64. Definiciones. Una *hipérbola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento

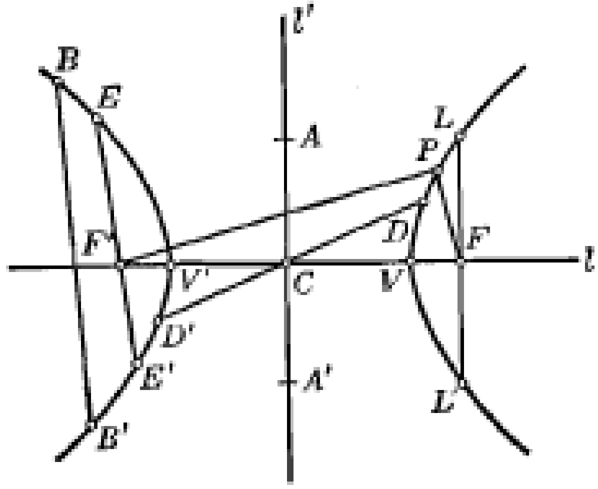

Fig. 93

comprendido entre ellos. Los focos y el punto medio de este segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

El lector debe observar la estrecha analogía que existe entre las definiciones de la hipérbola y elipse. La analogía entre estas dos curvas se encontrará frecuentemente a medida que avancemos en nuestro estudio de la hipérbola.

En el artículo siguiente veremos que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. En la figura 93 se ha dibujado una porción de cada una de estas ramas; los focos están designados por F y F'. La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; como para la elipse creemos conveniente introducir el término *eje focal* para designar esta recta. El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V', llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento VV', se llama *eje transverso*. El punto medio C del eje transverso se llama *centro*. La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; nosotros, como lo hicimos para la elipse, consideramos conveniente introducir el término *eje normal* para esta recta. El eje normal l' no corta a la hipérbola; sin embargo, una porción definida de este eje, el segmento AA' en la figura 93, que tiene C por punto medio, se llama *eje conjugado*. La longitud del eje conjugado se dará en el siguiente artículo. El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama *cuerda;* estos puntos pueden ser ambos de la misma rama, como para la cuerda BB', o uno de una rama y el otro de la otra, como para el eje transverso VV'. En particular, una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' se llama *cuerda focal* Una cuerda focal, tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama *lado recto;* evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos. Una cuerda que pasa por C, tal como DD', se llama *diámetro*. Si P es un punto cualquiera de la hipérbola, los segmentos FP y $F'P$ que unen los focos con el punto P se llaman *radios vectores* de P.

65. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola. Consideremos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 94). Los focos F y F' están entonces sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

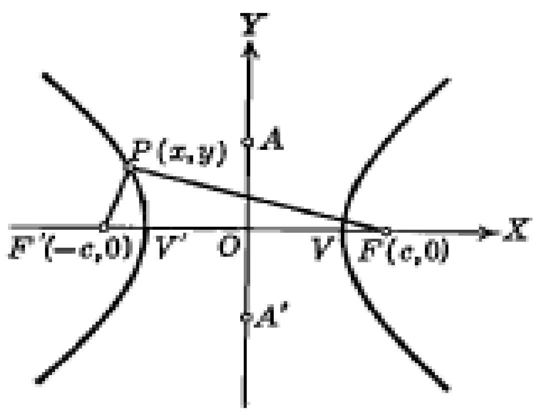

Fig. 94

$$\left|\,|\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\,\right| = 2a, \qquad (1)$$

en donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. La condición geométrica (1) es equivalente a las dos relaciones,

$$| \overline{FP} | - | \overline{F'P} | = 2a, \tag{2}$$

$$| \overline{FP} | - | \overline{F'P} | = -2a. \tag{3}$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha.

Por el teorema 2, Artículo 6, tenemos

$$| \overline{FP} | = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad | \overline{F'P} | = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \tag{4}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a, \tag{5}$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3), respectivamente.

Por el mismo procedimiento usado al transformar y simplificar la ecuación (2) del Artículo 61 para la elipse, podemos demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2). \tag{6}$$

Por ser $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo que podemos designar por b^2. Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{7}$$

obtenemos

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Podemos demostrar recíprocamente, que si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (8), entonces P_1 satisface la condición geométrica (1) y, por lo tanto, está sobre la hipérbola. Luego la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola.

Estudiemos ahora la ecuación (8) de acuerdo con el Artículo 19. Las intersecciones con el eje X son a y $-a$. Por tanto, las coordenadas de los vértices V y V' son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, respectivamente, y la longitud del eje transverso es igual a $2a$, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersecciones con el eje Y, dos puntos, $A(0, b)$ y $A'(0, -b)$, se toman como extremos del eje conjugado. Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a $2b$.

La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Despejando y de la ecuación (8), resulta:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{9}$$

Por tanto, para que los valores de y sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico aparece en la región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = -a$.

Despejando x de la ecuación (8) se obtiene

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}, \tag{10}$$

de la cual vemos que x es real para todos los valores reales de y.

Según esto, las ecuaciones (9) y (10), juntas, con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda y por arriba y abajo del eje X.

La hipérbola (8) no tiene asíntotas verticales ni horizontales. En el siguiente artículo demostraremos, sin embargo, que la curva tiene dos asíntotas oblicuas.

De la ecuación (9) y de la relación (7), hallamos que la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

Como para la elipse, la excentricidad e de una hipérbola está definida por la razón $\frac{c}{a}$. Por tanto, de (7), tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \tag{11}$$

Como $c > a$, *la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad*.

Si el centro de la hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje Y, hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \qquad (12)$$

La discusión completa de la ecuación (12) se deja al estudiante.

Las ecuaciones (8) y (12) las llamaremos *primera ecuación ordinaria de la hipérbola*. Son las más simples de esta curva por lo que nos referiremos a ellas como formas canónicas.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente

TEOREMA 1. *La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje* X, *y focos los puntos* (c, 0) *y* (− c, 0), *es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean* (0, c) *y* (0, − c), *entonces la ecuación es*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Para cada hipérbola, a *es la longitud del semieje transverso,* b *la del semieje conjugado,* c *la distancia del centro a cada foco, y* a, b, c *están ligadas por la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

NOTA. La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse como se indicó en la nota del teorema 1 del Artículo 61. Este método no es aplicable a la hipérbola, ya que podemos tener $a > b$, $a < b$ o $a = b$. La posición de la hipérbola se determina por los *signos* de los coeficientes de las variables en la forma canónica de su ecuación. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

Ejemplo. Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$, y sus focos los puntos $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Solución. Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está, evidentemente, en el origen. Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

La distancia entre los vértices es $2a = 6$, longitud del eje transverso. La distancia entre los focos es $2c = 10$. Por tanto, $a = 3$ y $c = 5$, de donde

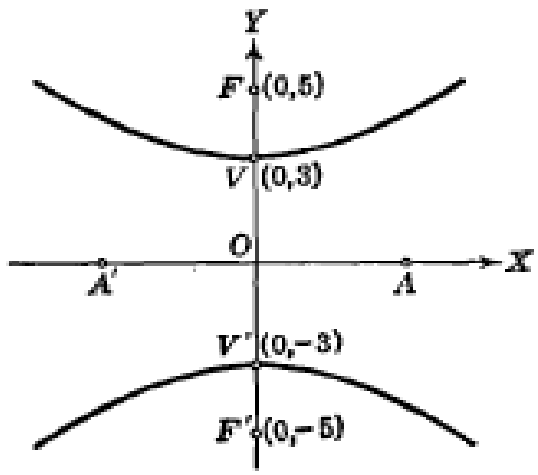

Fig. 95

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$. Por lo tanto, $b = 4$, y la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. La ecuación de la hipérbola es entonces

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, y la longitud de cada lado recto e $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$.

El lugar geométrico está representado en la figura 95, en donde el eje conjugado está indicado por el segmento AA' del eje X.

EJERCICIOS. Grupo 30

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar que las ecuaciones (4) y (5) del Artículo 65 se reducen cada una a la ecuación (6).

2. Demostrar que si P_1 es un punto cualquiera cuyas coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, entonces P_1 está sobre la hipérbola representada por esta ecuación.

3. Deducir la ecuación ordinaria $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ a partir de la definición de hipérbola.

4. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

5. Demostrar un procedimiento para obtener, con escuadras y compás, puntos de una hipérbola, dados los focos y la longitud de su eje transverso.

En cada uno de los ejercicios 6-9, para la ecuación dada de la hipérbola, hállense las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto. Trácese y discútase el lugar geométrico.

6. $9x^2 - 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

8. $9y^2 - 4x^2 = 36$.

9. $x^2 - 4y^2 = 4$.

10. Los vértices de una hiperbola son los puntos $V(2, 0)$, $V'(-2, 0)$, y sus focos son los puntos $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

11. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto $(0, 5)$ y la excentricidad es igual a 3, hállese la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

12. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

13. Los vértices de una hipérbola son $(0, 4)$, $(0, -4)$, y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

14. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ y que la curva pasa por el punto $(2, 1)$.

15. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje X. La longitud de cada lado recto es $\frac{2}{3}$, y la hipérbola pasa por el punto $(-1, 2)$. Hallar su ecuación.

16. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

En cada uno de los ejercicios 17-19, usando la definición de hipérbola, hallar la ecuación de dicha curva a partir de los datos dados. Mediante un cambio de coordenadas, poner la ecuación en la primera forma ordinaria.

17. Focos $(-7, 3)$, $(-1, 3)$; longitud del eje transverso $= 4$.

18. Vértices $(1, 4)$, $(5, 4)$; longitud del lado recto $= 5$.

19. Vértices $(3, 4)$, $(3, -2)$; excentricidad $= 2$.

20. Demostrar que la longitud del eje conjugado de una hipérbola es media proporcional entre las longitudes de su eje transverso y su lado recto.

21. Si k es un número cualquiera diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa una familia de hipérbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$.

22. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que las longitudes de sus radios vectores son $|ex_1 + a|$ y $|ex_1 - a|$.

23. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto (6, 5) de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 = 80$.

24. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (6, 0) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$.

25. La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus puntos extremos (3, 0) y (− 3, 0). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4. Trazar el lugar geométrico.

66. Asíntotas de la hipérbola. Si de la forma canónica de la ecuación de la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

despejamos y, obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

que puede escribirse en la forma

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \tag{2}$$

Frecuentemente se desea investigar lo que ocurre en una ecuación cuando una de las variables aumenta numéricamente sin límite. (Ver nota 3, Art. 18.) Si un punto de la hipérbola (1) se mueve a lo largo de la curva, de manera que su abscisa x aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembro de (2) se aproxima más y más a la unidad, y la ecuación tiende a la forma

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Como la ecuación (3) representa las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, esto nos conduce a inferir, de la definición de asíntota (Art. 18), que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas. Ahora demostraremos que esta deducción es correcta.

Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la parte superior de la rama derecha de la hipérbola (1), como se indica en la figura 96. La ecuación de la recta $y = \frac{b}{a}x$ puede escribirse en la forma

$$bx - ay = 0. \tag{4}$$

Por el teorema 9 del Artículo 33, la distancia d de la recta (4) al punto $P_1(x_1, y_1)$ está dada por

$$d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2 + a^2}}. \tag{5}$$

Si multiplicamos numerador y denominador del segundo miembro de (5) por $|bx_1 + ay_1|$, obtenemos

$$d = \frac{|b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|}. \tag{6}$$

Pero como P_1 está sobre la hipérbola (1), $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, de manera que la ecuación (6) puede escribirse en la forma

$$d = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\,|bx_1 + ay_1|}. \tag{7}$$

Si P_1 se mueve hacia la derecha a lo largo de la curva y se aleja indefinidamente del origen, sus coordenadas, x_1 y y_1, aumentan ambas

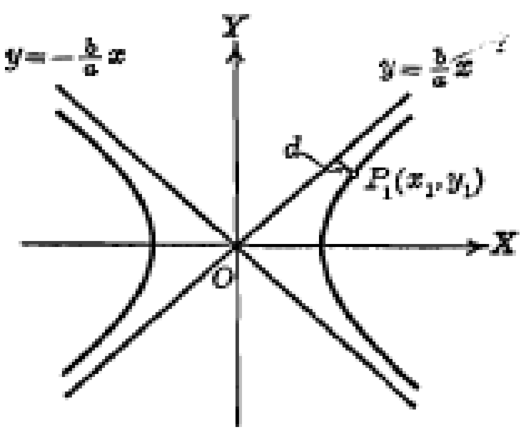

Fig. 96

de valor sin límite, de manera que, por la ecuación (7), d decrece continuamente y se aproxima a cero. Se sigue, de acuerdo con esto, por la definición de asíntota (Art. 18), que la recta (4) es una asíntota de la rama derecha de la hipérbola (1).

Si P_1 está sobre la parte inferior de la rama izquierda de la hipérbola (1) y se mueve hacia la izquierda a lo largo de la curva alejándose indefinidamente del origen, entonces sus coordenadas x_1 y y_1 aumentan de valor ambas sin límite en la dirección negativa. La ecuación (7) muestra entonces que d decrece continuamente y tiende a cero, de donde se sigue que la recta (4) es también una asíntota de la rama izquierda de la hipérbola (1).

Quedan dos casos por considerar que son, cuando P_1 está sobre la parte inferior de la rama derecha y cuando está sobre la parte superior de la rama izquierda. Empleando el mismo razonamiento que en los dos párrafos anteriores, podemos demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de ambas ramas de la hipérbola (1).

Estos resultados se resumen en el siguiente:

TEOREMA 2. *La hipérbola* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, *tiene por asíntotas las rectas* $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

NOTAS. 1. Si la ecuación de una hipérbola está en su forma canónica, las ecuaciones de sus asíntotas pueden obtenerse reemplazando el término constante por cero y factorizando el primer miembro. Así, para la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, tenemos $9x^2 - 4y^2 = 0$, de donde, $(3x + 2y)(3x - 2y) = 0$, y las ecuaciones de las asíntotas son $3x + 2y = 0$ y $3x - 2y = 0$.

2. La gráfica de una hipérbola puede esbozarse muy fácilmente trazando sus vértices y sus asíntotas. Las asíntotas actúan en la gráfica como *líneas guía* (ver nota 4, Art. 18).

Ejemplo. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6, 2) tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

Solución. Por el teorema 2 anterior, la otra asíntota es la recta $2x+5y = 0$. Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo k igual a cero en la ecuación

$$(2x - 5y)(2x + 5y) = k,$$

o sea,

$$4x^2 - 25y^2 = k.$$

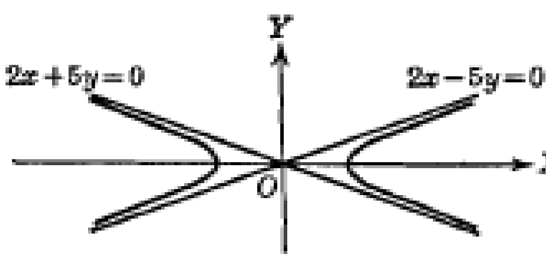

Fig. 97

Como la hipérbola buscada debe pasar por el punto (6, 2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por tanto, si hacemos $x = 6$ y $y = 2$ en la última ecuación, hallamos $k = 44$, y la ecuación de la hipérbola que se busca es

$$4x^2 - 25y^2 = 44.$$

La gráfica es la figura 97.

67. Hipérbola equilátera o rectangular. Consideremos la hipérbola especial cuyos ejes transverso y conjugado son de igual longitud. Entonces $a = b$, y la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ toma la forma más sencilla

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Debido a la igualdad de sus ejes, la hipérbola (1) se llama *hipérbola equilátera*.

Por el teorema 2 del Artículo 66, las asíntotas de la hipérbola equilátera (1) son las rectas $x - y = 0$ y $x + y = 0$. Como estas rectas son perpendiculares, resulta que las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí. Por esta razón la hipérbola equilátera se llama también *hipérbola rectangular*. Es un ejercicio fácil demostrar que, recíprocamente, una hipérbola rectangular es también equilátera.

Una forma particularmente simple y útil de la ecuación de la hipérbola equilátera es

$$xy = k, \tag{2}$$

en donde k es una constante cualquiera diferente de cero. Aplicando los métodos del Artículo 18, podemos demostrar que la curva (2) tiene por asíntotas a los ejes coordenados, y que, si k es positivo la gráfica es como se ve en la figura 98. El estudiante debe demostrar que si se giran los ejes coordenados un ángulo de 45°, la ecuación (2) se transforma en $x'^2 - y'^2 = 2k$, que es la ecuación de una hipérbola equilátera.

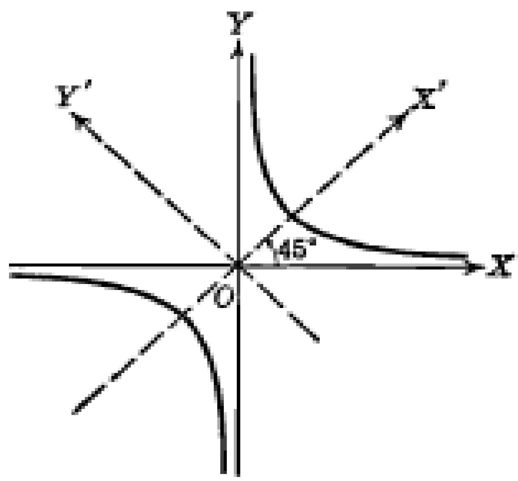

Fig. 98

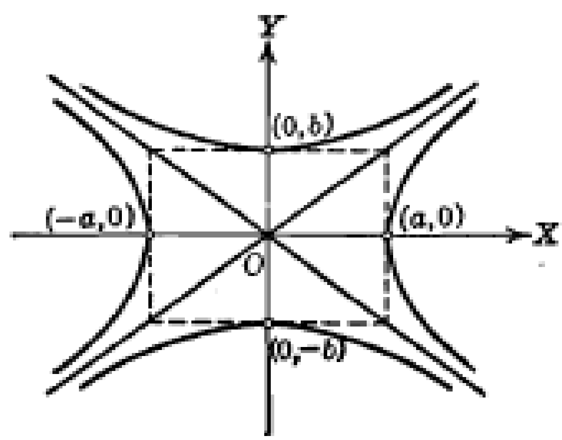

Fig. 99

68. Hipérbolas conjugadas. Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra, se llaman *hipérbolas conjugadas*. Cada hipérbola es entonces la *hipérbola conjugada* de la otra, y también se dice que cada hipérbola es *conjugada* con respecto a la otra.

Si la ecuación de una hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

entonces, de acuerdo con la definición, la hipérbola conjugada de (1) tiene por ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (2)$$

Evidentemente, la ecuación (2) puede obtenerse de la ecuación (1) cambiando simplemente el signo de uno de los miembros de (1). Así, si la ecuación de una hipérbola es $2x^2 - 7y^2 = 18$, entonces la ecuación de su hipérbola conjugada es $7y^2 - 2x^2 = 18$.

El par de hipérbolas conjugadas (1) y (2), junto con sus asíntotas, se han trazado en la figura 99. Es un ejercicio sencillo demostrar que un par de hipérbolas conjugadas tienen un centro común, un par común de asíntotas, y todos sus focos equidistan del centro.

El estudiante debe observar el rectángulo dibujado en la figura 99. Un bosquejo aproximado de un par de hipérbolas conjugadas pueden obtenerse fácilmente construyendo primero este rectángulo, ya que sus diagonales son las asíntotas.

EJERCICIOS. Grupo 31

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama derecha.

2. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la parte superior de la rama izquierda de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la recta $bx + ay = 0$ es una asíntota de la rama izquierda.

3. Demostrar que la hipérbola $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ tiene por asíntotas las rectas $by - ax = 0$ y $by + ax = 0$.

4. Hallar y trazar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$4x^2 - 5y^2 = 7.$$

5. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$.

6. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3, -1)$, su centro está en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta

$$2x + 3\sqrt{2}y = 0.$$

7. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(2, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.

8. Hallar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ a una cualquiera de sus dos asíntotas.

9. Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares entre sí, la hipérbola es equilátera.

10. Discutir y trazar la gráfica de la ecuación $xy = -8$.

11. Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

12. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

13. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a dos rectas perpendiculares es siempre igual a una constante.

14. Hallar la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto $(-1, -5)$ y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

15. Demostrar que la distancia de cualquier punto de una hipérbola equilátera a su centro es media proporcional entre las longitudes de los radios vectores del punto. *Sugestión*: Véase el ejercicio 22 del grupo 30, Artículo 65, y el ejercicio 11 de este grupo.

16. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, y la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a la que tiene por ecuación

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

17. Demostrar que dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.

18. Demostrar que los focos de un par de hipérbolas conjugadas están sobre una circunferencia.

19. Demostrar que si una hipérbola es equilátera, su hipérbola conjugada es también equilátera.

20. La excentricidad de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es e_1. Si la excentricidad de su hipérbola conjugada es e_2 demostrar que $e_1 : e_2 = b : a$.

21. Si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas son e_1 y e_2, demostrar que $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2e_2^2$.

22. Demostrar que la distancia de un foco a una cualquiera de las asíntotas de una hipérbola es igual a la longitud de su semieje conjugado.

23. Si α es el ángulo agudo de inclinación de una asíntota de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que su excentricidad es igual a $\sec \alpha$.

24. Demostrar que si una recta es paralela a una asíntota de una hipérbola, corta a la curva solamente en un punto.

25. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

69. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola. Si el centro de una hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse (Art. 62). Por esto, se deja al estudiante, como ejercicio, el demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *La ecuación de una hipérbola de centro el punto* (h, k) *y eje focal paralelo al eje* X, *es de la forma*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, *su ecuación es*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, a *es la longitud del semieje transverso*, b *la del semieje conjugado*, c *la distancia del centro a cada uno de los focos*, *y* a, b, c *están ligadas por la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, *y la excentricidad* e *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1.$$

Una discusión de la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, análoga a la discusión que para la elipse nos condujo al teorema 3 del Artículo 62, nos da el siguiente

Teorema 4. *Si los coeficientes* A *y* C *difieren en el signo, la ecuación*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

Ejemplo. Discutir el lugar geométrico de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0. \qquad (1)$$

Solución. Vamos a reducir la ecuación (1) a la forma ordinaria completando los cuadrados. Entonces,

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

y

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4,$$

de donde,

$$9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1, \qquad (2)$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyo centro C es el punto $(3, 1)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje Y (fig. 100).

Como $a^2 = 9$, $a = 3$, y las coordenadas de los vértices V y V' son $(3, 1+3)$ y $(3, 1-3)$, o sea, $(3, 4)$ y $(3, -2)$, respectivamente. Como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, y las coordenadas de los focos F y F' son

$(3,\ 1+\sqrt{13})$ y $(3,\ 1-\sqrt{13})$, respectivamente. La longitud del eje transverso es $2a=6$, la del eje conjugado es $2b=4$, y la de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$. La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, aplicaremos el teorema 2 del Artículo 66, teniendo en cuenta que el centro de la hipérbola es el punto $(3,\ 1)$

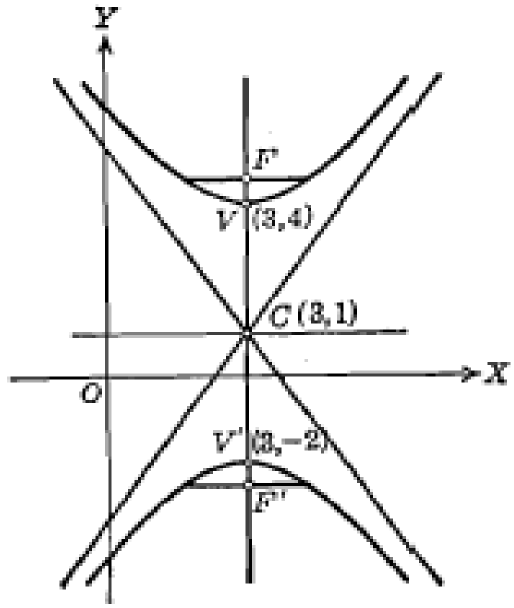

Fig. 100

y no el origen. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen sea el centro $C(3,\ 1)$, la ecuación (2) se reduce a la forma canónica

$$\frac{y'^2}{9}-\frac{x'^2}{4}=1,$$

de modo que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los nuevos ejes se obtienen de la relación

$$\frac{y'^2}{9}-\frac{x'^2}{4}=0.$$

Pero esta última relación al ser referida a los ejes originales X y Y, toma la forma

$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=0, \qquad (3)$$

de donde,

$$\left(\frac{y-1}{3}+\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{y-1}{3}-\frac{x-3}{2}\right)=0,$$

de manera que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los ejes originales X y Y son

$$\frac{y-1}{3}+\frac{x-3}{2}=0 \quad \text{y} \quad \frac{y-1}{3}-\frac{x-3}{2}=0$$

o sea, $$3x + 2y - 11 = 0, \quad y \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

El estudiante debe observar que la relación (3) puede obtenerse inmediatamente reemplazando el término constante por cero en el segundo miembro de la ecuación ordinaria (2). (Ver el ejercicio 13 del grupo 32, siguiente.)

EJERCICIOS. Grupo 32

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 3 del Artículo 69.
2. Por transformación de coordenadas, reducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria a las dos formas correspondientes de la primera ecuación ordinaria de la hipérbola.
3. Si la ecuación de una hipérbola está dada en la forma

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que las coordenadas de sus vértices son $(h+a, k)$, $(h-a, k)$, y que las coordenadas de sus focos son $(h+c, k)$, $(h-c, k)$, siendo $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

4. Emplear la primera ecuación ordinaria de la hipérbola para deducir la siguiente propiedad geométrica intrínseca de la hipérbola: Si el punto O es el centro de una hipérbola cuyos semiejes transverso y conjugado son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la hipérbola a su eje focal, se verifica que

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} - \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Por medio de la propiedad intrínseca de la hipérbola, establecida en el ejercicio 4, deducir ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la hipérbola.
6. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y de cada lado recto.
7. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Hallar la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.
8. El centro de una hipérbola es el punto $(2, -2)$ y uno de sus vértices el punto $(0, -2)$. Si la longitud de su lado recto es 8, hallar la ecuación de la curva, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad.
9. Los focos de una hipérbola son los puntos $(4, -2)$ y $(4, -8)$, y la longitud de su eje transverso es 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.
10. El centro de una hipérbola es el punto $(4, 5)$ y uno de sus focos es $(8, 5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.
11. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, y la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

12. Demostrar el teorema 4 del Artículo 69.

13. Demostrar que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

son $bx + ay - ak - bh = 0$ y $bx - ay + ak - bh = 0$.

En cada uno de los ejercicios 14-18, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, y del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

14. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$.
15. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$.
16. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$.
17. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$.
18. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$.

19. Resolver el ejercicio 14 por traslación de los ejes coordenados.

20. Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

21. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

22. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(3, 2)$ es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y + 1 = 0$.

23. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

24. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

25. Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola.

70. Propiedades de la hipérbola. Muchas propiedades de la hipérbola están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición para tangencia discutida en el Artículo 44. Las demostraciones de los teoremas 5 y 6, enunciados a continuación, se dejan como ejercicios al estudiante. Debe comparar estos teoremas con los análogos establecidos para la elipse (Art. 63, teoremas 4 y 5).

TEOREMA 5. *La ecuación de la tangente a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva es*

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$ (como la elipse.

TEOREMA 6. *Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

de pendiente m *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \quad |m| > \frac{b}{a}.$$

La hipérbola tiene una propiedad focal análoga a la de la elipse. Esta propiedad está basada en el siguiente teorema 7. La demostración es semejante a la del teorema análogo para la elipse (teorema 6, Art. 63) y, por tanto, se deja al estudiante como ejercicio.

TEOREMA 7. *La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.*

Para algunos de los teoremas que figuran en el siguiente grupo de ejercicios, hay teoremas análogos sobre la elipse; esto se hace notar en cada caso recomendando al lector que compare el teorema particular con su análogo en el grupo 29 del Artículo 63. También debe observarse que si en una ecuación relativa a una elipse se sustituye la cantidad b^2 por $-b^2$, la relación análoga se verifica entonces para la hipérbola.

EJERCICIOS. Grupo 33

Dibujar una figura para cada ejercicio.

1. Demostrar el teorema 5 del Artículo 70.
2. Demostrar el teorema 6 del Artículo 70.
3. En el teorema 6 del Artículo 70, ¿por qué la pendiente m está restringida a los valores comprendidos en el intervalo $|m| > \frac{b}{a}$? Interpretar el resultado cuando $|m| = \frac{b}{a}$.
4. Demostrar el teorema 7 del Artículo 70.

En cada uno de los ejercicios 6-8, hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la hipérbola dada, en el punto de contacto indicado.

5. $3x^2 - y^2 = 2$; $(1, 1)$.
6. $2x^2 - 3y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$; $(4, 2)$.
7. $3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y - 12 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$$

que son paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$.

9. Hallar el ángulo formado por las tangentes trazadas del punto (3, 6) a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

10. Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

11. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la hipérbola $b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ son

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \quad |m| > \frac{b}{a}.$$ (qalipse

(Ver el ejercicio 13 del grupo 29, Art. 63.)

12. Se dan una hipérbola y sus focos. Aplicando el teorema 7 del Artículo 70, demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la curva.

13. Demostrar que la ecuación de la normal a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x + b^2x_1y - a^2x_1y_1 - b^2x_1y_1 = 0$. (Ver el ejercicio 14 del grupo 29, Art. 63.)

14. Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ son ortogonales entre sí en sus puntos de intersección.

15. Demostrar que la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos. Tales curvas se llaman *cónicas homofocales*. Demostrar que la elipse y la hipérbola del ejercicio 14 son también homofocales.

16. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje conjugado. (Ver el ejercicio 19 del grupo 29, Art. 63.)

17. Demostrar que la pendiente de una hipérbola en cualquier extremo de cualquiera de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad. (Ver el ejercicio 18 del grupo 29, Art. 63.)

18. Demostrar que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

19. En un punto cualquiera P, excepto el vértice, de una hipérbola equilátera, se traza una normal que corta al eje focal en el punto Q. Si O es el centro de la hipérbola, demuéstrese que $|\overline{OP}| = |\overline{PQ}|$.

20. Demostrar que el triángulo formado por una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante.

21. Las tangentes en los vértices de una hipérbola cortan a otra tangente cualquiera en los puntos P y Q. Demostrar que los puntos P y Q y los focos de la hipérbola están sobre una circunferencia.

22. Si desde un punto exterior P_1, se trazan tangentes a una hipérbola, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa hipérbola. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2.$$

(Ver el ejercicio 21 del grupo 29, Art. 63.)

23. Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto $(-2, 4)$ de la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 3$.