CAPITULO VII

LA ELIPSE

60. Definiciones. Una *elipse* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

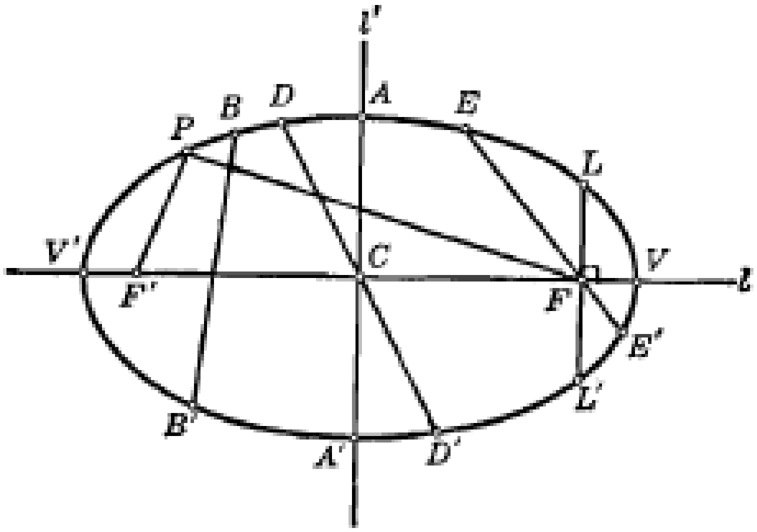

Fig. 86

Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

Designemos por F y F' (fig. 86) los focos de una elipse. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de *eje focal* para designar esta recta. El eje focal corta a la elipse en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento VV', se llama *eje mayor*. El punto C del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama *centro*. La recta l' que pasa por

C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término *eje normal* para designarla. El eje normal l' corta a la elipse en dos puntos, A y A', y el segmento AA' se llama *eje menor*. Un segmento tal como BB', que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama *cuerda*. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como EE', se llama *cuerda focal*. Una cuerda focal, tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto*. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos. Una cuerda que pasa por C, tal como DD', se llama un *diámetro*. Si P es un punto cualquiera de la elipse, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

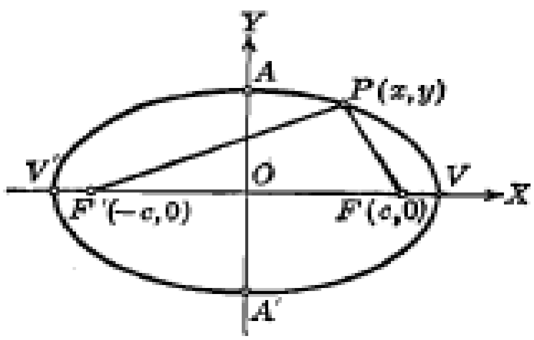

Fig. 87

61. Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse. Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 87). Los focos F y F' están sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a, \qquad (1)$$

en donde a es una constante positiva *mayor* que c.

Por el teorema 2, Artículo 6, tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2)$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, obtenemos

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

de donde,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (3)$$

Como $2a > 2c$ es $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2$ es un número positivo que puede ser reemplazado por el número positivo b^2, es decir,

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4)$$

Si en (3) reemplazamos $a^2 - c^2$ por b^2, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

y dividiendo por a^2b^2, se obtiene, finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Recíprocamente, sea $P_1(x_1, x_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (5), de manera que

$$\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Invirtiendo el orden de las operaciones efectuadas para pasar de la ecuación (2) a la (5), y dando la debida interpretación a los signos de los radicales, podemos demostrar que la ecuación (6) conduce a la relación

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1{}^2} + \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1{}^2} = 2a,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1. Por tanto, P_1 está sobre la elipse cuya ecuación está dada por (5).

Ahora discutiremos la ecuación (5) de acuerdo con el Artículo 19. Por ser a y $-a$ las intersecciones con el eje X, las coordenadas de los vértices V y V' son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la longitud del eje mayor es igual a $2a$, la constante que se menciona en la definición de la elipse. Las intersecciones con el eje Y son b y $-b$. Por tanto, las coordenadas de los extremos A y A' del eje menor son $(0, b)$ y $(0, -b)$, respectivamente, y la longitud del eje menor es igual a $2b$.

Por la ecuación (5) vemos que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación (5) despejamos y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{7}$$

Luego, se obtienen valores reales de y solamente para valores de x del intervalo

$$-a \leq x \leq a. \tag{8}$$

Si de la ecuación (5) despejamos x, obtenemos

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

de manera que se obtienen valores reales de x, solamente para valores de y dentro del intervalo

$$-b \leq y \leq b. \tag{9}$$

De (8) y (9) se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$. Por tanto, la elipse es una curva cerrada.

Evidentemente, la elipse no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

La abscisa del foco F es c. Si en (7) sustituímos x por este valor se obtienen las ordenadas correspondientes que son

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2},$$

de donde, por la relación (4),

$$y = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$. Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

Un elemento importante de una elipse es su *excentricidad* que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa usualmente por la letra e. De (4) tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{10}$$

Como $c < a$, *la excentricidad de una elipse es menor que la unidad*.

Consideremos ahora el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y. Las coordenadas de los focos son entonces $(0, c)$ y $(0, -c)$. En este caso, por el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad (11)$$

en donde a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor, y $a^2 = b^2 + c^2$. La discusión completa de la ecuación (11) se deja al estudiante como ejercicio.

Las ecuaciones (5) y (11) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria de la elipse*. Son las ecuaciones más simples de la elipse y, por tanto, nos referiremos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente

Teorema 1. *La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje* X, *distancia focal igual a* 2c *y cantidad constante igual a* 2a *es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean* (0, c) *y* (0, — c), *la ecuación de la elipse es*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor,* b *la del semieje menor, y* a, b *y* c *están ligados por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ *y la excentricidad* e *está dada por la fórmula*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Nota. Si reducimos la ecuación de una elipse a su forma canónica, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Ejemplo. Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto $(0, 3)$ y la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$, hallar las coordenadas de otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

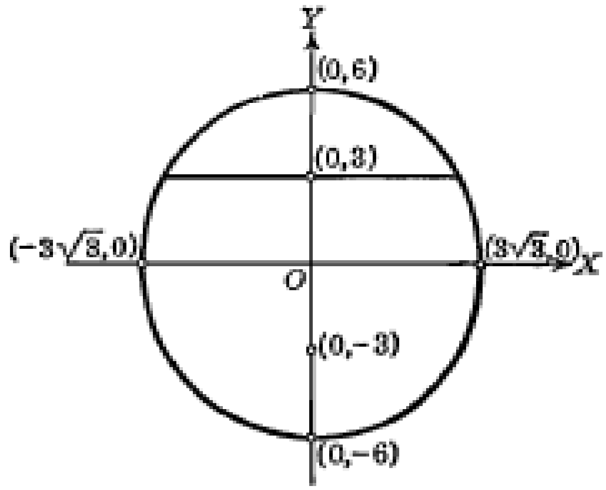

Fig. 88

Solución. Como uno de los focos es el punto $(0, 3)$, tenemos $c = 3$, y las coordenadas del otro foco son $(0, -3)$. Como la excentricidad es $\frac{1}{2}$, tenemos

$$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a},$$

de donde, $a = 6$. Tenemos, también,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el teorema 1, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

La longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 27}{6} = 9$.

El lugar geométrico es el representado en la figura 88.

EJERCICIOS. Grupo 27

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Deducir la ecuación ordinaria $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ a partir de la definición de la elipse.

2. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

3. Dados los focos y la longitud de su eje mayor, demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadras y compás.

4. Demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadra y compás si se conocen sus ejes mayor y menor.

5. Demostrar que la circunferencia es un caso particular de la elipse cuya excentricidad vale cero.

En cada uno de los ejercicios 6-9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.

6. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8. $16x^2 + 25y^2 = 400$.

9. $x^2 + 3y^2 = 6$.

10. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$, $(-4, 0)$, y cuyos focos son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

11. Los vértices de una elipse son los puntos $(0, 6)$, $(0, -6)$, y sus focos son los puntos $(0, 4)$, $(0, -4)$. Hallar su ecuación.

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

13. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

14. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.

15. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

16. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

17. Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

18. Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinados por uno de los focos.

19. Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

20. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que sus radios vectores son $a + ex_1$ y $a - ex_1$. Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

21. Hallar los radios vectores del punto $(3, \frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

22. Los puntos extremos de un diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son P_1 y P_2. Si F es uno de los focos de la elipse, demostrar que la suma de los radios vectores FP_1 y FP_2 es igual a la longitud del eje mayor.

23. Si k es un número positivo, demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = k$ representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene de excentricidad $\frac{1}{2}$.

En cada uno de los ejercicios 24-26, usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

24. Focos $(3, 8)$ y $(3, 2)$: longitud del eje mayor $= 10$.
25. Vértices $(-3, -1)$ y $(5, -1)$; excentricidad $= \frac{3}{4}$.
26. Vértices $(2, 6)$ y $(2, -2)$: longitud del lado recto $= 2$.

27. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y = -8$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $(0, -2)$.

28. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la razón $1 : 4$. (Dos soluciones.)

30. Un segmento AB de longitud fija se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Si P es un punto cualquiera, distinto de A y B, y que no esté sobre el segmento AB o en su prolongación, demuéstrese que el lugar geométrico de P es una elipse. Un instrumento basado sobre este principio se usa para construir elipses teniendo como datos los ejes mayor y menor.

62. Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados. Ahora consideraremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, consideremos la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X tal como se indica en la figura 89. Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k) de la elipse, se sigue, del teorema 1, Artículo 61, que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

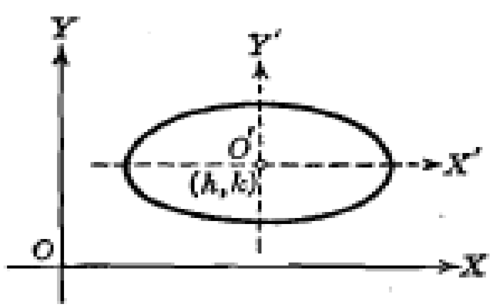

Fig. 89

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

De la ecuación (1) puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y usando las ecuaciones de transformación del teorema 1, Artículo 50, a saber:

$$x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

de donde:

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Si sustituímos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y.

Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y tiene por ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, la *segunda ecuación ordinaria de la elipse*. Los resultados precedentes, juntos con el teorema 1 del Artículo 61, nos dan el siguiente

TEOREMA 2. *La ecuación de la elipse de centro el punto* (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X, *está dada por la segunda forma ordinaria*,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, *su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor*, b *es la del semieje menor*, c *es la distancia del centro a cada foco*, *y* a, b *y* c *están ligadas por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Ejemplo 1. Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3, 7)$ y $(-3, -1)$, y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3, se sigue (fig. 90) que el eje focal es paralelo al eje Y. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

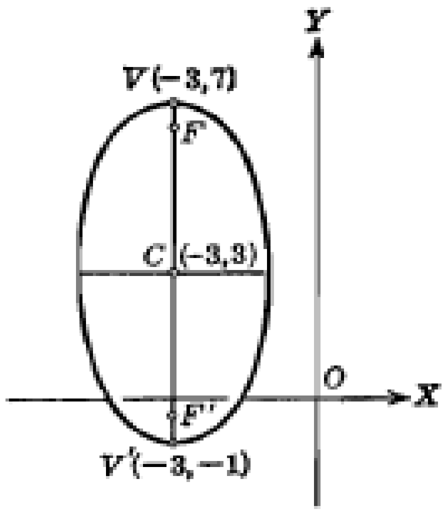

Fig. 90

El centro C es el punto medio del eje mayor VV', y sus coordenadas son, por lo tanto, $(-3, 3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente. Por tanto, $2a = 8$ y $a = 4$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 2$. Como $a = 4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b = 2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto, las coordenadas de los focos son $F(-3,\ 3+2\sqrt{3})$ y $F'(-3,\ 3-2\sqrt{3})$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0, \tag{4}$$

la cual puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{5}$$

en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Evidentemente, los coeficientes A y C deben ser del mismo signo.

Recíprocamente, consideremos una ecuación de la forma (5) y reduzcámosla a la forma ordinaria (2) completando cuadrados. Obtenemos

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2} \tag{6}$$

Sea $M=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$. Si $M\neq 0$, la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{MC}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{MA}=1, \tag{7}$$

que es la ecuación ordinaria de la elipse.

Como A y C deben concordar en signo, podemos suponer, sin perder generalidad, que son ambos positivos. Por lo tanto, si (5) debe representar una elipse, la ecuación (7) demuestra que M debe ser positivo. El denominador $4A^2C^2$ de M es positivo; por tanto, el signo de M depende del signo de su numerador CD^2+AE^2-4ACF, al que designaremos por N. De acuerdo con esto, comparando las ecuaciones (6) y (7), vemos que, si $N>0$, (5) representa una elipse; de (6), si $N=0$, (5) representa el punto único

$$\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2C}\right),$$

llamado usualmente una elipse punto, y si $N<0$, la ecuación (6) muestra que (5) no representa ningún lugar geométrico real.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por tanto, tenemos el siguiente

TEOREMA 3. *Si los coeficientes* A *y* C *son del mismo signo, la ecuación*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

Ejemplo 2. La ecuación de una elipse es $x^2+4y^2+2x-12y+6=0$. Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

Solución. Vamos a reducir la ecuación dada a la forma ordinaria, completando los cuadrados. Resulta:

$$(x^2+2x)+4(y^2-3y)=-6$$

y

$$(x^2+2x+1)+4(y^2-3y+\tfrac{9}{4})=-6+1+9.$$

de donde, $$(x+1)^2 + 4\left(y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 4,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1} = 1.$$

Las coordenadas del centro C son, evidentemente, $(-1, \frac{3}{2})$, y el eje focal es paralelo al eje X. Como $a^2 = 4$, $a = 2$, y las coordenadas de los vértices V y V'

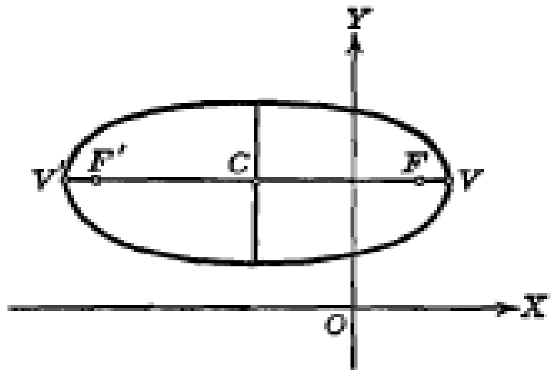

Fig. 91

son $(-1+2, \frac{3}{2})$ y $(-1-2, \frac{3}{2})$, o sea, $(1, \frac{3}{2})$ y $(-3, \frac{3}{2})$, respectivamente. Como $c^2 = a^2 - b^2$, resulta, $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, y las coordenadas de los focos F y F' son $(-1+\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ y $(-1-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$, respectivamente. La longitud del eje mayor es $2a = 4$, la del eje menor es $2b = 2$, y la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$. La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. El lugar geométrico está representado en la figura 91.

EJERCICIOS. Grupo 28

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$

2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la elipse.

3. Si la ecuación de una elipse viene dada en la forma

$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2,$$

demostrar que las coordenadas de sus vértices son $(h+a, k)$, $(h-a, k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h+c, k)$, $(h-c, k)$, en donde, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

4. Usar la primera ecuación de la elipse para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la elipse: Si O es el centro de una elipse cuyos semiejes mayor y menor son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la elipse a su eje focal, entonces

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} + \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Aplicando la propiedad intrínseca de la elipse, establecida en el ejercicio 4, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse.

6. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

7. Los focos de una elipse son los puntos $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

8. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, -6)$ y $(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

10. El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

11. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

12. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y $D = E = 0$.

En cada uno de los ejercicios 13-16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$
14. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$
15. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$
16. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 62 trasladando los ejes coordenados.

18. Resolver el ejercicio 16 por traslación de los ejes coordenados.

19. Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrese que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

20. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $\left(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

21. Hallar la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común $(2, 3)$, un eje focal común paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual

a $\frac{1}{2}$. Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

22. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(5, 1)$.

23. La ecuación de una familia de elipses es $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

24. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(2, 1)$ de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$.

25. El punto medio de una cuerda de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es el punto $(5, 2)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

27. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

28. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

29. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $x^2+y^2-4y-12=0$ y $x^2 + y^2 = 1$. (Dos soluciones.)

63. Propiedades de la elipse. Muchas de las propiedades más importantes de la elipse están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una elipse es de segundo grado, sus tangentes pueden determinarse empleando la condición para la tangencia estudiada en el Artículo 44. El procedimiento para la resolución de problemas relativos a tangentes a la elipse es, por lo tanto, idéntico al usado para la circunferencia (Art. 45) y la parábola (Art. 57). Por esto, se deja como ejercicio el demostrar los teoremas 4 y 5 que enunciamos a continuación:

TEOREMA 4. *La tangente a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

TEOREMA 5. *Las ecuaciones de las tangentes de pendiente* m *a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Una importante propiedad focal de la elipse está basada en el siguiente teorema:

TEOREMA 6. *La normal a una elipse en uno cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema no pierde generalidad tomando la ecuación de la elipse en su forma canónica

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{1}$$

En este caso, sea n (fig. 92) la normal a la elipse en un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$ de la curva. Sea α el ángulo formado por n y el radio vector FP_1, y β el formado por n y el radio vector $F'P_1$. Vamos a demostrar que $\alpha = \beta$.

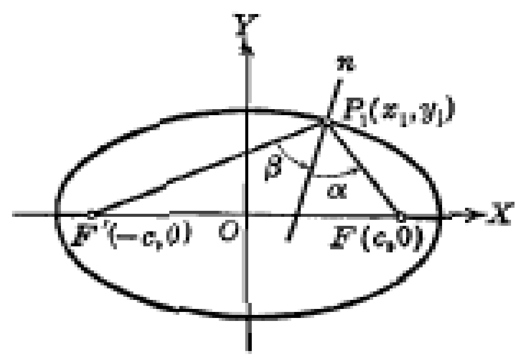

Fig. 92

Por el teorema 4 anterior, la pendiente de la elipse en $P_1(x_1, y_1)$ es $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, de manera que la pendiente de la normal n es $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$. Las pendientes de los radios vectores FP_1 y $F'P_1$ son $\frac{y_1}{x_1 - c}$ y $\frac{y_1}{x_1 + c}$, respectivamente. Entonces, por el teorema 5, Artículo 10, resulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - c}\right)\left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)} = \frac{b^2x_1y_1 - a^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2x_1^2 - b^2cx_1 + a^2y_1^2}.$$

Como el punto P_1 está sobre la elipse, sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación (1), es decir,

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Usando esta relación y la relación $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1y_1(b^2 - a^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 - b^2cx_1} = \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 - cx_1)}$$

$$= \frac{cy_1(-cx_1 + a^2)}{b^2(-cx_1 + a^2)} = \frac{cy_1}{b^2}.$$

Análogamente, tenemos

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \dfrac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)\left(\dfrac{y_1}{x_1 + c}\right)} = \frac{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1}{b^2 x_1{}^2 + b^2 c x_1 + a^2 y_1{}^2}$$

$$= \frac{x_1 y_1 (a^2 - b^2) + a^2 c y_1}{a^2 b^2 + b^2 c x_1} = \frac{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1}{b^2 (a^2 + c x_1)}$$

$$= \frac{c y_1 (c x_1 + a^2)}{b^2 (c x_1 + a^2)} = \frac{c y_1}{b^2}.$$

Por tanto, como $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\alpha = \beta$.

Aplicando la ley de la reflexión (Art. 59), el teorema 6 es evidente. En efecto, consideremos una superficie de reflexión que tenga como sección recta una *elipse*; supongamos que se coloca un foco luminoso en el foco F de la elipse, y que un *rayo* incide sobre la elipse en el punto P_1. Entonces este rayo será reflejado de tal manera que el ángulo de reflexión β sea igual al ángulo de incidencia α. Pero, por el teorema 6, tal rayo reflejado pasará por el otro foco F'. Luego los rayos de un foco *luminoso* colocado en un foco de la elipse al incidir sobre la curva se reflejan de manera que pasan por el otro foco. Como las ondas sonoras se reflejan como las luminosas. los sonidos *originados* en uno de los focos pueden ser oídos claramente en el otro foco y ser inaudibles en los puntos intermedios. Este es el principio en que se basa la construcción de las cámaras secretas.

Vamos a mencionar brevemente algunas otras aplicaciones de la elipse. Los arcos usados en la construcción tienen, frecuentemente, la forma de arcos elípticos. En ciertos tipos de máquinas se usan *engranes* elípticos. Algunas partes estructurales de metal se construyen de sección recta *elíptica*. Es también interesante notar que los planetas en su recorrido alrededor del Sol se mueven en órbitas elípticas en las cuales el Sol ocupa uno de los focos.

EJERCICIOS. Grupo 29

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 4 del Artículo 63.
2. Demostrar el teorema 5 del Artículo 63.
3. *Demostrar* el siguiente teorema como corolario al teorema 4 del Artículo 63: La ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $x_1 x + y_1 y = a^2$. (*Véase el ejercicio* 10 del grupo 18. Artículo 45.)

4. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 5 del Artículo 63: Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ son } y = mx \pm a\sqrt{m^2 + 1}.$$

(Véase el ejercicio 16 del grupo 18, Art. 45.)

5. Demostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2x_1x + b^2y_1y = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

6. $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, -1)$.

7. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 8$.

9. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$.

10. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(3, -1)$ a la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

11. Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes;
b) son tangentes a la elipse;
c) no cortan a la elipse.

12. Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses $3x^2 + 4y^2 = 43$ y $4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ en uno de sus dos puntos de intersección.

13. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$ son $y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

14. Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$.

15. Se tienen como datos una elipse y sus focos. Por medio del teorema 6 (Art. 63) demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la elipse.

16. Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por su centro, la elipse es una circunferencia.

17. Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

18. Demostrar que la pendiente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

19. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

20. Por el punto $(2, 7)$ se trazan tangentes a la elipse

$$2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0.$$

Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

21. Si desde un punto exterior P_1 se trazan tangentes a una elipse, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa elipse. (Véase el ejercicio 27 del grupo 25, Art. 57.) Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$. (Véase el teorema 4 del Art. 63.)

22. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto (3, 1) para la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$.

23. Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{es} \quad y = -\frac{b^2}{a^2m}x, \quad m \neq 0.$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una recta que pasa por el centro y, por tanto, es un *diámetro* de la elipse. (Véase el ejercicio 29 del grupo 25, Art. 57.)

24. Establecer y demostrar un teorema para la circunferencia que sea análogo al teorema dado en el ejercicio 23 para la elipse.

25. Demostrar que si un diámetro de una elipse biseca todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la elipse.