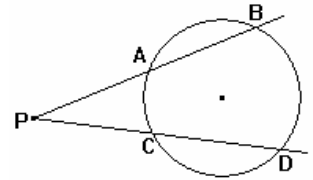


La Circunferencia y el círculo

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

- Si desde un punto P, exterior a una circunferencia, trazamos dos rectas secantes a una circunferencia, se cumple que:

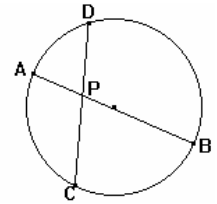
$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$



A este producto se le llama POTENCIA del punto P respecto de la circunferencia.

- Si dos cuerdas se cortan en un punto P, los segmentos que se forman cumplen la siguiente relación:

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$



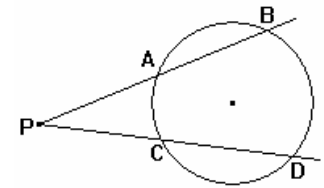
Ejemplo:

Si $\overline{PA} = 4 \text{ cm}$; $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$; $\overline{PC} = 7 \text{ cm}$; Cuánto mide \overline{PD} ?

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

$$4 \text{ m} \cdot 12 \text{ cm} = 7 \text{ cm} \cdot \overline{PD}$$

$$\frac{4 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = \overline{PD} \rightarrow \overline{PD} = 6,85 \text{ cm}$$



Ejemplo: Si $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$; $\overline{PC} = 3 \text{ cm}$ y $\overline{PD} = 4 \text{ cm}$ Cuánto mide \overline{PB} ?

Llamemos: $\overline{PA} = x \rightarrow \overline{PB} = 8 - x$ (porque $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$)

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

$$x \cdot (8 - x) = 3 \cdot 4$$

$$8x - x^2 = 12$$

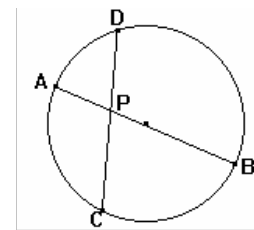
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 6 \wedge x_2 = 2$$

$$\text{Luego: } \overline{PA} = 6 \text{ cm} \rightarrow \overline{PB} = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$$

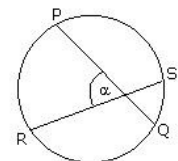
$$(\text{o bien } \overline{PA} = 2 \text{ cm} \rightarrow \overline{PB} = 6 \text{ cm})$$



Otras propiedades Angulares de la Circunferencia

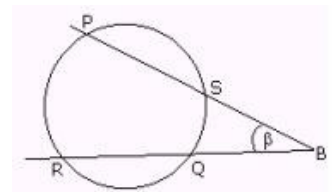
- El ángulo formado por dos cuerdas equivale a la semi-suma de las medidas de los arcos que interceptan.

$$\alpha = \frac{\widehat{PR} + \widehat{QS}}{2}$$

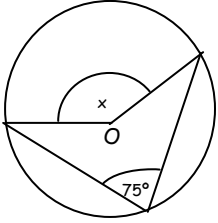
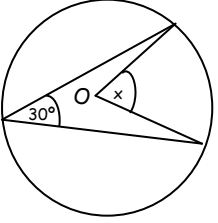
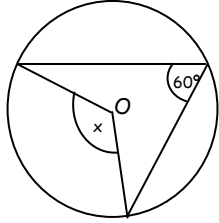
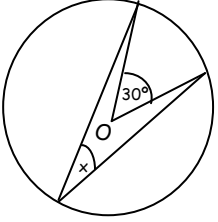
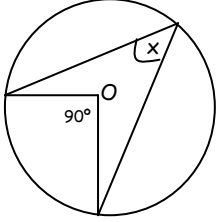
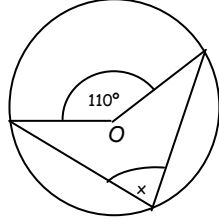
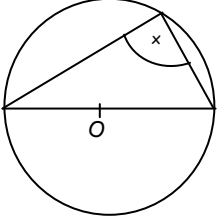
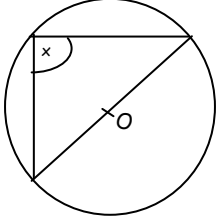
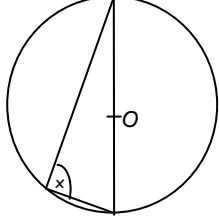
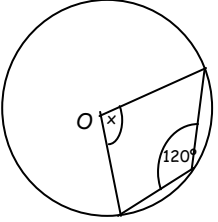
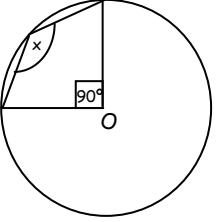
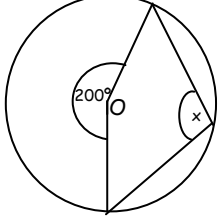


- El ángulo formado por dos rectas secantes a una circunferencia equivale a la semi-diferencia de los arcos que interceptan.

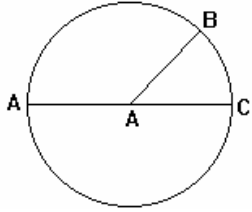
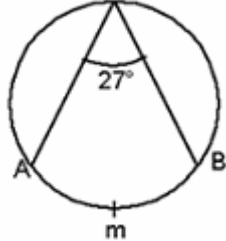
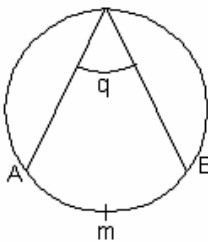
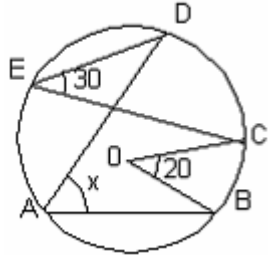
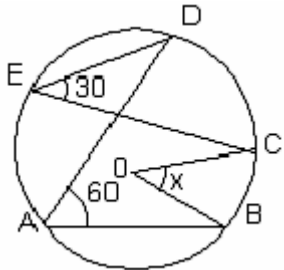
$$\beta = \frac{\widehat{PR} - \widehat{QS}}{2}$$



Ejercicios de desarrollo: Encuentra en cada caso la medida del ángulo x . (O es centro de la circunferencia)

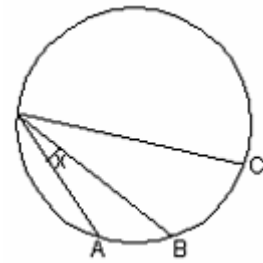
| | | |
|--|--|--|
| <p>1)</p>  | <p>2)</p>  | <p>3)</p>  |
| <p>4)</p>  | <p>5)</p>  | <p>6)</p>  |
| <p>7)</p>  | <p>8)</p>  | <p>9)</p>  |
| <p>10)</p>  | <p>11)</p>  | <p>12)</p>  |

Ejercicios

| | |
|--|---|
| <p>1. En la circunferencia de centro O y diámetro AC. Si $\angle AOB = 120^\circ$, entonces $\angle ACB = ?$</p> <p>A) $12,5^\circ$ B) 25° C) 30° D) 50° E) 60°</p> |  |
| <p>2.- En la figura m, es punto medio del arco AB. Entonces, arco $Am = ?$</p> <p>A) $22,7^\circ$ B) 54° C) $127,5^\circ$ D) 27° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>3.- En la figura m, es punto medio del arco AB. Entonces, arco $Am = ?$</p> <p>A) $2q$ B) $2/3q - 90^\circ$ C) q D) $180^\circ - q/2$ E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>4.- Dada la siguiente figura, donde O es centro de la circunferencia. $\angle x = ?$</p> <p>A) 30° B) 45° C) 40° D) 20° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>5.- Dada la siguiente figura, donde O es centro de la circunferencia. $\angle x = ?$</p> <p>A) $37,5^\circ$ B) 45° C) 30° D) 60° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |

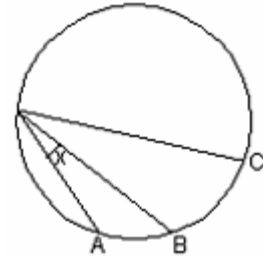
6.- Arco AC es $\frac{1}{6}$ de la circunferencia. B es punto medio de AC. $\angle x = ?$

- A) 120°
- B) 12°
- C) 60°
- D) 30°
- E) Ninguna de las anteriores



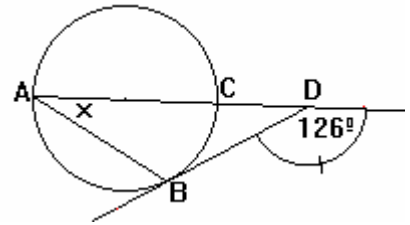
7.- Arco AC = 30° de la circunferencia. $\widehat{AB} : \widehat{BC} = 2:3$. $\angle x = ?$

- A) 56°
- B) 6°
- C) 12°
- D) 24°
- E) Ninguna de las anteriores



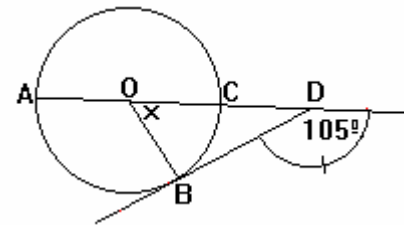
8.- Dada la siguiente figura, con diámetro AC, ¿cuál es la medida del $\angle x = ?$

- A) 54°
- B) 36°
- C) 18°
- D) 12°
- E) Ninguna de las anteriores



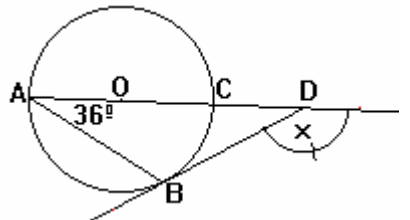
9.- En la figura, O centro de la \odot , ¿cuál es la medida del $\angle x = ?$

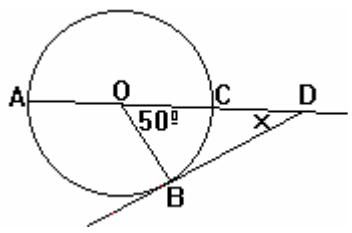
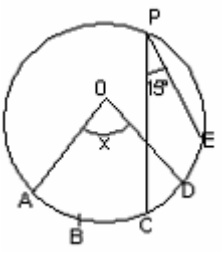
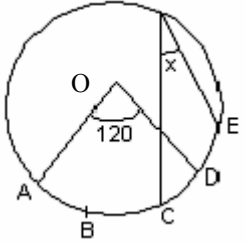
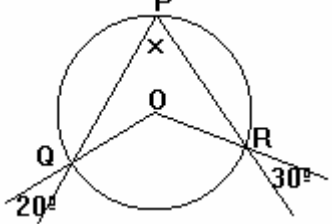
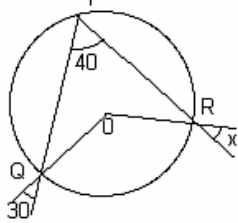
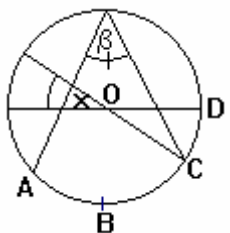
- A) 90°
- B) 45°
- C) 30°
- D) 15°
- E) Ninguna de las anteriores

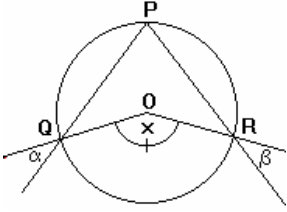
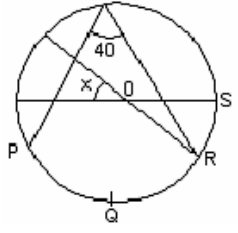
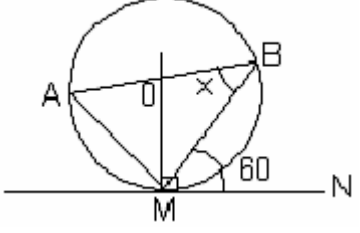
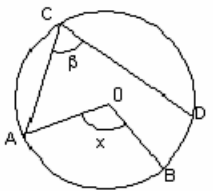
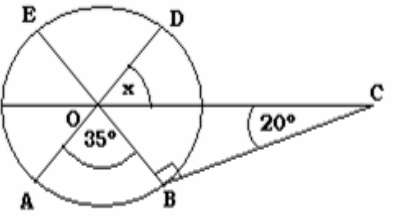
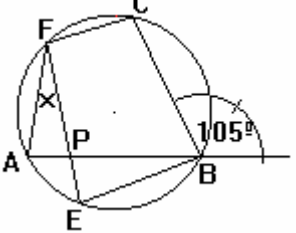


10.- En la figura, O centro de la \odot , ¿cuál es la medida del $\angle x = ?$

- A) 160°
- B) 150°
- C) 154°
- D) 172°
- E) 162°

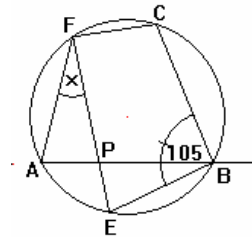


| | |
|--|---|
| <p>11.- En la figura. O centro de la \odot, ¿cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>12.- Dada la siguiente figura. O centro de \odot. $\angle CPE = 15^\circ$. arco $AB =$ arco $BC =$ arco $CD =$ arco DE, ¿cuál es la medida del ángulo $x = ?$</p> <p>A) 15° B) 45° C) 30° D) 60° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>13.- En la \odot de centro O, arco $AB =$ arco $BC =$ arco $CD =$ arco DE, ¿cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) 80° B) 50° C) 30° D) 40° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>14.- O centro de la circunferencia. ¿Cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) 410° B) 260° C) 50° D) 100° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>15.- O centro de la circunferencia. ¿cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) 10° B) 70° C) 80° D) 90° E) 100°</p> |  |
| <p>16.- O centro de la circunferencia. Los arcos $AB = BC = CD$, ¿cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) $2\beta + 90^\circ$ B) $180^\circ - \beta$ C) $\beta/2$ D) β E) Ninguna de las anteriores</p> |  |

| | |
|---|---|
| <p>17.- O centro de la circunferencia. ¿Cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) $360^\circ - \alpha + \beta$ B) $2 \cdot (\alpha + \beta)$ C) $\alpha + \beta$ D) $2\alpha + \beta/3$ E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>18.- O centro de la circunferencia. Los arcos $PQ=QR=RS$. ¿Cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) 40° B) 60° C) 80° D) 100° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>19.- O centro. MN tangente a la circunferencia. ¿Cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) 140° B) 70° C) 60° D) 30° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>20.- O centro. Arco $AB = 2$ arco BD. ¿Cuál es la medida del $\angle x$?</p> <p>A) β B) $90^\circ - \beta/3$ C) 2β D) $(4/3)\beta$ E) Ninguna de las anteriores</p> |  |
| <p>21.- En la circunferencia de centro O de la figura 1, se han dibujado tres diámetros. Con los datos dados, determina el valor del $\angle x$?</p> <p>A) 75° B) 35° C) 20° D) 70° E) 110°</p> |  |
| <p>22.- Dada la siguiente circunferencia $\angle EFC = 85^\circ$ $\angle x = ?$</p> <p>A) 15° B) 40° C) 20° D) 75° E) Ninguna de las anteriores</p> |  |

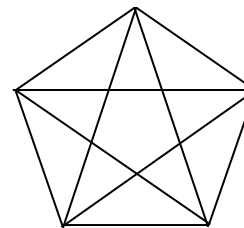
23.- Dada la siguiente circunferencia. arco $CFA=135^\circ$, $\angle x=$

- A) $12,5^\circ$
- B) 25°
- C) 75°
- D) $37,5^\circ$
- E) Ninguna de las anteriores



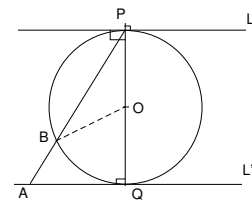
24. ¿Cuál es el total de los trapecios isósceles dentro del pentágono regular en donde se ha inscrito una estrella?

- A) 4
- B) 5
- C) 10
- D) 8
- E) Ninguna de las anteriores



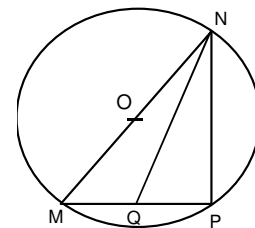
25. En la figura $L//L'$; si $\angle POB = 120^\circ$ y $OQ = 3\text{cm}$, entonces la medida de AP es:

- A) $\sqrt{12}$
- B) $\sqrt{48}$
- C) 3
- D) 6
- E) $\frac{\sqrt{12}}{2}$



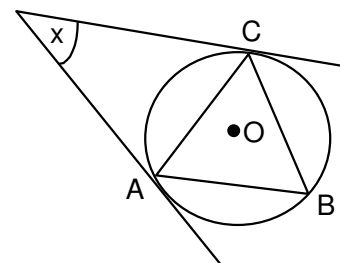
26. En la circunferencia de centro O y radio r, \overline{MN} es diámetro, si $\overline{MP} = r$ y Q punto medio de \overline{MP} , entonces $\overline{QN} =$

- A) $r\sqrt{3}$
- B) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$
- C) $\frac{r\sqrt{13}}{2}$
- D) $r\sqrt{21}$
- E) No se puede determinar



27. En la figura el $\angle ABC$ es equilátero ¿Cuánto mide el $\angle x$? Si O es el centro de la circunferencia

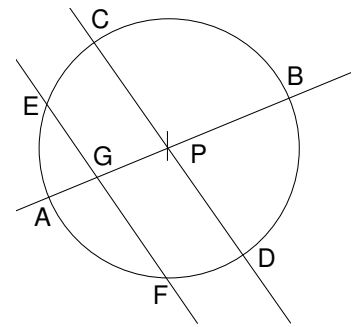
- A) 100°
- B) 30°
- C) 120°
- D) 60°
- E) falta información



28. En la figura P es el centro de la circunferencia $\overline{AB} \parallel \overline{FD}$, $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ Arco(CA) = Arco(AD), entonces es(son) verdadera(s)

- I. $\overline{GP} = \overline{FD}$
- II. GFDP es trapecio rectángulo
- III. ángulo AGE = ángulo BPD

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo I y III
- E) Ninguna de las anteriores

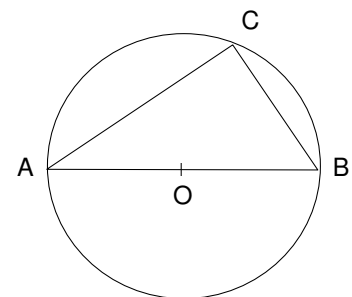


29. El triángulo ABC está trazado en la mitad de la circunferencia.

Si $h_c = 4$ cm y el lado $\overline{CB} = 5$ cm. El radio de la circunferencia es:

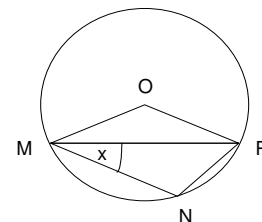
- A) 3 cm
- B) $4\frac{1}{6}$ cm
- C) $6\frac{1}{3}$ cm
- D) $12\frac{1}{2}$ cm
- E) Ninguna de las anteriores

E) Ninguna de las anteriores



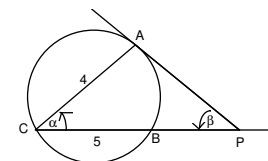
30. En la figura se tiene circunferencia de centro O, \overline{MP} bisectriz del $\angle OMN$. Si $\angle MPN = 40^\circ$, entonces $x = ?$

- A) 25°
- B) 30°
- C) 35°
- D) 40°
- E) 45°



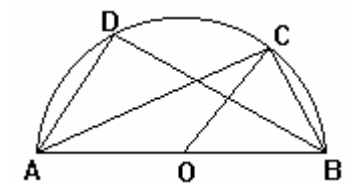
31. A un círculo de 5 cm de diámetro se traza desde un punto P una tangente \overline{PA} y una secante PBC que pasa por el centro como lo indica la figura. Si la cuerda \overline{AC} mide 4 cm y BP mide 4 cm. Calcular la tangente \overline{PA} .

- A) 3 cm
- B) 6 cm
- C) 7 cm
- D) 8 cm
- E) 9 cm



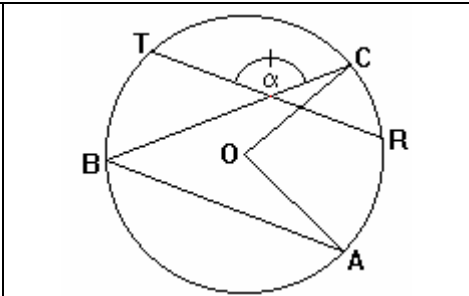
32. En la semicircunferencia de centro O, $\angle DAB = 40^\circ$ y $AD \parallel OC$, entonces el $\angle ACO$ vale:

- A) 10°
- B) 15°
- C) 20°
- D) 30°
- E) 45°



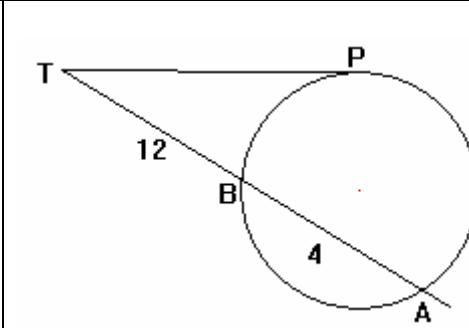
33. En la figura, O es el centro de la circunferencia. Si $AB \parallel RT$ y $\angle AOC = 94^\circ$; la medida del ángulo α es:

A) 47°
 B) 94°
 C) 123°
 D) 133°
 E) 152°



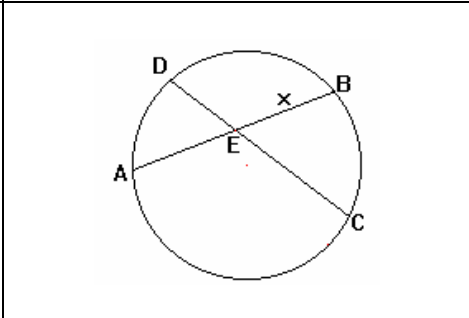
34. $\overline{PA} = 16$; $\overline{AB} = \frac{\overline{PA}}{4}$; entonces \overline{PT} es:

A) 8
 B) $4\sqrt{48}$
 C) $4\sqrt{3}$
 D) $8\sqrt{3}$
 E) $8\sqrt{2}$



35. $AB = \text{diámetro} = 12$; $EB = 2$; $CE = 5$; $ED = ?$

A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
 E) 5



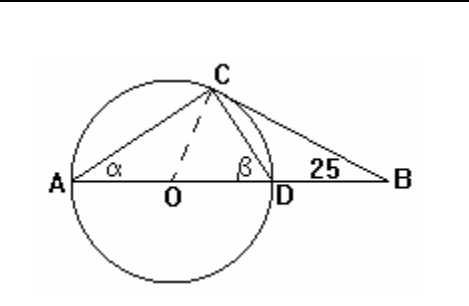
36. En la misma figura anterior: $AE = 8$; $EC = 6$; $DE = 12$; $AB = ?$

A) 17
 B) 9
 C) 15
 D) 10
 E) 18

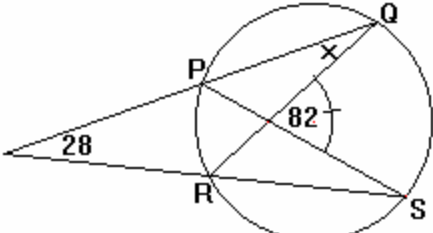
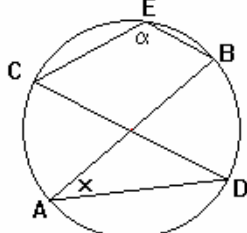
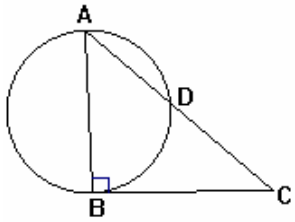
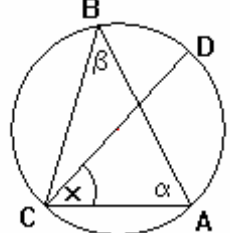
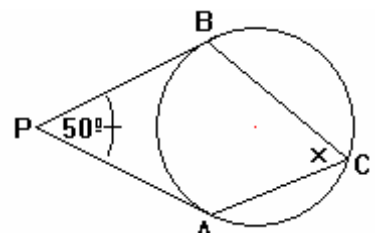
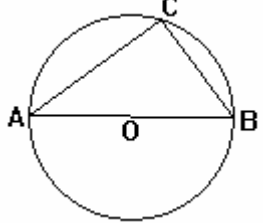
37. El triángulo ADC inscrito en la circunferencia de centro O , BC tangente a la circunferencia en C . Entonces siempre se cumple:

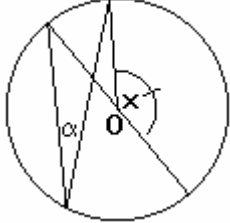
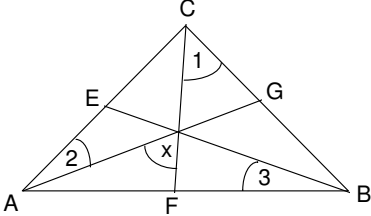
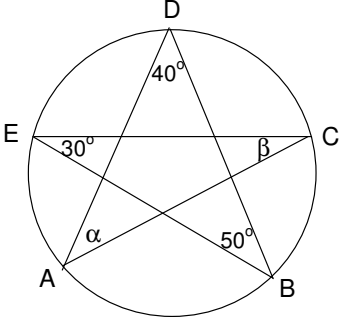
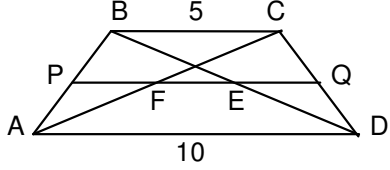
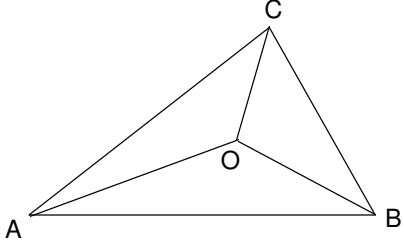
I) $\alpha + \beta = 90^\circ$
 II) $\beta - \alpha = 25^\circ$
 III) $\angle ACO = \angle BCD$

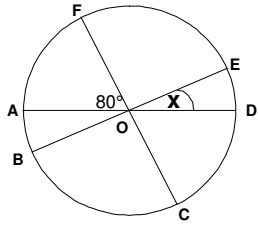
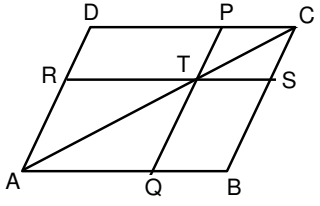
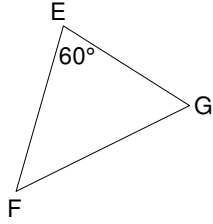
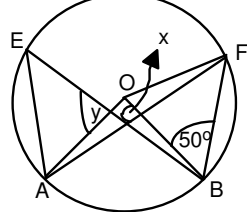
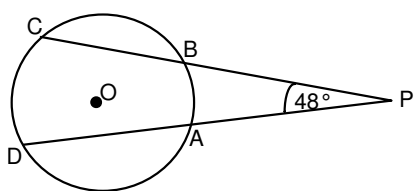
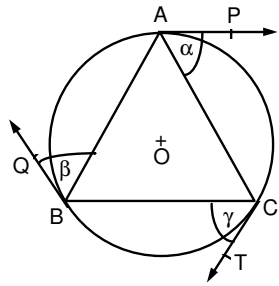
A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
 D) Solo II y III E) I, II y III



| | |
|---|--|
| <p>38. $\overline{AC} = 10; \overline{CP} = 8; \overline{PD} = 9$, entonces la medida del segmento $\overline{BD} = ?$</p> <p>A) 16 B) 10 C) 7 D) 8 E) 6</p> | |
| <p>39. En la figura, P es un punto exterior; $\overline{AP} = \overline{BP}$ y arco $AB = 2$ arco DE, entonces el ángulo x, mide:</p> <p>A) 24° B) 36° C) 48° D) 54° E) Otro valor</p> | |
| <p>40. MN es diámetro de la circunferencia. ¿Cuánto mide el radio?</p> <p>A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) e) 12</p> | |
| <p>41. ¿Cuál es la medida del diámetro MN, si $\overline{PM} = 40; \overline{PT} = 60$ y O es centro?</p> <p>a) 36 b) 40 c) 45 d) 50 e) 54</p> | |
| <p>42. $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{PC} = 12\text{cm}; \overline{PD} = 4\text{cm}$, entonces la medida del segmento $\overline{BD} = ?$</p> <p>a) 16 b) 10 c) 7 d) 8 e) Faltan datos</p> | |
| <p>43. En el $\triangle ABT$; AT tangente a la circunferencia en T; $\overline{AT} = r$ y O centro de la \odot de radio r. Entonces el valor del ángulo x es:</p> <p>a) α b) $2\alpha/5$ c) $\alpha/2$ d) $2\alpha/3$ e) $45^\circ - \alpha/2$</p> | |

| | |
|---|---|
| <p>44. Si los puntos P, Q, R y S pertenecen a la circunferencia, entonces la medida del ángulo x es:</p> <p>a) 55° b) 54° c) 33° d) 27° e) 20°</p> |  |
| <p>45. AB y CD son diámetros. Entonces el valor del ángulo x es:</p> <p>a) $\alpha/2$ b) $\alpha/3$ c) $\alpha - 90^\circ$ d) $\frac{\alpha + 90^\circ}{2}$ e) $180^\circ - \alpha$</p> |  |
| <p>46. AB es diámetro de la circunferencia de radio 3 cm. Si $\overline{BC} = 8\text{ cm}$, entonces $\overline{AD} = ?$</p> <p>a) 6 cm b) 4,8 cm c) 6,4 cm d) 3 cm e) 3,6 cm</p> |  |
| <p>47. El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia de centro O. si CD es un diámetro, entonces el ángulo x, mide:</p> <p>a) α b) β c) $(\alpha + \beta) / 2$ d) $90^\circ - \alpha$ e) $90^\circ - \beta$</p> |  |
| <p>48. AP y BP son tangentes a la circunferencia de centro O, ¿cuánto mide el ángulo x?</p> <p>a) 30° b) 65° c) 130° d) 135° e) N. A.</p> |  |
| <p>49. O centro de las circunferencia. $AC=6$, $BC=8$ ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?</p> <p>a) 20 b) 5 c) 10 d) 14 e) Ninguna de las anteriores</p> |  |

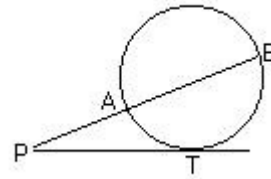
| | |
|--|---|
| <p>50. $\alpha = 40^\circ$, cuanto mide x?</p> <p>a) α b) 2α c) $180^\circ - 2\alpha$ d) $90^\circ - 2\alpha$ e) N.A.</p> |  |
| <p>51. Los ángulos 1, 2 y 3 son congruentes, los trazos CF, AG y BE son alturas y bisectrices. Entonces, $\angle x$ mide:</p> <p>a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) Falta información</p> |  |
| <p>52. Si α es el doble de β entonces sus medidas son respectivamente:</p> <p>A) 80° y 40° B) 60° y 30° C) 40° y 20° D) 20° y 10° E) Otros ángulos</p> |  |
| <p>53. ¿Cuál debe ser la longitud del trazo EF si P y Q son puntos medios? (ABCD trapecio)</p> <p>A) 7,5 B) 8 C) 2,5 D) 3,5 E) N.A.</p> |  |
| <p>54. Sea \overline{AO}, \overline{BO} y \overline{CO} bisectrices de los ángulos interiores del triángulo ABC; además $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$, y $\angle OCB = 30^\circ$, de las siguientes afirmaciones es FALSA:</p> <p>I. Triángulo ABC es equilátero. II. Los triángulos que tienen como vértice el punto O son isósceles. III. Todos los triángulos que se observan son acutángulos. IV. $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$</p> <p>a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III d) Sólo IV e) N.A.</p> |  |

| | |
|---|---|
| <p>55. En la figura O es el centro de la circunferencia, además $\text{arco}(AB) : \text{arco}(BC) = 2:3$, entonces $x = ?$</p> <p>A) 60° B) 40° C) 100° D) 80° E) Ninguna de las anteriores.</p> |  |
| <p>56. En la figura, si todas las líneas son paralelas, el máximo de paralelogramos es:</p> <p>A) 2 B) 6 C) 5 D) 8 E) 9</p> |  |
| <p>57. Si el trazo $EF = EG$ y el ángulo FEG vale 60°, el triángulo de la figura es:</p> <p>A) Isósceles B) Equilátero C) Escaleno D) Acutángulo E) B y D</p> |  |
| <p>58. En la figura $\angle AOB = 72^\circ$. Si $\text{Arco}(EA) = \text{Arco}(BF)$, entonces ¿cuánto vale $x + y$?</p> <p>A) 94° B) 86° C) 188° D) 172° E) 36°</p> |  |
| <p>59. En la circunferencia de centro O, al $\text{arco}(AB) = \frac{1}{5}$ de la circunferencia, ¿cuánto mide el $\text{arco}(CD)$?</p> <p>A) 72° B) 96° C) 120° D) 168° E) N. A.</p> |  |
| <p>60. En la figura, circunferencia de centro O y radio r. ABC triángulo equilátero, si \overline{PA}, \overline{QB}, \overline{TC} son tangentes a la circunferencia en A, B y C respectivamente, entonces $\alpha + \beta + \delta = ?$</p> <p>A) 360° B) 180° C) 90° D) 60° E) 45°</p> |  |

61. \overline{PT} es tangente a la circunferencia. ¿Cuánto mide el diámetro \overline{AB} de la circunferencia?

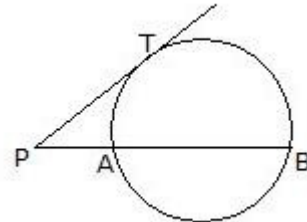
(1) $PB = 24$ cm (2) $PT = 12$ cm

- A) (1) por sí sola.
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional



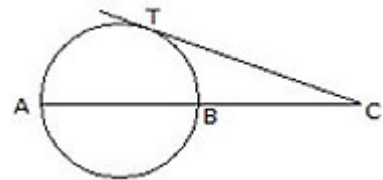
62. \overline{PT} es tangente a la circunferencia en T. Si $AB=3AP$ y $PT=4$ cm, El valor de AB es:

- A) 2 cm
- B) 4 cm
- C) 6 cm
- D) 8 cm
- E) $4\sqrt{3}$ cm



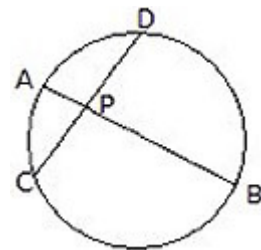
63. En la figura \overline{CT} mide $4\sqrt{2}$ cm y es tangente a la circunferencia de centro O. Si \overline{AB} es el diámetro de la circunferencia y $AB = BC$, ¿cuánto mide el radio?

- A) 2 cm
- B) 4 cm
- C) $\sqrt{2}$
- D) $2\sqrt{2}$
- E) Falta información.



64. En la figura: $PC = 2 + PA$ y $PA : PD : PB = 1 : 4 : 8$. ¿Cuánto mide \overline{AB} ?

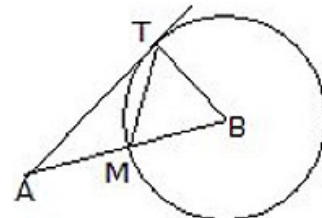
- A) 2
- B) 4
- C) 8
- D) 12
- E) 18



65. T es tangente a la circunferencia de radio r y centro en B. Si $AT = r\sqrt{3}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

- I. $AM = MB$.
- II. $AM = MT$.
- III. $\text{arco } TM = \frac{\pi r}{3}$

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo I y II
- D) Solo II y III
- E) I, II y III



SOLUCIONES

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|----|----|---|----|---|----|---|----|---|----|----|----|---|----|---|
| 1 | E | 6 | E | 11 | B | 16 | D | 21 | A | 26 | C | 31 | B | 36 | A | 41 | D | 46 | E | 51 | C | 56 | E |
| 2 | D | 7 | B | 12 | B | 17 | B | 22 | C | 27 | D | 32 | C | 37 | E | 42 | E | 47 | E? | 52 | C | 57 | E |
| 3 | C | 8 | C | 13 | D | 18 | A | 23 | D | 28 | D | 33 | D | 38 | C | 43 | E | 48 | B | 53 | C | 58 | C |
| 4 | C | 9 | D | 14 | C | 19 | D | 24 | D? | 29 | B | 34 | D | 39 | A | 44 | D | 49 | B | 54 | C | 59 | D |
| 5 | D | 10 | E | 15 | E | 20 | D | 25 | B | 30 | A | 35 | D | 40 | D | 45 | C | 50 | C | 55 | B | 60 | B |
| 61 | C | 62 | C | 63 | A | 64 | E | 65 | E | | | | | | | | | | | | | | |