CAPITULO VI

LA PARABOLA

53. Introducción. En su estudio previo de Geometría elemental, el estudiante conoció dos líneas: la línea recta y la circunferencia. Las dos líneas ya han sido estudiadas desde el punto de vista analítico. Ahora comenzamos el estudio de ciertas curvas planas no incluídas, ordinariamente, en un curso de Geometría elemental. Empezaremos con la curva conocida con el nombre de parábola.

54. Definiciones. La ecuación de la parábola la deduciremos a partir de su definición como el lugar geométrico de un punto que se mueve de acuerdo con una ley especificada.

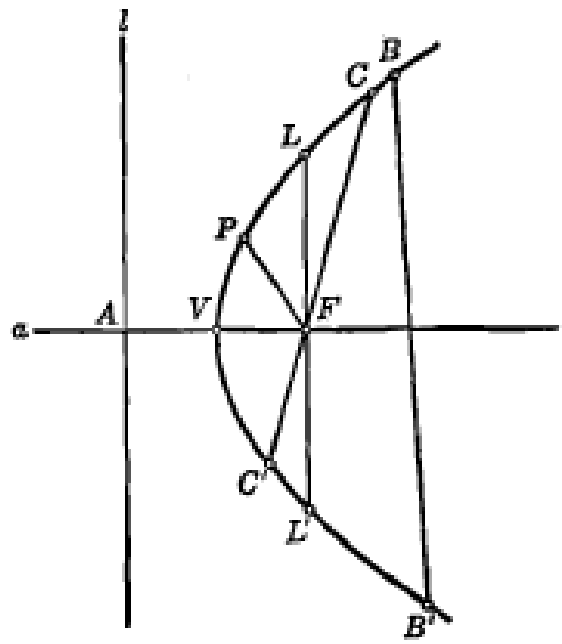

Fig. 74

DEFINICIÓN. Una *parábola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz* de la parábola. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz.

Designemos por F y l (fig. 74), el foco y la directriz de una parábola, respectivamente. La recta a que pasa por F y es perpendicular a l se llama *eje* de la parábola. Sea A el punto de intersección del eje y la directriz. El punto V, punto medio del segmento AF, está, por definición, sobre la parábola; este punto se llama *vértice*. El segmento de recta, tal como BB', que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama *cuerda;* en particular, una cuerda que pasa por el foco como CC', se llama *cuerda focal*. La cuerda focal LL' perpendicular al eje se llama *lado recto*. Si P es un punto cualquiera de la parábola, la recta FP que une el foco F con el punto P se llama *radio focal* de P, o *radio vector*.

55. Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado. Veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola cuyo vértice está en el origen (fig. 75) y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F está sobre el eje X; sean $(p, 0)$ sus coordenadas. Por definición de parábola, la ecuación de la directriz l es $x = -p$. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento PA perpendicular a l. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

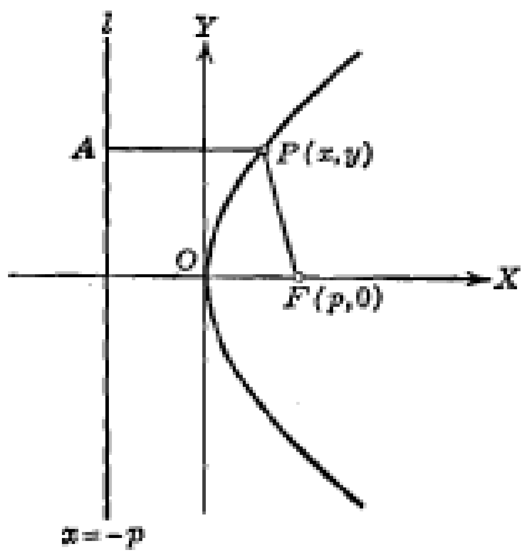

Fig. 75

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|. \qquad (1)$$

Por el teorema 2 del Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2};$$

y por el teorema 9 (Art. 33), tenemos

$$|\overline{PA}| = |x + p|.$$

Por tanto, la condición geométrica (1) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificamos, obtenemos

$$y^2 = 4px. \qquad (2)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfagan (2). Tendremos:

$$y_1^2 = 4px_1.$$

Si sumamos $(x_1 - p)^2$ a ambos miembros de esta ecuación, y extraemos la raíz cuadrada, obtenemos, para la raíz positiva,

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} = |\, x_1 + p \,|,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, P_1 está sobre la parábola cuya ecuación está dada por (2).

Ahora discutiremos la ecuación (2) siguiendo el método explicado en el Artículo 19. Evidentemente, la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee el lugar geométrico de (2) es con respecto al eje X. Despejando y de la ecuación (2), tenemos:

$$y = \pm 2\sqrt{px}. \qquad (3)$$

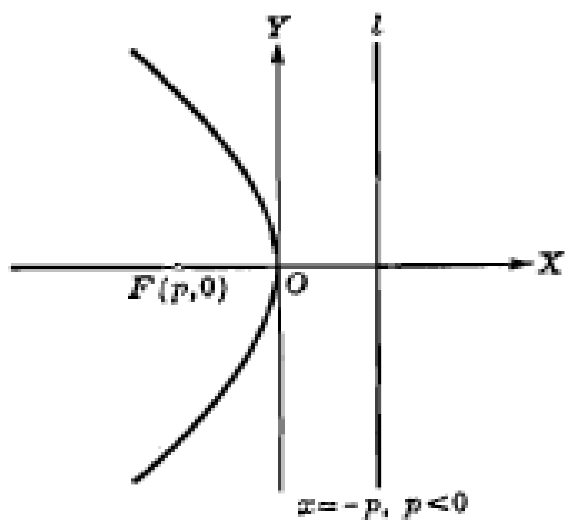

Fig. 76

Por tanto, para valores de y reales y diferentes de cero, p y x deben ser del mismo signo. Según esto, podemos considerar dos casos: $p > 0$ y $p < 0$.

Si $p > 0$, deben excluirse todos los valores negativos de x, y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje Y. Como no se excluye ningún valor positivo de x, y como y puede tomar todos los valores reales, el lugar geométrico de (2) es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia arriba y abajo del eje X. Esta posición es la indicada en la figura 75, y se dice que la parábola se abre hacia la derecha.

Análogamente, si $p < 0$, todos los valores positivos de x deben excluirse en la ecuación (3) y todo el lugar geométrico aparece a la izquierda del eje Y. Esta posición está indicada en la figura 76, y, en este caso, se dice que la parábola se abre hacia la izquierda.

Es evidente que la curva correspondiente a la ecuación (2) no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Según la ecuación (3), hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p; uno de ellos tiene la ordenada $2p$ y el otro la ordenada $-2p$. Como la abscisa del foco es p, se sigue (Art. 54) que la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se demuestra, análogamente, que la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py, \tag{4}$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$. Puede demostrarse fácilmente que, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 77 [a]); y, si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 77 [b]). La discusión completa de la ecuación (4) se deja como ejercicio al estudiante.

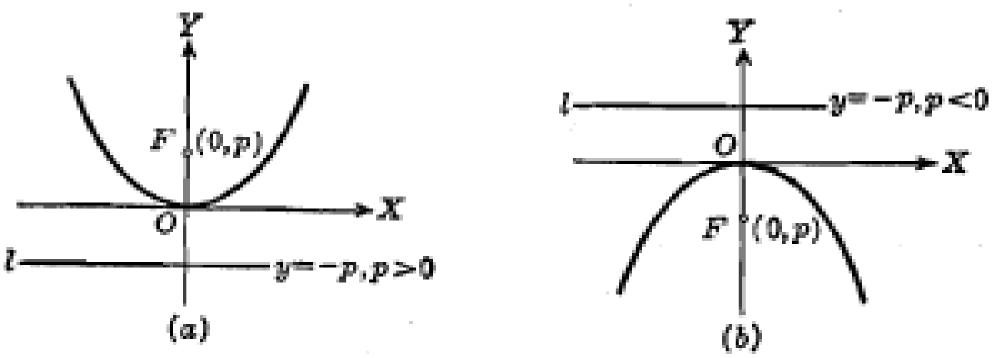

Fig. 77

Las ecuaciones (2) y (4) se llaman a veces la *primera ecuación ordinaria de la parábola*. Como son las ecuaciones más simples de la parábola, nos referimos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje el eje* X, *es*

$$y^2 = 4px,$$

en donde el foco es el punto $(p, 0)$ *y la ecuación de la directriz es* $x = -p$. *Si* $p > 0$, *la parábola se abre hacia la derecha; si* $p < 0$, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, *y el vértice está en el origen, su ecuación es*

$$x^2 = 4py,$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$, *y la ecuación de la directriz es* $y = -p$. *Si* $p > 0$, *la parábola se abre hacia arriba; si* $p < 0$, *la parábola se abre hacia abajo.*

En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de $4p$, *que es el coeficiente del término de primer grado.*

Ejemplo. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. Por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py. \tag{4}$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos

$$16 = 4p(-2),$$

de donde, $p = -2$, y la ecuación buscada es

$$x^2 = -8y.$$

También, por el teorema 1, el foco es el punto $(0, p)$, o sea, $(0, -2)$, la ecuación de la directriz es

$$y = -p,$$

o sea,

$$y = 2,$$

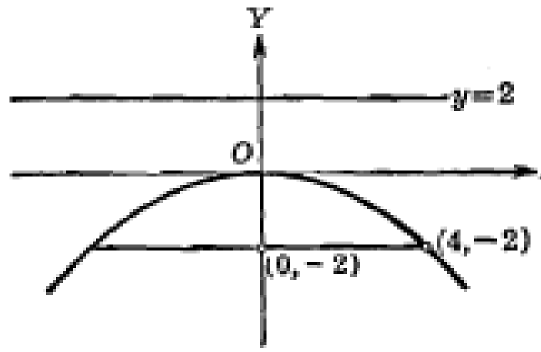

Fig. 78

y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la figura 78, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.

EJERCICIOS. Grupo 23

Dibujar para cada ejercicio la gráfica correspondiente.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1. $y^2 = 12x$.
2. $x^2 = 12y$.
3. $y^2 + 8x = 0$.
4. $x^2 + 2y = 0$.
5. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$.
6. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, cuando se conocen el foco y la directriz.
7. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, si se dan el foco y el vértice.
8. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(3, 0)$.
9. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$.
10. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.

12. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

13. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

14. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

15. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es igual a $|x_1 + p|$.

16. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$ cuya ordenada es igual a 6.

17. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.

19. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

20. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

21. Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X y Y, el eje y la directriz respectivamente.

En cada uno de los ejercicios 22-25, aplicando la definición de la parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

22. Foco $(3, 4)$, directriz $x - 1 = 0$.

23. Foco $(3, -5)$, directriz $y - 1 = 0$.

24. Vértice $(2, 0)$, foco $(0, 0)$.

25. Foco $(-1, 1)$, directriz $x + y - 5 = 0$.

56. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado. Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola (fig. 79) cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k), se sigue, por el teorema 1 del Artículo 55, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

$$y'^2 = 4px', \qquad (1)$$

en donde las coordenadas del foco F son $(p, 0)$ referido a los nuevos ejes. A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales X y Y, podemos obtener la ecuación (1) usando las ecuaciones de trasformación del teorema 1, Artículo 50, a saber,

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

de donde,

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Si sustituímos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \qquad (2)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \qquad (3)$$

en donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, *segunda ecuación ordinaria de la parábola*.

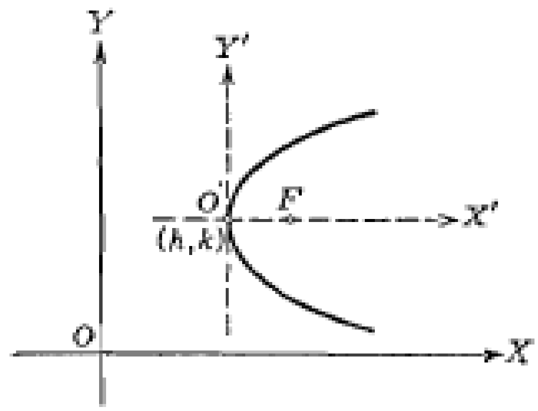

Fig. 79

Los resultados anteriores, junto con los obtenidos en el teorema 1 del Artículo 55, conducen al siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación de una parábola de vértice* (h, k) *y eje paralelo al eje* X, *es de la forma*

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

siendo $|p|$ *la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.*

Si $p > 0$, *la parábola se abre hacia la derecha; si* $p < 0$, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

Si el vértice es el punto (h, k) *y el eje de la parábola es paralelo al eje* Y, *su ecuación es de la forma*

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Si $p > 0$, *la parábola se abre hacia arriba; si* $p < 0$, *la parábola se abre hacia abajo.*

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (3, 4) y cuyo foco es el punto (3, 2). Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como en este caso cada uno de estos puntos tiene la misma abscisa 3, se

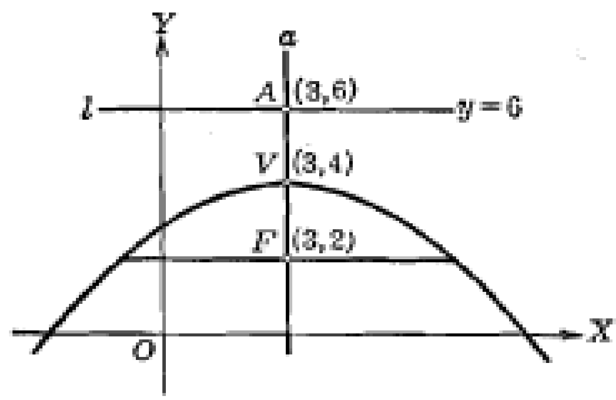

Fig. 80

sigue que el eje a es paralelo al eje Y, como se indica en la figura 80. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la parábola es de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Como el vértice V es el punto (3, 4), la ecuación puede escribirse

$$(x-3)^2 = 4p(y-4).$$

Ahora bien, $|p| = |\overline{FV}| = |4-2| = 2$. Pero, como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto, $p = -2$, y la ecuación de la parábola es

$$(x-3)^2 = -8(y-4),$$

y la longitud del lado recto es 8.

Designemos por A el punto en que el eje a corta a la directriz l. Como V (3, 4) es el punto medio del segmento AF, se sigue que las coordenadas de A son (3, 6). Por tanto, la ecuación de la directriz es $y = 6$.

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación

$$(y-k)^2 = 4p(x-h),$$

obtenemos

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0, \tag{4}$$

en donde $a_1 = -4p$, $a_2 = -2k$ y $a_3 = k^2 + 4ph$. Recíprocamente, completando el cuadrado en y, podemos demostrar que una ecuación de la forma (4) representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X.

Al discutir la ecuación de la forma (4) suponemos que $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, la ecuación toma la forma

$$y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \tag{5}$$

que es una ecuación cuadrática en la única variable y. Si las raíces de (5) son reales y desiguales, digamos r_1 y r_2, entonces la ecuación (5) puede escribirse en la forma

$$(y - r_1)(y - r_2) = 0,$$

y el lugar geométrico correspondiente consta de dos rectas diferentes, $y = r_1$ y $y = r_2$, paralelas ambas al eje X. Si las raíces de (5) son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geométricamente por una sola recta paralela al eje X. Finalmente, si las raíces de (5) son complejas, no existe ningún lugar geométrico.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la parábola

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Los resultados se resumen en el siguiente

TEOREMA 3. *Una ecuación de segundo grado en las variables* x *y* y *que carezca del término en* xy *puede escribirse en la forma*

$$\mathrm{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}.$$

Si $\mathrm{A = 0}$, $\mathrm{C \neq 0}$ *y* $\mathrm{D \neq 0}$, *la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje* X. *Si, en cambio,* $\mathrm{D = 0}$, *la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje* X, *dos rectas coincidentes paralelas al eje* X, *o ningún lugar geométrico, según que las raíces de* $\mathrm{Cy^2 + Ey + F = 0}$ *sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.*

Si $\mathrm{A \neq 0}$, $\mathrm{C = 0}$ *y* $\mathrm{E \neq 0}$, *la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje* Y. *Si, en cambio,* $\mathrm{E = 0}$, *la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje* Y, *dos rectas coincidentes paralelas al eje* Y *o ningún lugar geométrico, según que las raíces de* $\mathrm{Ax^2 + Dx + F = 0}$ *sean reales y desiguales, reales e iguales o complejas.*

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Por el teorema 3, la ecuación

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0 \qquad (6)$$

representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Si reducimos la ecuación (6) a la segunda forma ordinaria, completando el cuadrado en x, obtenemos

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3). \qquad (7)$$

De esta ecuación vemos inmediatamente que las coordenadas del vértice son $\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$. Como $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$, y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje y el eje es paralelo al eje Y, se sigue que las coordenadas del foco son $\left(\frac{5}{2},\ 3 + \frac{3}{2}\right)$, o sea, $\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}\right)$. La ecuación de la directriz es $y = 3 - \frac{3}{2}$, o sea, $y = \frac{3}{2}$, y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$.

Se recomienda al estudiante que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo. También se recomienda resolver el problema por traslación de los ejes coordenados.

En las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la parábola, dadas por el teorema 2, hay tres constantes arbitrarias independientes o parámetros, h, k y p. Por tanto, la ecuación de cualquier parábola cuyo eje sea paralelo a uno de los ejes coordenados puede determinarse a partir de tres condiciones independientes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$, $(0,\ 5)$ y $(-6,\ -7)$.

Solución. Por el teorema 2, la ecuación buscada es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Podemos, sin embargo, tomar también la ecuación en la forma dada por el teorema 3, a saber,

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Como $C \neq 0$, podemos dividir toda la ecuación por C, obteniendo así

$$y^2 + D'x + E'y + F' = 0, \qquad (8)$$

en donde $D' = \frac{D}{C}$, $E' = \frac{E}{C}$ y $F' = \frac{F}{C}$ son tres constantes por determinarse.

Como los tres puntos dados están sobre la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (8). Por tanto, expresando este hecho, obtenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados:

$$\begin{cases} \left(\tfrac{3}{2},\ -1\right), & 1 + \tfrac{3}{2}D' - E' + F' = 0, \\ (0,\ 5), & 25 + 5E' + F' = 0, \\ (-6,\ -7), & 49 - 6D' - 7E' + F' = 0. \end{cases}$$

que pueden escribirse así,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1, \\ 5E' + F' = -25, \\ 6D' + 7E' - F' = 49. \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D' = 8, \quad E' = -2, \quad F' = -15.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (8), obtenemos

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0,$$

que es la ecuación de la parábola que se buscaba.

El estudiante debe dibujar la figura para este ejemplo y verificar el hecho de que las coordenadas de cada uno de los tres puntos dados satisfacen la ecuación de la parábola. También debe obtener la misma ecuación usando la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

EJERCICIOS. Grupo 24

Dibujar para cada ejercicio la figura correspondiente.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la parábola.

3. Demostrar que si se tiene la ecuación de la parábola en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, las coordenadas de su foco son $(h + p, k)$, y la ecuación de su directriz es $x = h - p$.

4. Demostrar que si se tiene la ecuación de una parábola en la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, las coordenadas de su foco son $(h, k + p)$, y la ecuación de su directriz es $y = k - p$.

5. Por medio de la primera ecuación ordinaria, deducir la siguiente propiedad geométrica de la parábola: Si desde un punto cualquiera de una parábola se baja una perpendicular a su eje, el cuadrado de la longitud de esta perpendicular es igual al producto de las longitudes de su lado recto y del segmento del eje comprendido entre el pie de dicha perpendicular y el vértice. Toda parábola, cualquiera que sea su posición relativa a los ejes coordenados, posee esta propiedad geométrica llamada *propiedad intrínseca* de la parábola.

6. Por medio de la propiedad intrínseca de la parábola, establecida en el ejercicio 5, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de dicha curva.

7. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(3, 3)$ y $(3, 1)$, respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

9. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

10. La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto $(0, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 11-15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

11. $4y^2 - 48x - 20y = 71$.

12. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.

13. $y^2 + 4x = 7$.

14. $4x^2 + 48y + 12x = 159$.

15. $y = ax^2 + bx + c$.

16. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 56 trasladando los ejes coordenados.

17. Resolver el ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

18. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$.

19. Resolver el ejemplo 3 del Artículo 56 tomando la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

20. Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola del ejemplo 3 del Artículo 56.

21. Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común $(3, 4)$ y un eje común paralelo al eje Y.

22. La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir cómo varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

23. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(2, 8)$ y $(-1, 5)$.

24. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $(0, 0)$, $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

25. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

26. Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de una parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

27. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

28. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola

$$y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$$

cuya ordenada es igual a 3.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1, 1)$.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9.$$

57. Ecuación de la tangente a una parábola. La determinación de la tangente a la parábola no requiere la introducción de ningún concepto nuevo. Como la ecuación de una parábola es de segundo grado, su tangente puede obtenerse empleando la condición para tangencia estudiada en el Artículo 44.

Como para la circunferencia (Art. 45), consideraremos tres casos:

1. *Tangente en un punto de contacto dado.* Vamos a determinar la ecuación de la tangente a la parábola

$$y^2 = 4px, \tag{1}$$

en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola.

La ecuación de la tangente buscada es de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1), \tag{2}$$

en donde está por determinarse la pendiente m. Si el valor de y dado por la ecuación (2) es sustituido en la ecuación (1), se obtiene

$$(y_1 + mx - mx_1)^2 = 4px,$$

la cual se reduce a

$$m^2x^2 + (2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0.$$

Para la tangencia, el discriminante de esta ecuación debe anularse, y escribimos

$$(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0,$$

la cual se reduce a

$$x_1m^2 - y_1m + p = 0, \tag{3}$$

de donde,

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}.$$

Pero, como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parábola (1), tenemos

$$y_1^2 = 4px_1, \tag{4}$$

de donde $m = \dfrac{y_1}{2x_1}$. Si sustituimos este valor de m en (2), obtenemos, después de simplificar y ordenar los términos,

$$2x_1y = y_1(x + x_1).$$

De la ecuación (4), $2x_1 = \dfrac{y_1^2}{2p}$, y si se sustituye este valor en la última ecuación se obtiene la forma más común de la ecuación de la tangente,

$$y_1y = 2p(x + x_1).$$

Muchas propiedades interesantes e importantes de la parábola están asociadas con la tangente en un punto cualquiera de la curva. La deducción de tales propiedades es más sencilla, en general, usando la forma canónica (1) y, por tanto, la ecuación de la tangente que acabamos de obtener es especialmente útil. Según la ecuación obtenida, tenemos el teorema que damos a continuación.

Teorema 4. *La tangente a la parábola* $y^2 = 4px$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$y_1 y = 2p(x + x_1).$$

2. *Tangente con una pendiente dada.* Consideremos ahora el problema general de determinar la ecuación de la tangente de pendiente m a la parábola (1).

La ecuación buscada es de la forma

$$y = mx + k, \tag{5}$$

en donde k es una constante cuyo valor debe determinarse. Si sustituimos el valor de y dado por (5) en la ecuación (1), obtenemos

$$(mx + k)^2 = 4px,$$

o sea,

$$m^2x^2 + (2mk - 4p)x + k^2 = 0.$$

La condición para la tangencia es

$$(2mk - 4p)^2 - 4k^2m^2 = 0,$$

de donde,

$$k = \frac{p}{m},$$

valor que, sustituido en (5), nos da la ecuación buscada

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0.$$

Teorema 5. *La tangente de pendiente* m *a la parábola* $y^2 = 4px$ *tiene por ecuación*

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0.$$

3. *Tangente trazada desde un punto exterior.* Veamos el siguiente problema:

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(2, -4)$ a la parábola $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto $(2, -4)$ es

$$y + 4 = m(x - 2), \tag{6}$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (6), $y = mx - 2m - 4$, valor que sustituido en la ecuación de la parábola nos da

$$x^2 - 6x - 4(mx - 2m - 4) + 17 = 0.$$

Esta ecuación se reduce a

$$x^2 - (4m + 6)x + (8m + 33) = 0.$$

Para que haya tangencia,

$$(4m + 6)^2 - 4(8m + 33) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $m = 2, -3$. Por tanto, por (6), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y + 4 = 2(x - 2) \quad y \quad y + 4 = -3(x - 2),$$

o sea,

$$2x - y - 8 = 0 \quad y \quad 3x + y - 2 = 0.$$

El estudiante debe dibujar la figura correspondiente a este problema.

EJERCICIOS. Grupo 25

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la parábola y el punto de contacto dados.

1. $y^2 - 4x = 0$; $(1, 2)$.
2. $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$; $(-6, 3)$.
3. $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$; $(-2, -1)$.

4. Por medio del teorema 4 (Art. 57) hallar la ecuación de la tangente del ejercicio 1.

5. Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $y^2 = 4px$ en $P_1(x_1, y_1)$ es $y_1x + 2py = x_1y_1 + 2py_1$.

6. Por medio del resultado del ejercicio 5, hallar la ecuación de la normal del ejercicio 1.

7. Demostrar que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de su lado recto son perpendiculares entre sí.

8. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes del ejercicio 7 está sobre la directriz de la parábola. (Ver el ejercicio 19 del grupo 23, Art. 55.)

9. Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$.

10. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $2x + y + 7 = 0$.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(-3, 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

13. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1, 4)$ a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$.

14. Del punto $(-1, -1)$, se trazan dos tangentes a las parábola

$$y^2 - x + 4y + 6 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas.

15. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

   a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes;
   b) son tangentes a la parábola;
   c) no cortan a la parábola.

16. Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $x - y - 4 = 0$ y la parábola $y^2 = 2x$ en cada uno de sus puntos de intersección.

17. Hallar el ángulo agudo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus dos puntos de intersección.

18. Demostrar que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales entre sí en cada uno de sus puntos de intersección.

19. Desde el foco de una parábola se traza una recta perpendicular a una tangente cualquiera a la parábola. Demostrar que el punto de intersección de estas rectas está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

20. Demostrar que la normal de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ tiene por ecuación $y = mx - 2pm - pm^3$.

21. Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

22. En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B, respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.

23. Por medio del resultado del ejercicio 22, demuéstrese un procedimiento para trazar la tangente y la normal en cualquier punto de una parábola dada.

24. Demostrar que la tangente a la parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, de pendiente m, tiene por ecuación $y = mx - mh + k + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$.

25. Demostrar que toda circunferencia que tiene de diámetro una cuerda focal de una parábola, es tangente a la directriz.

26. Se han trazado dos círculos cada uno de los cuales tiene por diámetro una cuerda focal de una parábola. Demostrar que la cuerda común de los círculos pasa por el vértice de la parábola.

27. Si desde un punto exterior P se trazan tangentes a una parábola, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto de* P para esa parábola (véase el ejercicio 25 del grupo 18, Art. 45). Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la parábola $y^2 = 4px$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $y_1y = 2p(x + x_1)$. (Ver el teorema 4, Art. 57.)

28. Demostrar que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola pasa por su foco.

29. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta paralela al eje. Esta recta se llama *diámetro* de la parábola.

30. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.

58. La función cuadrática. La forma

$$ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

en donde, a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama *función cuadrática* de x, o *trinomio de segundo grado*, y puede ser investigada por medio de la relación

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (2)$$

Vimos en el Artículo 56 que la ecuación (2) se representa gráficamente por una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y. Por tanto, las propiedades analíticas de la función cuadrática (1) pueden estudiarse convenientemente por medio de las propiedades geométricas de la parábola (2). Si reducimos la ecuación (2) a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, completando el cuadrado en x, obtenemos

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2}{4a}-c\right),$$

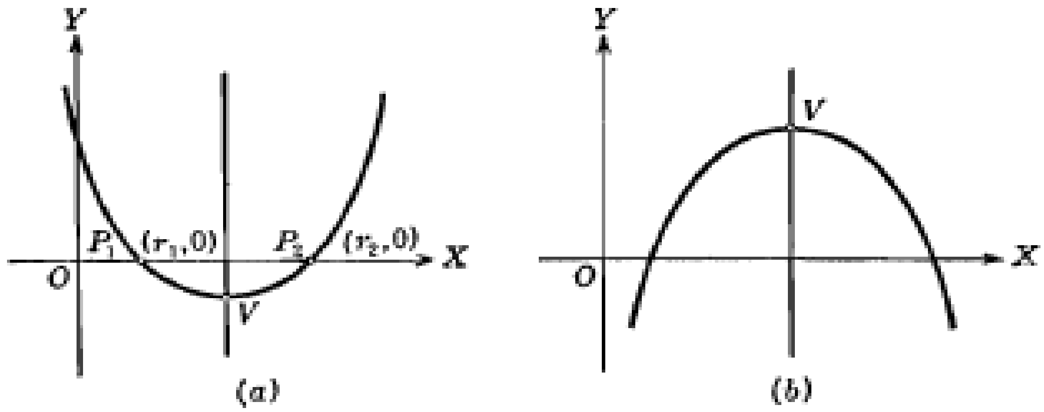

Fig. 81

que es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y, y cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 81 [a]); si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 81 [b]).

Un punto de una curva continua cuya ordenada sea algebraicamente mayor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama *punto máximo* de la curva. Análogamente, un punto cuya ordenada sea algebraicamente menor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama *punto mínimo* de la curva. Evidentemente, si $a > 0$ (fig. 81 [a]) la parábola (2) tiene un solo punto mínimo, el vértice V. De manera semejante, si $a < 0$ (fig. 81 [b]) la parábola (2) tiene un único punto máximo, el vértice V. La interpretación analítica es bien obvia. Como las coordenadas del vértice V de la parábola (4) son $\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right)$, se sigue que si $a > 0$ la función cuadrática (3) tiene, para $x = -\frac{b}{2a}$, un valor mínimo igual a

$c - \frac{b^2}{4a}$, y si $a < 0$ tiene, para $x = -\frac{b}{2a}$, un valor máximo igual a $c - \frac{b^2}{4a}$ Resumimos estos resultados en el siguiente

Teorema 6. *La función cuadrática*

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

está representada gráficamente por la parábola

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{2}$$

cuyo eje es paralelo a (o coincide con) el eje Y, y cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Si $a > 0$, *la parábola* (2) *se abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo, y la función cuadrática* (1) *tiene un valor mínimo igual a* $c - \frac{b^2}{4a}$ *cuando* $= -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$, *la parábola* (2) *se abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo, y la función cuadrática* (1) *tiene un valor máximo igual a* $c - \frac{b^2}{4a}$ *cuando* $x = -\frac{b}{2a}$.

Acabamos de discutir los valores extremos de la función cuadrática (1). Pero podemos también determinar fácilmente los valores de x para los cuales la función es positiva, negativa o cero. Por ejemplo, supongamos que la función cuadrática (1) es tal que tiene por gráfica a la figura 81 (a) en donde la parábola corta al eje X en los dos puntos diferentes P_1 y P_2. Como las ordenadas de P_1 y P_2 son nulas, se sigue, de (1) y (2), que sus abscisas r_1 y r_2, respectivamente, son las las raíces de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Además, como aparece en la gráfica, la función (1) es negativa para los valores de x comprendidos entre r_1 y r_2, y es positiva para valores de x menores que r_1 y mayores que r_2. El estudiante debe desarrollar una discusión semejante para la función cuadrática representada por la figura 81 (b). También debe discutir la función cuadrática cuya gráfica es tangente al eje X, y la función cuadrática cuya gráfica no corta al eje X.

Ejemplo. Determinar el máximo o mínimo de la función cuadrática

$$6 + x - x^2, \tag{3}$$

y los valores de x para los cuales esta función es positiva, negativa y cero. Ilustrar los resultados gráficamente.

Solución. La función (3) está representada gráficamente por la parábola

$$y = 6 + x - x^2,$$

que reducida a la forma ordinaria queda

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(y - \frac{25}{4}\right),$$

de modo que la parábola se abre hacia abajo y su vértice es el punto máximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ como se ve en la figura 82. Luego la función (3) tiene el valor máximo $\frac{25}{4}$ cuando $x = \frac{1}{2}$.

Para determinar los valores de x para los cuales la función (3) es positiva, necesitamos simplemente determinar, como en Algebra, los valores de x para los cuales la desigualdad

$$-x^2 + x + 6 > 0$$

es verdadera. Esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$(-x - 2)(x - 3) > 0.$$

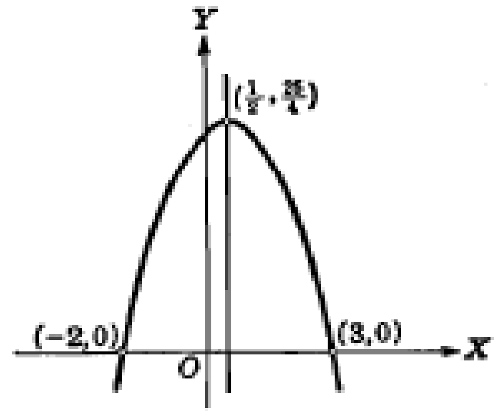

Fig. 82

Considerando los signos de los dos factores del primer miembro de esta desigualdad, vemos que es verdadera para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $-2 < x < 3$.

Análogamente, considerando la desigualdad

$$(-x - 2)(x - 3) < 0,$$

vemos que la función (3) es negativa para todos los valores de x tales que $x < -2$ y $x > 3$.

Finalmente, considerando la igualdad

$$(-x - 2)(x - 3) = 0,$$

vemos que la función (3) se anula cuando $x = -2$ y $x = 3$.

59. Algunas aplicaciones de la parábola. La parábola se presenta frecuentemente en la práctica. El propósito de este artículo es estudiar brevemente algunas aplicaciones de esta curva.

a) *Arco parabólico*. De las diversas formas de arcos usadas en construcción, una tiene la forma de un arco parabólico. Tal forma, llamada *arco parabólico*, es la indicada en la figura 83 (a). La longitud $\overline{AC}$ en la base se llama *claro* o *luz*; la altura máxima $\overline{OB}$ sobre la base se llama *altura* del arco. Si el arco parabólico se coloca de tal manera que su vértice esté en el origen y su eje coincida con el eje Y, y si la longitud del claro es $2s$ y la altura es h, entonces podemos demostrar fácilmente que la ecuación de la parábola toma la forma

$$x^2 = -\frac{s^2}{h}y.$$

En un puente colgante, cada cable cuelga de sus soportes A y C en la forma del arco de una curva, como se indica en la figura 83 (b).

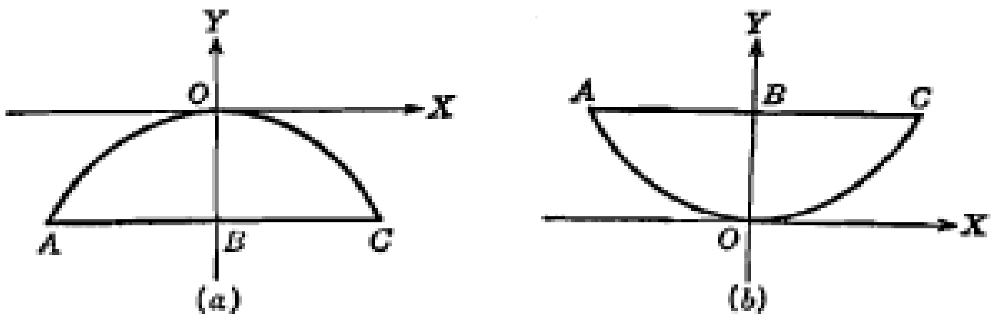

Fig. 83

La distancia $\overline{AC}$ comprendida entre los soportes del cable es la *luz*; la distancia $\overline{BO}$, altura vertical de los soportes del cable sobre el punto más bajo, se llama *depresión* del cable. Si los pesos de los cables son pequeños comparados con el de la carga, y si la distribución del peso de la carga es uniforme en la dirección horizontal, se demuestra en Mecánica que cada cable toma muy aproximadamente la forma de un arco parabólico.

b) *Propiedad focal de la parábola*. La parábola tiene una importante propiedad focal basada en el siguiente teorema.

TEOREMA 7. *La normal a la parábola en un punto* $P_1(x_1, y_1)$ *cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de* P_1 *y la recta que pasa por* P_1 *y es paralela al eje de la parábola.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema no se particulariza si tomamos como ecuación de la parábola la forma canónica

$$y^2 = 4px. \qquad (1)$$

Designemos por n la normal a la parábola en P_1, por l la recta que pasa por P_1 paralela al eje, y por r el radio vector FP_1, tal como se indica en la figura 84. Sea α el ángulo formado por n y r, y β el formado por n y l. Vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

La pendiente de la parábola en $P_1(x_1, y_1)$ es $\frac{2p}{y_1}$, según el teorema 4 del Artículo 57. Por tanto, la pendiente de n es $-\frac{y_1}{2p}$. También la pendiente de r es $\frac{y_1}{x_1 - p}$. Por tanto, por el teorema 5 del Artículo 10,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 - \frac{y_1^2}{2p(x_1 - p)}} = \frac{-x_1 y_1 + py_1 - 2py_1}{2px_1 - 2p^2 - y_1^2} = \frac{-x_1 y_1 - py_1}{2px_1 - 2p^2 - y_1^2}.$$

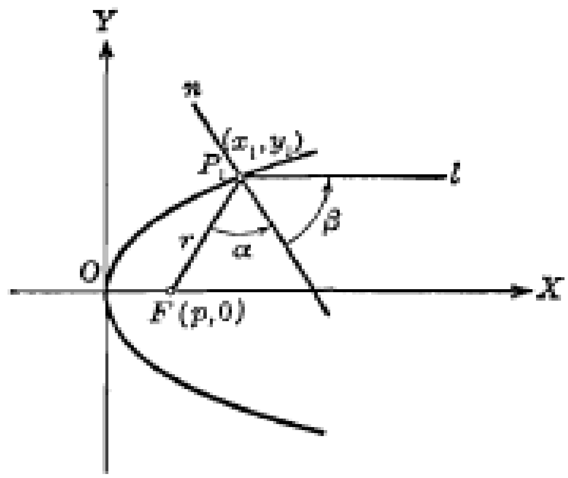

Fig. 84

Como $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parábola (1), sus coordenadas satisfacen la ecuación (1), y $y_1^2 = 4px_1$. Sustituyendo este valor de y_1^2 en la última igualdad, tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-x_1 y_1 - py_1}{2px_1 - 2p^2 - 4px_1} = \frac{-y_1(x_1 + p)}{-2p(x_1 + p)} = \frac{y_1}{2p}. \qquad (2)$$

Y como la pendiente de l es 0, resulta:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0 - \left(-\frac{y_1}{2p}\right)}{1 + 0\left(-\frac{y_1}{2p}\right)} = \frac{y_1}{2p}. \qquad (3)$$

Por tanto, de (2) y (3), $\alpha = \beta$, y el teorema queda demostrado.

Si un rayo de luz l_1 toca a una superficie pulida m en el punto P, es reflejado a lo largo de otra recta, digamos l_2, tal como se indica en la figura 85(a). Sea n la normal a m en P. El ángulo α formado por el rayo incidente l_1 y n se llama *ángulo de incidencia;* el ángulo β formado por el rayo reflejado l_2 y n se llama *ángulo de reflexión.* En Física se demuestra que la ley de la reflexión establece: 1) que l_1, n y l_2 son coplanares, y 2) que $\alpha = \beta$. Por esta ley y por el teorema 7, vemos que si un foco luminoso se coloca en el foco F de una parábola, los rayos inciden sobre la parábola, y se reflejan según rectas paralelas al eje de la parábola, tal como se indica en la figura 85(b). Este es el principio del reflector parabólico usado en las locomotoras y automóviles y en los faros buscadores.

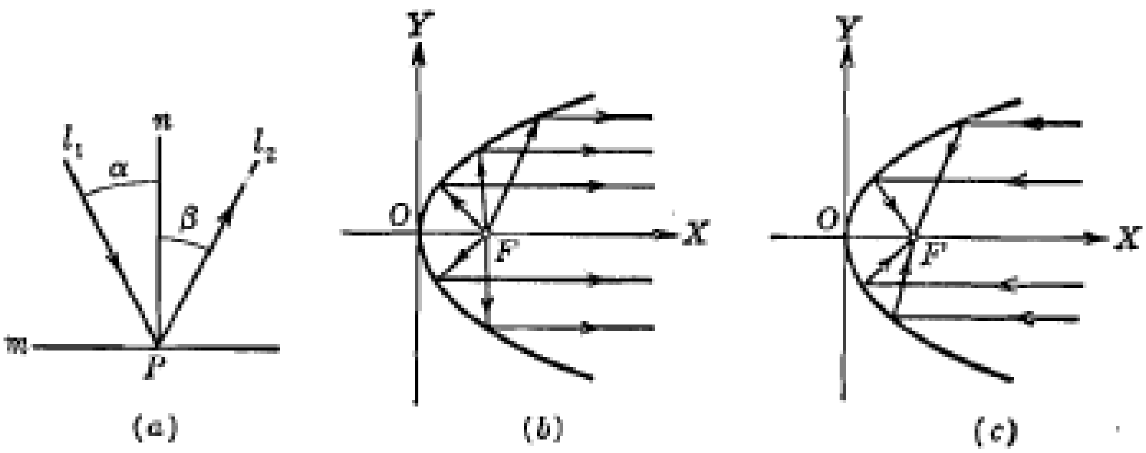

Fig. 85

Como el Sol está tan distante de la Tierra, sus rayos, en la superficie terrestre, son, prácticamente, paralelos entre sí. Si un reflector parabólico se coloca de tal manera que su eje sea paralelo a los rayos del Sol, los rayos incidentes sobre el reflector se reflejan de manera que todos pasan por el foco, tal como se ve en la figura 85(c). Esta concentración de los rayos solares en el foco es el principio en que se basa el hacer fuego con una lente; también es el origen de la palabra foco, que es el término latino (focus) empleado para designar el hogar o chimenea. Esta propiedad también se emplea en el telescopio de reflexión en el cual los rayos paralelos de luz procedentes de las estrellas se concentran en el foco.

EJERCICIOS. Grupo 26

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar el valor máximo o mínimo de la función dada, y comprobar el resultado gráficamente.

1. $4x^2 + 16x + 19$.
2. $24x - 3x^2 - 47$.
3. $x^2 - 6x + 9$.
4. $4x - 2x^2 - 5$.

En cada uno de los ejercicios 5-8, hallar los valores de x, si los hay, para los cuales es verdadera la desigualdad dada. Comprobar el resultado gráficamente.

5. $4x^2 + 11x - 3 > 0$.
6. $8x - x^2 - 16 < 0$.
7. $12x - x^2 - 37 > 0$.
8. $x^2 + 14x + 49 > 0$.

En cada uno de los ejercicios 9-12, hallar los valores de x para los cuales la función dada es positiva, negativa y cero, y tiene un máximo o un mínimo. Comprobar los resultados gráficamente.

9. $x^2 - 5x + 4$.
10. $3 - 5x - 2x^2$.
11. $x^2 - 4x + 4$.
12. $4x^2 - 7x + 53$.

En cada uno de los ejercicios 13-15, sea $y = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática tal que las raíces de $y = 0$ sean r_1 y r_2.

13. Si r_1 y r_2 son reales y desiguales, y $r_1 > r_2$, demostrar que y tiene el mismo signo que a cuando $x > r_1$ y $x < r_2$, y es de signo contrario a a cuando $r_1 > x > r_2$.
14. Si r_1 y r_2 son reales e iguales, demuéstrese que y tiene el mismo signo que a cuando $x \neq r_1$.
15. Si r_1 y r_2 son números complejos conjugados, demuéstrese que y tiene el mismo signo que a para todos los valores de x.
16. Hallar la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tienen un valor máximo igual a 4 para $x = -2$.
17. Hallar la expresión para la familia de funciones cuadráticas de x que tienen un valor mínimo igual a 5 para $x = 3$.

Los problemas enunciados en los ejercicios 18-23 deben comprobarse gráficamente.

18. La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es constante e igual a 14 cm. Hallar las longitudes de los catetos si el área del triángulo debe ser máxima.
19. La suma de dos números es 8. Hallar estos números si la suma de sus cuadrados debe ser mínima.
20. El perímetro de un rectángulo es 20 cm. Hallar sus dimensiones si su área debe ser máxima.
21. Hallar el número que excede a su cuadrado en un número máximo.
22. Demostrar que de todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo el cuadrado es el de área máxima.