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias diferentes dadas cualesquiera, cuyas ecuaciones son

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \tag{1}$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0, \tag{3}$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Supongamos que los círculos C_1 y C_2 se cortan en dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Como las coordenadas (x_1, y_1) de P_1 satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2), también satisfacen a la ecuación (3), y ésta se reduce entonces a la forma $0 + k \cdot 0 = 0$, que es verdadera para todos los valores de k. Análogamente, las coordenadas (x_2, y_2) de P_2 que satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2) satisfacen también a la ecuación (3) para todos los valores de k. Por tanto, la ecuación (3) representa la una familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias C_1 y C_2. Para determinar la naturaleza de las curvas de esta familia, escribimos la ecuación (3) en la forma

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0. \tag{4}$$

Si $k = -1$, la ecuación (4) se reduce a una de primer grado y, por lo tanto, representa una línea recta. Pero, para cualquier otro valor de k, la ecuación (4) representa una circunferencia de acuerdo con el teorema 2 del Artículo 40. En particular, para $k = 0$, la ecuación (4) se reduce a la ecuación C_1.

La ecuación (3) es particularmente útil para obtener la ecuación de una curva que pasa por las intersecciones de las circunferencias dadas, ya que entonces no es necesario determinar las coordenadas de los puntos de intersección.

Ejemplo. Las ecuaciones de dos circunferencias son

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0,$$

y

$$C_2: \quad x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0.$$

Hallar la ecuación de la circunferencia C_3 que pasa por las intersecciones de C_1 y C_2 y tiene su centro sobre la recta l: $x - y - 2 = 0$.

Solución. La circunferencia buscada C_3 es un elemento de la familia

$$x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 + k(x^2 + y^2 - x - 6y + 3) = 0, \qquad (5)$$

en donde el parámetro k debe determinarse por la condición de que el centro de C_3 está sobre la recta l. El centro de cualquier circunferencia de la familia (5) se halla fácilmente y sus coordenadas son $\left(\frac{k-7}{2(k+1)}, \frac{3k+5}{k+1}\right)$. Como estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de l, tenemos

$$\frac{k-7}{2(k+1)} - \frac{3k+5}{k+1} - 2 = 0,$$

de donde $k = -\frac{7}{3}$. Sustituyendo este valor de k en (5) y simplificando, obtenemos para ecuación de C_3:

$$x^2 + y^2 - 7x - 3y - 18 = 0.$$

En la figura 56 se han trazado las tres circunferencias C_1, C_2, C_3, y la recta l. Se deja al estudiante, como ejercicio, la demostración de que los centros de C_1, C_2 y C_3 son colineales.

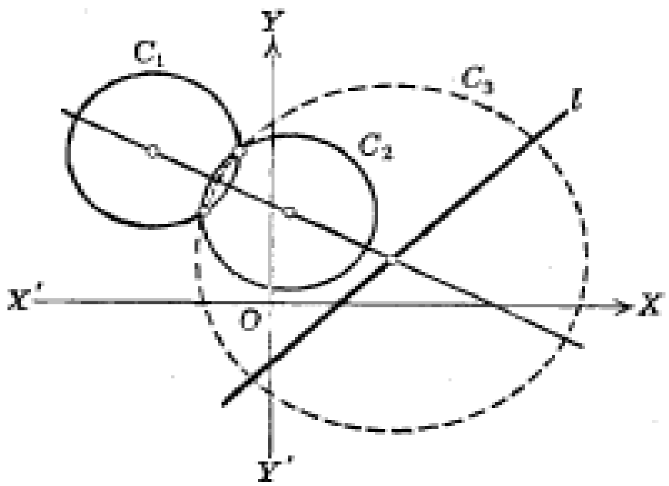

Fig. 56

Consideremos ahora el caso de dos circunferencias C_1 y C_2 tangentes entre sí, en el punto $P_3(x_3, y_3)$. Por un razonamiento análogo al anterior, en el caso de intersección en dos puntos diferentes, podemos demostrar que, para cada valor de k diferente de -1, la ecuación (3) representa una circunferencia tangente a C_1 y C_2 en P_3.

Finalmente, consideremos el caso de que C_1 y C_2 no tengan ningún punto común. Entonces, las coordenadas de un punto que satisfacen la ecuación (2) no pueden satisfacer la ecuación (1) y, por lo tanto, no pueden satisfacer la ecuación (3) para ningún valor de k. Análogamente, las coordenadas de un punto que satisfacen (1) no pueden satisfacer (2), y, por lo tanto, tampoco (3), para ningún valor de k excepto $k = 0$, en cuyo caso, (3) se reduce a (1).

En resumen, ninguna circunferencia de la familia (3), excepto C_1, tiene un punto en común con C_1 o C_2. Aun más, sea P_4 un punto cualquiera que esté sobre cualquier elemento de la familia (3), excepto sobre C_1. Acabamos de demostrar que P_4 no puede estar sobre C_2. Por tanto, si se sustituyen las coordenadas de P_4 en las ecuaciones (1) y (2), los primeros miembros no se reducirán a cero sino que tendrán valores diferentes a cero, digamos k_1 y k_2, respectivamente. Por lo tanto, si se sustituyen en (3) las coordenadas de P_4, la ecuación toma la forma

$$k_1 + kk_2 = 0,$$

de donde k tiene el único valor $-\frac{k_1}{k_2}$. Esto significa que hay solamente una circunferencia de la familia (3) que pasa por el punto P_4. Como P_4 se eligió como *cualquier* punto sobre *cualquier* elemento de (3), excepto C_1, se deduce que ningún par de circunferencias de la familia (3) tienen un punto en común.

En los dos primeros casos considerados anteriormente, es decir, cuando C_1 y C_2 tienen uno o dos puntos comunes, la ecuación (3) representa una circunferencia real para todo valor de k, ya que por lo menos existe un punto del lugar geométrico. Pero esto no ocurre cuando C_1 y C_2 no tienen ningún punto común. Entonces no se puede asegurar que la ecuación (3) represente una circunferencia real para todo valor de k. Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común es fácil encontrar ejemplos, en los que, para valores específicos de k, la ecuación (3) no representa ninguna circunferencia real. (Ver el ejercicio 18 del grupo 17.)

La recta que pasa por los centros de dos circunferencias no concéntricas se llama *recta de los centros*. Es muy sencillo demostrar que todas las circunferencias de la familia (3) tienen su centro en la recta de los centros de C_1 y C_2. En efecto, los centros de C_1 y C_2 son $\left(-\frac{D_1}{2},\ -\frac{E_1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{D_2}{2},\ -\frac{E_2}{2}\right)$, respectivamente, y la ecuación de la recta que contiene a estos dos puntos es

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0,$$

la cual se satisface por las coordenadas $\left(-\frac{D_1 + kD_2}{2(k+1)},\ -\frac{E_1 + kE_2}{2(k+1)}\right)$ del centro de cualquier circunferencia definida por (3).

Todos los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 4. *Si las ecuaciones de dos circunferencias dadas cualesquiera* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1:\quad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0,$$

$$C_2:\quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0,$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa una familia de circunferencias todas las cuales tienen sus centros en la recta de los centros de C_1 *y* C_2.

Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes, la ecuación representa, para todos los valores de k diferentes de -1, todas las circunferencias que pasan por los dos puntos de intersección C_1 y C_2, con la única excepción de C_2 misma.

Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, la ecuación representa, para todos los valores de k diferentes de -1, todas las circunferencias que son tangentes a C_1 y C_2 en su punto común, con la única excepción de C_2 misma.

Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común la ecuación representa una circunferencia para cada valor de k diferente de -1, siempre que la ecuación resultante tenga coeficientes que satisfagan las condiciones especificadas en el teorema 2 del Artículo 40. Ningún par de circunferencias de la familia tiene un punto común con ninguna de las dos circunferencias C_1 y C_2.

43. Eje radical. En el artículo precedente hemos considerado dos circunferencias diferentes, C_1 y C_2, de ecuaciones

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \tag{1}$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0. \tag{2}$$

A partir de estas ecuaciones formamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0, \tag{3}$$

y la discutimos como ecuación de una familia de circunferencias para todos los valores de k, excepto -1. Si $k = -1$, la ecuación (3) toma la forma

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0. \tag{4}$$

Si C_1 y C_2, no son concéntricas, se verificará $D_1 \neq D_2$ o $E_1 \neq E_2$, o ambas, de manera que por lo menos uno de los coeficientes de x y y en (4) será diferente de cero, y la ecuación (4) representa entonces una línea recta llamada *eje radical* de C_1 y C_2.

Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes, se sigue, de la discusión del Artículo 42, que el eje radical pasa por estos dos puntos y, por tanto, coincide con su cuerda común. Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, su eje radical es la tangente común a ambas circunferencias. Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común y no son concéntricas, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguna de las dos circunferencias.

Ahora demostraremos que el eje radical de dos circunferencias cualesquiera es perpendicular a su recta de los centros. En efecto, en el Artículo 42 vimos que la ecuación de la recta de los centros de C_1 y C_2 es

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0,$$

y la pendiente de esta recta es $\frac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}$, si $D_1 \neq D_2$. La pendiente del eje radical, deducida de la ecuación (4), es $-\frac{D_1 - D_2}{E_1 - E_2}$, si $E_1 \neq E_2$. Como estas pendientes son negativamente recíprocas, se sigue que el eje radical es perpendicular a la recta de los centros. Si $D_1 = D_2$, entonces, por la ecuación (4), resulta que el eje radical es paralelo al eje X, y por la ecuación anterior, la recta de los centros es paralela al eje Y; por tanto, en este caso, el eje radical y la línea de los centros también son perpendiculares entre sí. Análogamente, si $E_1 = E_2$, el eje radical es paralelo al eje Y y la recta de los centros es paralela al eje X; por lo tanto, son perpendiculares entre sí.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$C_1: \quad 2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0. \qquad (5)$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0. \qquad (6)$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

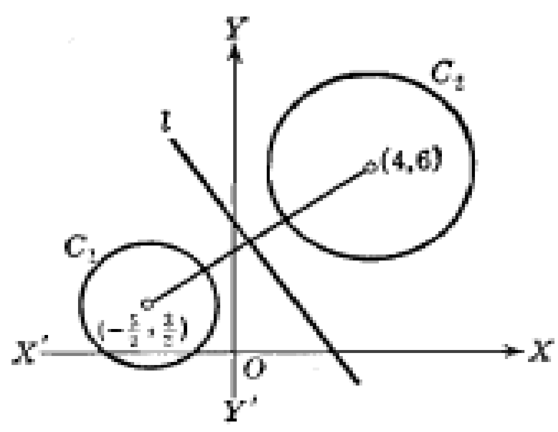

Fig. 57

Solución. Si multiplicamos la ecuación (6) por 2 y la restamos de la ecuación (5), obtenemos

$$l: \quad 26x + 18y - 77 = 0$$

como ecuación del eje radical. Su pendiente es $-\frac{13}{9}$.

Las coordenadas de los centros C_1 y C_2 se encuentran fácilmente y son $\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $(4, 6)$, respectivamente, de manera que la pendiente de la recta de los centros es $\frac{6-(3/2)}{4+(5/2)} = \frac{9}{13}$, que es negativamente recíproca de la pendiente del eje radical. Por tanto, el eje radical es perpendicular a la recta de los centros. Las circunferencias C_1 y C_2, su recta de los centros y su eje radical l, se han trazado en la figura 57.

Para deducir una propiedad importante del eje radical, estableceremos el siguiente teorema:

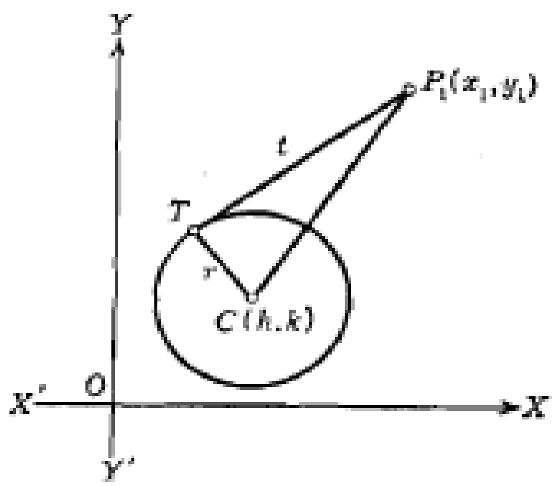

Fig. 58

TEOREMA 5. *Si* t *es la longitud de la tangente trazada del punto exterior* $P_1(x_1, y_1)$ *a la circunferencia* $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, *entonces*

$$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea T (fig. 58) el punto de tangencia, de manera que $t = \overline{P_1 T}$. Como $P_1 T$ es tangente a la circunferencia, el radio CT es perpendicular a $P_1 T$. Por tanto, en el triángulo rectángulo $P_1 TC$, tendremos:

$$t^2 = \overline{CP_1}^2 - r^2. \qquad (7)$$

Por el teorema 2, Artículo 6,

$$\overline{CP_1}^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2,$$

valor que, sustituído en la ecuación (7), da

$$t^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2.$$

de donde,

$$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

NOTA. Evidentemente, se pueden trazar dos tangentes del punto P_1 al círculo, pero sus longitudes son iguales.

Ejemplo 2. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $(-3, 2)$ a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 - 30x - 18y - 2 = 0$.

Solución. Para aplicar el teorema 5, es necesario hacer que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales a la unidad. Para ello dividiendo por 9, resulta:

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x - 2y - \frac{2}{9} = 0.$$

Sustituyendo x por -3 y y por 2 en el primer miembro de esta ecuación, obtenemos

$$t^2 = 9 + 4 + 10 - 4 - \frac{2}{9} = \frac{169}{9},$$

de donde se deduce que la longitud de la tangente es $t = \frac{13}{3}$. Debe observarse que, si se utilizara la ecuación de la circunferencia en la forma original, es decir, sin dividir por 9, el resultado sería el triple del valor correcto. Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejercicio.

Por medio del teorema 5, podemos demostrar fácilmente que *el eje radical de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas desde él a las dos circunferencias son iguales*. En efecto, sean C_1 y C_2 las dos circunferencias no concéntricas dadas por las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. Sea $P(x, y)$ el punto móvil y sean t_1 y t_2, respectivamente, las longitudes de las tangentes trazadas de P a C_1 y C_2. Entonces, por el teorema 5,

$$t_1^2 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1,$$

y

$$t_2^2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2,$$

Como, por hipótesis, $t_1 = t_2$, de estas dos últimas ecuaciones se deduce que

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0,$$

que, según (4), es la ecuación del eje radical de C_1 y C_2. Podemos demostrar, recíprocamente, que, si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto que está sobre el eje radical, las longitudes de las tangentes trazadas de P_1 a C_1 y C_2 son iguales.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 6. *Si las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas* C_1 *y* C_2 *son*

$$C_1:\quad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0\,,$$

$$C_2:\quad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0\,,$$

la eliminación de x^2 *y* y^2 *entre estas dos ecuaciones da la ecuación lineal*

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0\,,$$

que es la ecuación del eje radical de C_1 *y* C_2.

Si C_1 *y* C_2 *se cortan en dos puntos diferentes, su eje radical coincide con su cuerda común; si* C_1 *y* C_2 *son tangentes entre sí, su eje radical es su tangente común, y si* C_1 *y* C_2 *no tienen ningún punto común, su eje radical no tiene ningún punto común con ninguno de ellos.*

El eje radical de C_1 *y* C_2 *es perpendicular a la recta de los centros; es también el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas por él a* C_1 *y* C_2 *son iguales.*

Consideremos tres circunferencias, de las cuales no hay dos que sean concéntricas. Cada par tiene un eje radical, y las tres, tomadas a pares, tienen tres ejes radicales Si las tres circunferencias no tienen una recta de los centros común, sus tres ejes radicales se cortan en un punto llamado *centro radical*. La demostración de la existencia del centro radical de tres circunferencias dadas se deja como ejercicio al estudiante.

EJERCICIOS. Grupo 17

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto $(-3, 5)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

2. Escribir la ecuación de la familia de circunferencias cuyos centros están sobre el eje Y. Desígnense los dos parámetros por k_1 y k_2. Dibújense tres elementos de la familia conservando a k_1 constante y asignando a k_2 tres valores diferentes. Dibújense otros tres miembros de la familia haciendo que k_2 permanezca constante y asignando a k_1 tres valores diferentes.

3. Escribir la ecuación de la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen. Dibujar seis elementos de la familia asignando valores a los dos parámetros como en el ejercicio 2.

4. Determinar la ecuación de la familia de circunferencias, cada una de las cuales pasa por el origen y el punto $(1, 3)$. Dibujar tres elementos de la familia, especificando el valor del parámetro en cada caso.

5. Dibujar las dos circunferencias cuyas ecuaciones son

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \quad y \quad C_2 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 4y + 3 = 0.$$

También dibujar tres elementos de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ para valores de k diferentes de 0 y -1, y demostrar que sus centros están sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-8, 5)$ y por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el ejercicio 6.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0.$$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$. (Dos soluciones.)

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$, y que es tangente a la recta $x + 3y - 14 = 0$. (Dos soluciones.)

12. La ecuación de la familia de circunferencias dada en el teorema 4 del Artículo 42 no incluye a la ecuación de C_2. Usando dos parámetros k_1 y k_2, escríbase la ecuación de la familia de tal manera que incluya a C_2. (Véase la ecuación [6] del Artículo 36.) ¿A qué restricciones deben someterse los parámetros k_1 y k_2? ¿Qué relación debe existir entre k_1 y k_2 para obtener la ecuación de una línea recta?

13. Demostrar que las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 5 = 0$, son tangentes. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 en su punto común y que pasa por el punto $A(7, 2)$. Demostrar que el centro de esta circunferencia está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo centro está sobre la recta $3x + y + 5 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y cuyo radio es igual a $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. (Dos soluciones.)

16. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 13 en su punto común y que es tangente a la recta $x - 2y - 1 = 0$. (Dos soluciones.)

17. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-10, -2)$ y por las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ y la recta $x - y + 4 = 0$.

18. Demostrar que las circunferencias $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ y $C_2 \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y + 33 = 0$ no se cortan. Demostrar que para $k = -2$ el elemento correspondiente de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es una circun-

ferencia que no corta a ninguna de las dos circunferencias C_1 y C_2, y cuyo centro está sobre la recta de los centros de C_1 y C_2. Demuéstrese, también, que no existe ninguna circunferencia real si k toma uno cualquiera de los valores 1, 2, 3. Hállense otros valores de k para los cuales no exista circunferencia real.

19. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0, \quad 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 37 = 0,$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

20. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$9x^2 + 9y^2 - 54x - 48y + 64 = 0, \quad x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0,$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

21. Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$ y $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$.

22. Demostrar analíticamente que si dos circunferencias diferentes son concéntricas, su eje radical no existe.

23. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $P(3, 4)$ a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$.

24. Hallar la longitud de la tangente trazada del punto $P(-1, 3)$ a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 14x - 15y + 23 = 0$.

25. Obtener las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el eje radical del ejercicio 19, y demostrar que las longitudes de las tangentes trazadas de ese punto a las dos circunferencias son iguales.

26. Las ecuaciones de dos circunferencias no concéntricas son $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Demuéstrese que el eje radical de cualquier par de circunferencias de la familia $C_1 + kC_2 = 0$ es el mismo que el eje radical de C_1 y C_2.

27. Las ecuaciones de tres circunferencias son

$$x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Suponiendo que entre ellas no hay dos que sean concéntricas, hállense las ecuaciones de sus ejes radicales. Si las tres circunferencias no tienen una recta de centros común, demuéstrese que sus ejes radicales se encuentran en un punto común (el centro radical).

28. Hallar las coordenadas del centro radical de las tres circunferencias $x^2+y^2+2x-4y-6=0$, $x^2+y^2-4x-2y=0$ y $x^2+y^2+2x+12y+36=0$.

29. Hallar las longitudes de las tangentes trazadas del centro radical a las tres circunferencias del ejercicio 28, y demostrar que son iguales.

30. Demostrar que las tres circunferencias $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 17 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 16y + 71 = 0$ no tienen centro radical. Explicar el resultado.