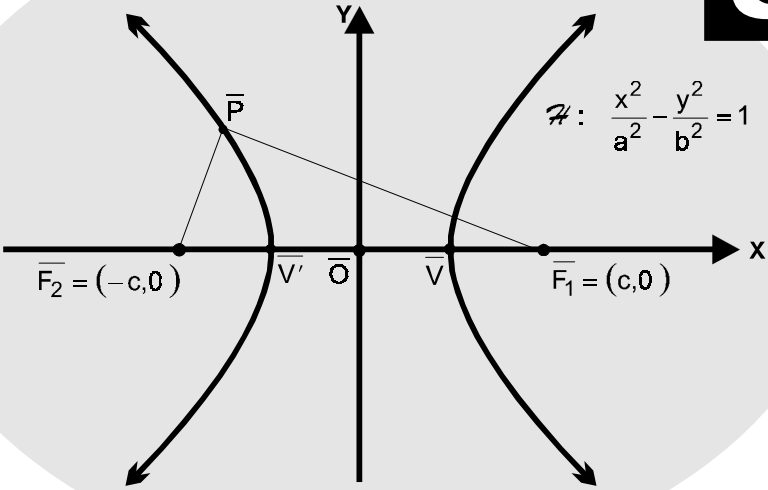


Capítulo 8



LA HIPÉRBOLA

- 67** Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $\bar{A} = (2,3)$, tiene su centro en el origen, su eje transversal está sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}x = 0$.

Solución:

Sean \langle_1 y \langle_2 asíntotas de la hipérbola H .

Si $\langle_1: 2y - \sqrt{7}x = 0 \rightarrow \langle_2: 2y + \sqrt{7}x = 0$

Luego:

$$\circ H: (2y - \sqrt{7}x)(2y + \sqrt{7}x) = k \rightarrow H: 4y^2 - 7x^2 = k \rightarrow \textcircled{1}$$

Pero: $\bar{A} = (2,3) \in H \rightarrow 36 - 28 = k \rightarrow k = 8$

En $\textcircled{1}: H: 4y^2 - 7x^2 = 8 \rightarrow H: \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{8/7} = 1$

68 Hallar la ecuación de la hipérbola, con vértices en $\bar{V} = (0, \pm 7)$ y $e = 4/3$.

Solución:

De los datos se deduce : $H: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Si: $\bar{V} = (0, \pm 7) = (0, \pm a) \Rightarrow a = \pm 7$

Además: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{4}{3} \times a \Rightarrow c^2 = \frac{784}{9}$

Luego: $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{784}{9} - 49 \Rightarrow b^2 = \frac{343}{9}$

Por lo tanto: $H: \frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{343/9} = 1$

$H: 9x^2 - 7y^2 = 343$

69 Dada la ecuación de la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 4$, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de la cuerda normal (lado recto).

Solución:

Sabemos: $H: x^2 - 4y^2 = 4 \Rightarrow H: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

De donde:

◦ $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$ ◦ $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

◦ $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow c = \pm \sqrt{5}$

Vértices: $\bar{V} = (\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

Focos: $\bar{F} = (\pm c, 0) = (\pm \sqrt{5}, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

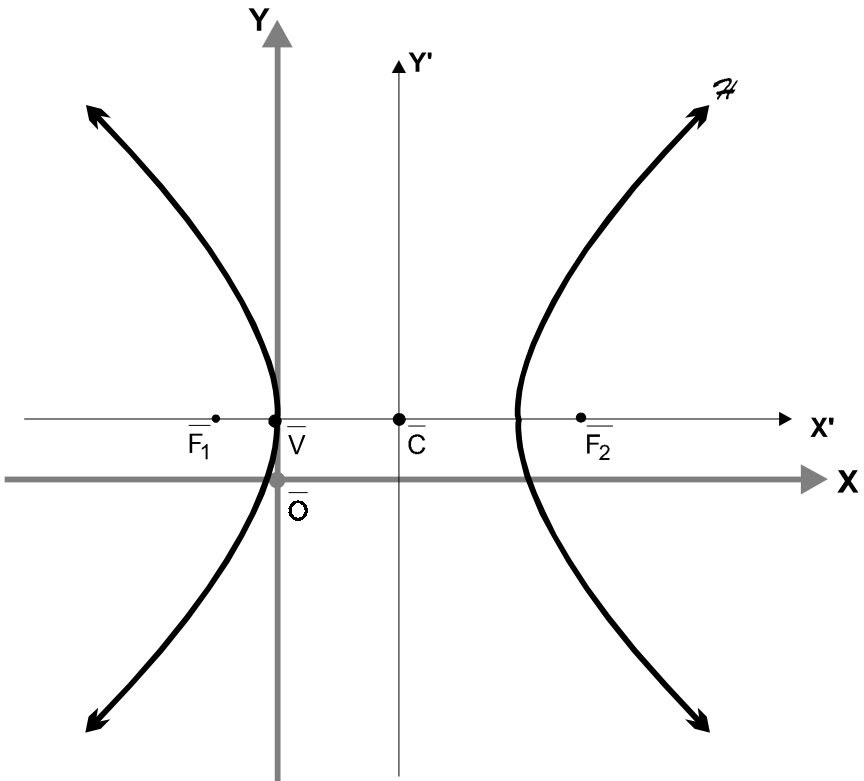
Cuerda Normal: $CN = \left| \frac{2b^2}{a} \right| = \left| \frac{2 \times 1}{2} \right| = 1$

Eje Transverso: $|2a| = 4$

Eje Conjugado: $|2b| = 2$

- 70** Encontrar la ecuación de la hipérbola de focos $\overline{F_1} = (-1, 1)$ y $\overline{F_2} = (5, 1)$ y un vértice en $\overline{V} = (0, 1)$.

Solución:



Capítulo 8. LA HIPÉRBOLA

$$\text{Sabemos: } |F_1F_2| = 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$$

$$\circ \bar{C} = (h, k) \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{C} = (2, 1)$$

Ahora:

$$\circ a = |CV| = 2 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\circ c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

$$\text{Por lo tanto: } H: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$H: \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

- 71** Determinar la ecuación de la hipérbola, sabiendo que sus focos son los puntos $\bar{F}_1 = (3, 4)$ y $\bar{F}_2 = (3, -2)$ y su excentricidad es igual a 2.

Solución:

$$\circ \bar{C} = (h, k) \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{C} = (3, 1)$$

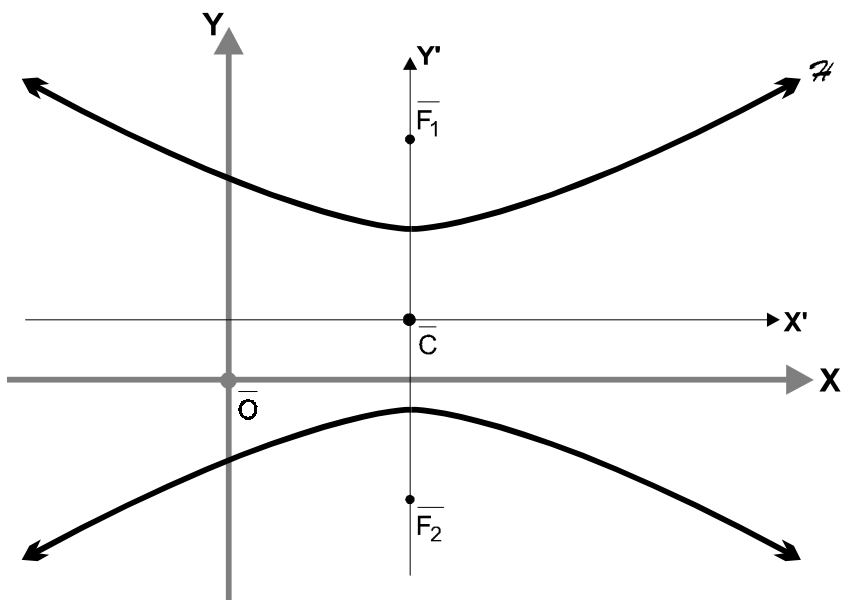
$$\text{Luego: } c = |F_1C| = |CF_2| = 3$$

$$\text{Además: } e = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Sabemos que: } b^2 = c^2 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{27}{4}$$

$$\text{Por lo tanto: } H: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$H: \frac{(y-1)^2}{9/4} - \frac{(x-3)^2}{27/4} = 1$$



- 72** Hallar la ecuación de la hipérbola, cuyos focos están en los vértices de la elipse: $x^2/100 + y^2/64 = 1$. Y las directrices pasan por los focos de esta elipse.

Solución:

En la elipse: $\bar{O} : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

- $a^2 = 100 \Rightarrow a = \pm 10$ ◦ $b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$
- $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow c = \pm 6$

De donde: $\bar{F} = (\pm c, 0) = (\pm 6, 0)$

En la hipérbola: $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por condición del problema, obtenemos el valor de c en la hipérbola a partir del valor de a en la elipse.

- $c = \pm 10 \Rightarrow c^2 = 100$

Capítulo 8. LA HIPÉRBOLA

La ecuación de la directriz de la hipérbola : $x = \pm \frac{a}{e}$

$$\rightarrow x = \pm \frac{a}{c/a} = \frac{a^2}{c} = \pm \frac{a^2}{10} \longrightarrow \textcircled{1}$$

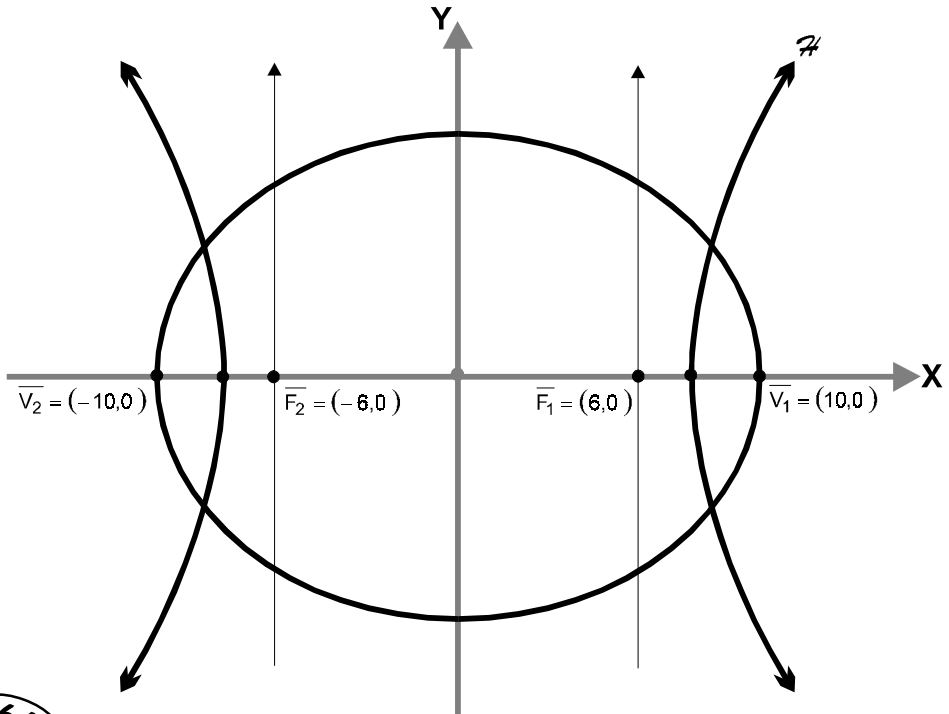
Por condición del problema : $x = c$; donde c es un valor obtenido en la elipse.

Luego en $\textcircled{1}$: $a^2 = 60$

Seguido : $b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 100 - 60 \rightarrow b^2 = 40$

Por lo tanto : $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$H: \frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{100} = 1$$



- 73** Dada la ecuación de la hipérbola: $(x-4)^2/16 - y^2/128 = 1$, encontrar las coordenadas del centro, vértices y focos; la excentricidad; las ecuaciones de las directrices y asíntotas; y la longitud de la cuerda normal (lado recto).

Solución:

Si $H: \frac{(x-4)^2}{16} - \frac{y^2}{128} = 1 \longrightarrow \textcircled{1}$

se deduce que $\bar{C} = (h,k) = (4,0)$

Además:

- $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ ◦ $b^2 = 128 \Rightarrow b = \pm 8\sqrt{2}$
- $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 128 = 144 \Rightarrow c = \pm 12$

Vértice: $\bar{V} = (h \pm a, k) = (4 \pm 4, 0) \Rightarrow \begin{cases} V_1 = (8, 0) \\ V_2 = (0, 0) \end{cases}$

s:

Focos: $\bar{F} = (h \pm c, k) = (4 \pm 12, 0) \Rightarrow \begin{cases} F_1 = (16, 0) \\ F_2 = (-8, 0) \end{cases}$

Ecuaciones de las directrices:

$$x = h \pm \frac{a}{e} = 4 \pm \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 16/3 \\ x = 8/3 \end{cases}$$

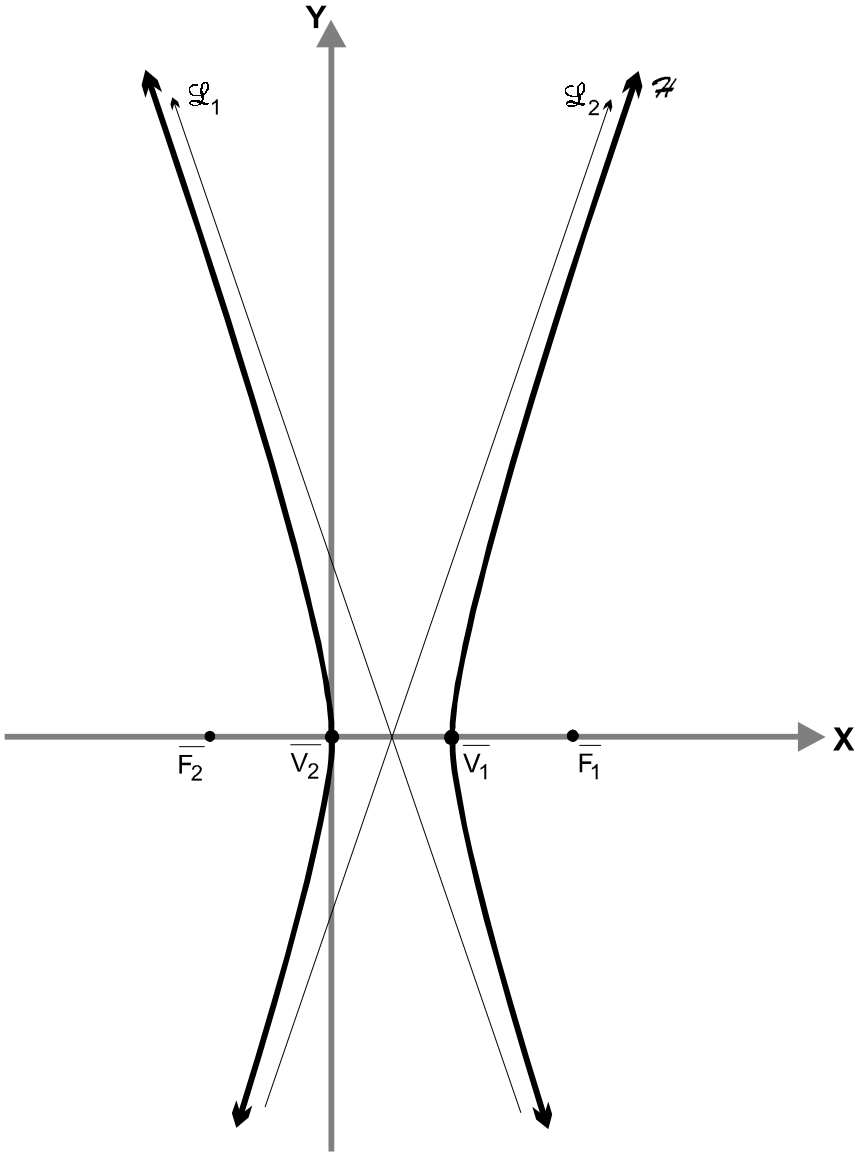
Ecuaciones de las asíntotas; en $\textcircled{1}$:

$$8(x-4)^2 - y^2 - 128 = k$$

$$\Rightarrow [2\sqrt{2}(x-4) + y] \cdot [2\sqrt{2}(x-4) - y] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} <_1: 2\sqrt{2}(x-4) + y = 0 \\ <_2: 2\sqrt{2}(x-4) - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cuerda Normal: } CN = \left| \frac{2b^2}{a} \right| = \left| \frac{2 \times 128}{4} \right| = |64| = 64$$



- 74** Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $\bar{A} = (3, -2)$ y $\bar{B} = (7, 6)$, tiene su centro en el origen y el eje transversal coincide con el eje X.

Solución:

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\circ \bar{A} = (3, -2) \in H: \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$\circ \bar{B} = (7, 6) \in H: \Rightarrow \frac{49}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \longrightarrow \textcircled{2}$$

$$\text{De } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2}: \quad a^2 = 4; \quad b^2 = 16/5$$

$$\text{Luego:} \quad H: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16/5} = 1$$

$$\therefore \quad \underline{H: 4x^2 - 5y^2 = 16}$$

- 75** Un observador estacionado en el punto \bar{P} oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de \bar{P} es una hipérbola.

Solución:

Sean:

- V_b : Velocidad de la bala
- V_s : Velocidad del sonido

$$\text{Además:} \quad e = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{e}{v}$$

Por condición del problema : $\frac{\overline{RP}}{V_s} = \frac{\overline{BR}}{V_b} + \frac{\overline{BP}}{V_s} \longrightarrow \textcircled{1}$

De $\textcircled{1}$:

$$\rightarrow \frac{\overline{RP}}{V_s} - \frac{\overline{BP}}{V_s} = \frac{\overline{BR}}{V_b}$$

$$\rightarrow \overline{RP} - \overline{BP} = V_s \times \frac{\overline{BR}}{V_b} = k$$

$\rightarrow \overline{RP} - \overline{BP} = k$ (Definición de hipérbola)
LQQD

