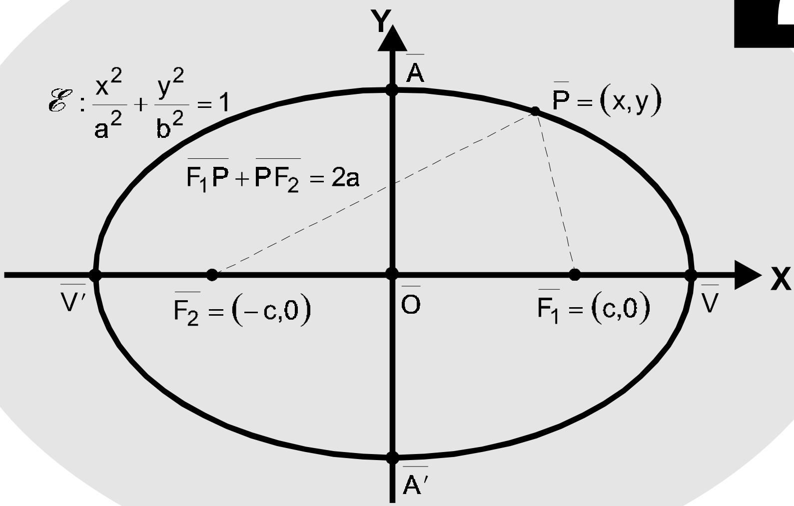
Capítulo 7



LA ELIPSE

56 Hallar la ecuación de la elipse cuya longitud de la cuerda normal (lado recto) es 5 vértices $(\pm 10,0)$.

Solución:

Sabemos: $\quad$ õ $: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow$ ①

Luego del enunciado :

- $CN=\left|\frac{2b^2}{a}\right|=5 \iff b^2=25$
- $a=10 \Rightarrow a^2=100$

Por lo tanto en ①: $\quad \boxed{\text{õ} : \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1}$

57 Hallar la ecuación de la elipse, cuyo eje es coincidente con $x = 1$, $\overline{C} = (1,5)$, $\overline{F} = (1,8)$; suma de las distancias focales de un punto de la elipse es 12.

Solución:

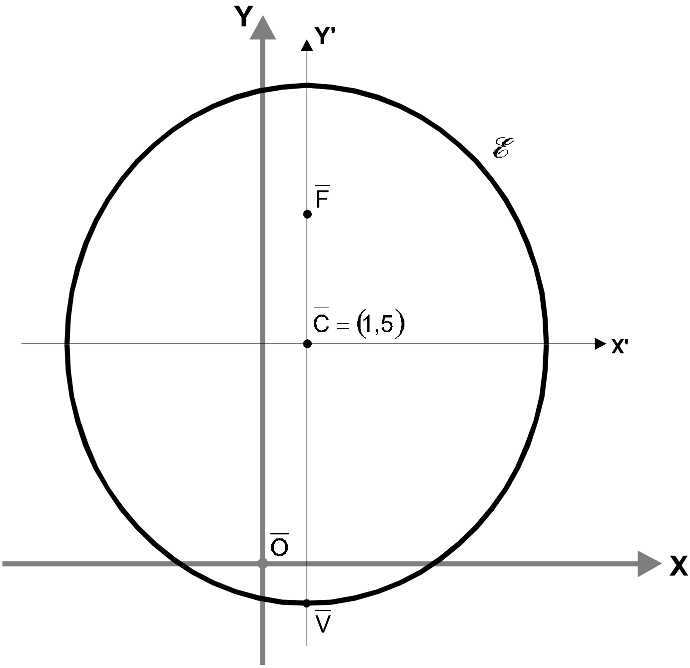
Del enunciado deducimos: $\quad$ õ : $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Pero: $\quad 2a = 12 \iff a = 6 \iff a^2 = 36$

Luego: $\quad c = \left|\overline{CF}\right| = 3 \iff c^2 = 9$

Sabemos: $\quad b^2 = a^2 - c^2 \iff b^2 = 36 - 9 = 27 \iff b^2 = 27$

Por lo tanto: $\quad$ $\boxed{\text{õ} : \dfrac{(x-1)^2}{27} + \dfrac{(y-5)^2}{36} = 1}$



58 Reducir la ecuación $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ a la forma ordinaria de la ecuación de una elipse y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la cuerda normal; y la excentricidad.

Solución:

$$x^2+4y^2-6x+16y+21=0$$

Completando cuadrados para x e y :

$$\left(x^2-6x+9\right)+4\left(y^2+4y+4\right)=-21+9+16$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$$

$$\text{õ}: \quad \frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

De la ecuación tenemos : $\overline{C}=(h,k)=(3,-2)$

Luego los vértices de la elipse se obtienen de :

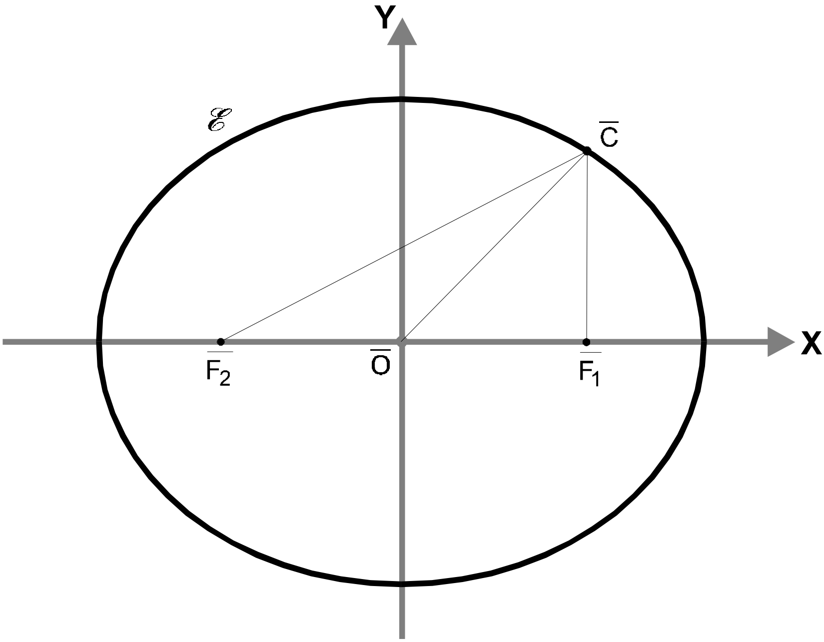
$$\Rightarrow \quad V=(h\pm a,k)=(3\pm 2,-2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{V_1}=(5,-2) \\ \overline{V_2}=(1,-2) \end{cases}$$

También :

- $a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$ ◦ $b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$
- $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4=1+c^2 \Rightarrow c^2=3 \Rightarrow c^2=\pm\sqrt{3}$
- Eje mayor : $2a=2\times 2=4$ ◦ Eje menor : $2b=2\times 1=2$
- Cuerda Normal : $CN=\left|\dfrac{2b^2}{a}\right|=\dfrac{2\times 1}{2}=1$
- Excentricidad : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}<1$

59 Por el foco de la elipse $x^2/25 + y^2/15 = 1$ se ha trazado una perpendicular a su eje mayor. Determinar las distancias de los puntos de intersección de esta perpendicular con la elipse hasta los focos.

Solución:



Tenemos la ecuación de la elipse :

➡ õ : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{15} = 1 \longrightarrow$ ①

Sabemos : $b^2 = a^2 - c^2$ ➡ $c^2 = a^2 - b^2$ ➡ $c = \pm\sqrt{25 - 15} = \pm\sqrt{10}$

Luego, los focos de la elipse son :

➡ $\overline{F} = (\pm c, 0)$ ➡ $\overline{F} = (\pm\sqrt{10}, 0)$

La ecuación de la perpendicular

trazada en el primer foco es : $x = \sqrt{10} \longrightarrow$ ②

De ① y ②: $\frac{9}{25} + \frac{y^2}{15} = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = 9 \;\Rightarrow\; y = \pm 3$

De aquí : $C = (x, y) = \left(\sqrt{10}, 3\right)$

Por lo tanto :

- $\left|F_1C\right| = \sqrt{\left(\sqrt{10} - \sqrt{10}\right)^2 + (0-3)^2} = 3$
- $\left|F_2C\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{10} - \sqrt{10}\right)^2 + (0-3)^2} = 7$

60 Búsquese la ecuación de la elipse que tenga como centro $\overline{C} = (-2, 4)$ y sea tangente a los dos ejes de coordenadas.

Solución:

Sea : õ : $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Para este caso :

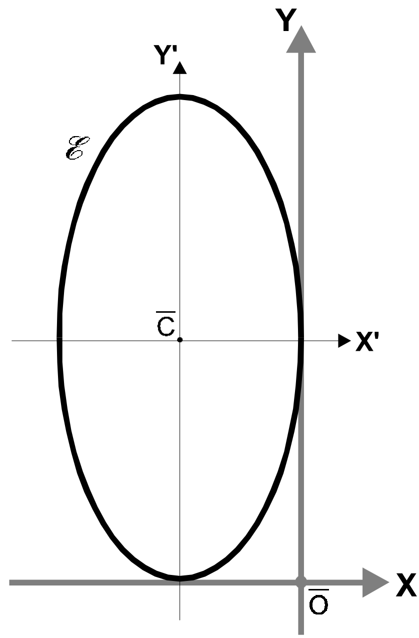
- a : Distancia de $\overline{C}$ al eje X

  $\Rightarrow a = 4 \;\Rightarrow\; a^2 = 16$

- b : Distancia de $\overline{C}$ al eje Y

  $\Rightarrow b = 2 \;\Rightarrow\; b^2 = 4$

$\Rightarrow$ $\boxed{õ : \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1}$



61 Hallar la ecuación canónica de la elipse, si uno de los vértices está en $\overline{V_1}=(5,0)$ y pasa por el punto $\overline{P}=(2,3)$.

Solución:

∘ $\text{õ} : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Dado que : $\overline{V_1}=(5,0)$ ➨ $a=5$ ➨ $a^2=25$

Luego : $\text{õ} : \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Como : $\overline{P}=(2,3) \in \text{õ}$ ➨ $\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{b^2}=1$ ➨ $b^2=\dfrac{75}{7}$

Por lo tanto :

$$\text{õ} : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{75/7}=1 \quad ➨ \quad \boxed{\text{õ} : \ 3x^2+7y^2=75}$$

62 La base de un auditorio es de forma elíptica, tiene 20 m. de longitud y 16 m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro foco?

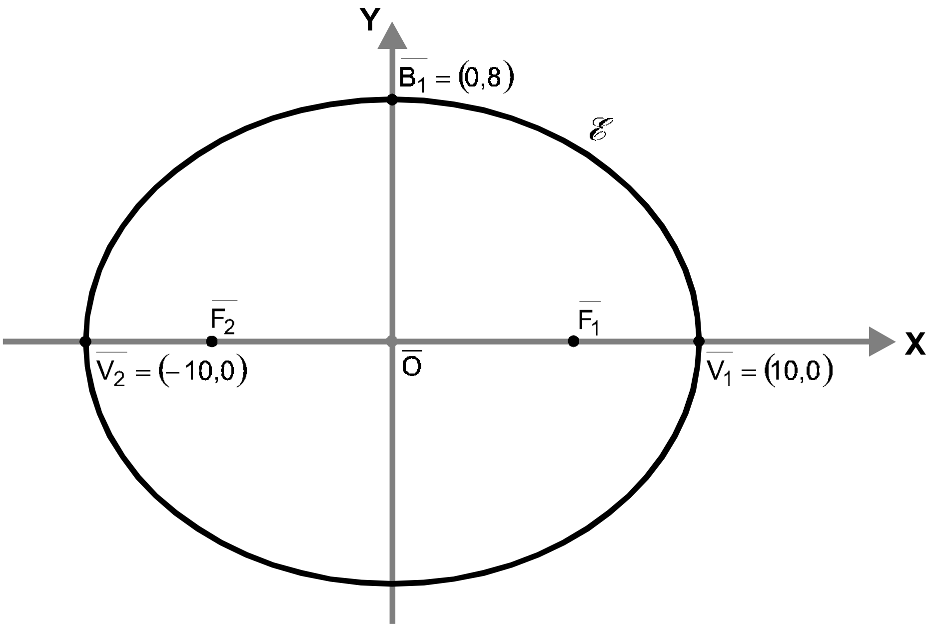
Solución:

Según los datos del enunciado:

∘ $a=10$ ➨ $a^2=100$
∘ $b=8$ ➨ $b^2=64$

De donde: $b^2=a^2-c^2$ ➨ $c^2=36$ ➨ $c=\pm 6$

Por lo tanto: $\boxed{\left|F_1F_2\right|=\left|2c\right|=12}$



63 Usando la definición de elipse, obtener la ecuación de la elipse con focos en $\overline{F} = (-3,4)$ y $\overline{F_2} = (5,4)$ eje mayor 12.

Solución:

Sea $\overline{P} = (x,y)$ el punto que se mueve.

Por la definición de elipse, se tiene que :

➡ $\left|F_1P\right| - \left|F_2P\right| = 2a = 12$

De donde :

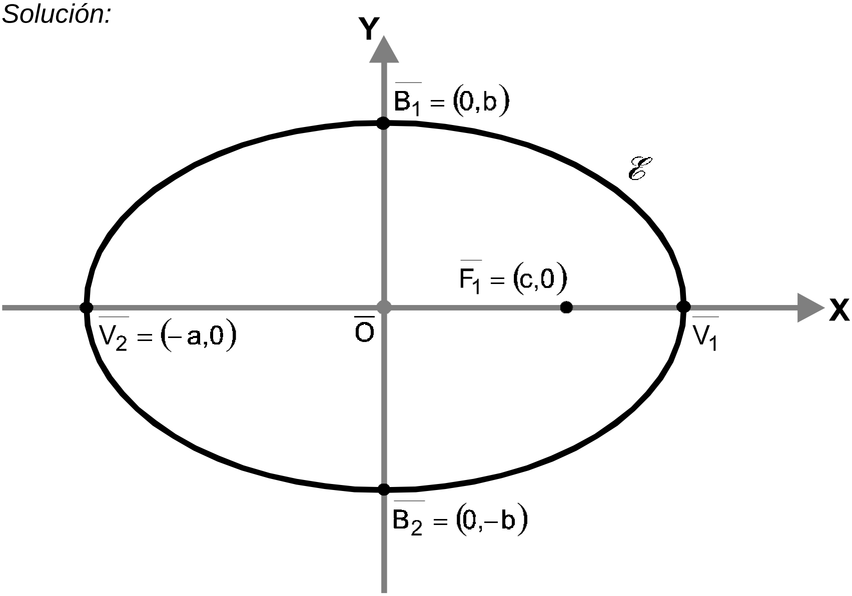
➡ $\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = 12$

Efectuando operaciones :

$$\text{õ} : \quad 5x^2 - 9y^2 + 10x + 72y + 31 = 0$$

64 Demostrar que para todo elipse que tenga su centro en el origen, la distancia de cualquiera de los extremos del eje menor a cualquiera de los focos es la mitad de la longitud del eje mayor.

Solución:



Sea õ : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ la elipse con vértice en el origen.

Probar que :

∘ $\left|B_1 F_1\right| = \dfrac{\left|V_1 V_2\right|}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

Luego, de la figura : $\left|B_1 F_1\right| = \sqrt{c^2 + b^2}$

pero, sabemos por definición que : $a^2 = c^2 + b^2$

Por lo tanto : $\boxed{\left|B_1 F_1\right| = \sqrt{a^2} = a}$

65 Un punto se mueve de tal modo que la suma de las distancias de los puntos $\overline{A}=(-2,0)$ y $\overline{B}=(-2,6)$ es 8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de $\overline{P}$.

Solución:

Sea $\overline{P}=(x,y)$ el punto que se mueve.

Por la condición del problema:

$$|AP|+|BP|=8$$

De donde :

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-6)^2}=8$$

Efectuando operaciones, se tiene :

$$õ\ :\ 16x^2+7y^2+64x-42y+15=0$$

$$\therefore\quad \boxed{õ\ :\ \frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y-3)^2}{16}=1}$$

66 La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente una elipse, con el Sol en uno de los focos. Si el eje mayor de la órbita elíptica es de 300 000 km. y la excentricidad es de 0,017 aproximadamente. Hallar la distancia máxima y mínima de la Tierra al Sol.

Solución:

De los datos y según el gráfico, tenemos que :

◦ $2a=300000 \quad ➡ \quad a=150\,000$

Del valor aproximado de la excentricidad de la elipse :

◦ $e=\dfrac{c}{a}=0{,}017 \quad ➡ \quad c=0{,}017\times a=0{,}017\times 150000 \quad ➡ \quad c=2550$

Luego :

- Máximo : $a + c = 150000 + 2550$ ➡ $\boxed{a + c = 152550}$

- Mínimo : $a - c = 150000 - 2550$ ➡ $\boxed{a - c = 147450}$