Macros y Conjeturas

En Geometría el objetivo principal es bien claro y es: **la búsqueda de invariantes.** Buscar invariantes es tratar de clasificar los objetos geométricos con alguna o algunas características, es decir, si un objeto cumple una o varias propiedades la clase a la que pertenece ese objeto sera la clase compuesta por todos aquellos que satisfacen las mismas propiedades del objeto en mención. Para lograr tal propósito es claro que el método a seguir es el más obvio y es el de comenzar con algún objeto geométrico observar bien que propiedad o propiedades satisface este objeto, es decir que relaciones matemáticas guardan sus componentes, luego modificar este objeto y ver cuáles de esas relaciones se mantienen. Este proceso de observar un caso particular, modificar ese caso particular para luego lanzar una conjetura sobre la propiedad observada objetos termina cuando se puede demostrar de manera lógica la propiedad visualizada o hallar un contraejemplo.

Quizá las primeras demostraciones lógicas, llamadas simplemente demostraciones en matemáticas, se encuentran en el libro de los "*Elementos*" de Euclides. El libro de los "Elementos" consta de trece volúmenes y continúa siendo un libro ejemplar acerca del razonamiento matemático, es decir de procesos mentales lógicos.

Cuando decimos que en Geometría se razona de lo particular a lo general queremos decir que existe un proceso de conjeturación a partir de lo particular pero la generalización debe ser demostrada a partir de unos supuestos iniciales llamados *axiomas*, que son supuestos no demostrables que debemos admitir y otros cuantos resultados demostrados anteriormente llamados *lemas* o *teoremas*. Una vez encontrado un invariante geométrico, propiedad que satisfacen todos y cada uno de los objetos geométricos de alguna clase, este resultado se le llamará: proposición o teorema según su importancia y lema si este resultado es técnico.

En adelante hemos dividido en dos grandes partes el proceso de búsqueda de invariantes. El primer gran paso le llamamos *inducir* o *conjeturar*, y el segundo *deducir* o *demostrar*. La fuerza del software Cabri- géomètre está en dar la posibilidad de conjeturar. Queremos hacer énfasis en dos cosas: primero, que una conjetura no es una proposición o teorema, hasta no haberse demostrado matemáticamente y segundo, que nunca podemos decir que en alguna rama de las matemáticas y en particular en geometría todo ya esta hecho.

Queremos proponer a los docentes una manera diferente de llegar a los resultados conocidos en geometría. Es decir queremos que hoy día, principios del siglo XXI, se haga geometría como lo hicieron los antiguos griegos: *experimentando*, y esa es la posibilidad que la tecnología y en particular el software Cabri - géomètre nos ofrece. Más aún quisiéramos que cada niño tenga la posibilidad de descubrir sus propios resultados que quizá no están escritos en algún libro texto de geometría, o si ya lo están y son teoremas famosos estamos seguros que difícilmente lo olvidarán.

4.0.4 Primero Conjeturar

Tomemos el siguiente caso como ejemplo: Dibujamos un cuadrado y observamos que *la suma de los ángulos opuestos es igual a la suma de dos ángulos rectos*. Es claro que esta conjetura es obvia pues por construcción todos los cuatro ángulos son rectos. En un rectángulo la propiedad descrita antes aún se cumple pero ya no se cumple en un paralelogramo cualquiera y tampoco para los cuadriláteros en general. El cuadrado tiene otra característica y es que las diagonales son iguales y se interceptan en el punto medio, es decir que la distancia desde el corte de las diagonales hasta cualquiera de los vértices de un cuadrado es la misma. Esto hace pensar que podemos trazar una circunferencia con centro en el corte de las diagonales del cuadrado y que pase por sus cuatro vértices. Así hemos obtenido un cuadrado inscrito en una circunferencia. La conjetura obviamente se sigue cumpliendo y ahora lancemos la siguiente conjetura:

Conjetura 1 *La suma de los ángulos opuestos de todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia es igual a la suma de dos ángulos rectos.*

La conjetura anterior es sólo una conjetura, podemos hacer unos cuantos dibujos y observar que esta conjetura es verdadera para esos casos particulares pero aún no podemos afirmar que esta conjetura es verdadera en general. La conjetura deja de ser conjetura y pasa a ser teorema en el caso que se haya demostrado matemáticamente. Si no se hace aunque se satisfaga para miles de ejemplos particulares seguirá siendo simplemente una conjetura. Conjeturar es fundamental, aún cuando la conjetura resulte ser falsa.

El propio Euler en uno de sus borradores conjeturó que $n^2 - n + 41$ es un número primo si n es un número natural, lo cual para $n = 1, 2, 3$, hasta un n relativamente grande es cierto pero para $n = 41$ es falso pues no es un número primo ya que es el número 41×41. Bueno el propio Euler no tardó en darse cuenta que su conjetura no era cierta cuando el mismo encontró el contraejemplo antes descrito. El mismo dijo "la mera inducción [1] conduce al error". Albert Eistein dijo: "aunque haga muchos experimentos, mi hipótesis no queda confirmada, pero basta con un solo experimento para confirmar mi error".

Buscar similaridades, patrones o propiedades comunes y hacer *conjeturas* es razonar inductivamente. Si no podemos encontrar un contraejemplo a nuestra conjetura y quisieramos demostrarla tendremos que usar otro tipo de razonamiento llamado "razonamiento deductivo".

[1] No confundir aqui la palabra inducción usada por Euler y por nosotros como conjeturación con el método de demostración matemática llamado proceso de inducción, para distinguirlos, al segundo le llamaremos inducción completa

Un buen matemático es un *soñador*, es un *adivinador*, es un *conjeturador*. Lo importante en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es dejar que los niños sigan soñando y por tanto brindarles la oportunidad para que hagan conjeturas. Las conjeturas solo se pueden lanzar en matemáticas si se tiene la oportunidad de experimentar. Claro está que como dijimos antes no es suficiente que se quede en esta etapa de conjeturación, pero es muy importante en el proceso. Edward Kasner [4] dijo "Devinez avant de demontrer" ("Adivina antes de demostrar"). La imagen del matemático o mejor de quien hace matemáticas, haciendo el papel de conjeturador para luego demostrar sus propias conjeturas nos hace pensar que la matemática es una ciencia deductiva en la cual se llega a la verdad irrefutable mediante una cadena de pasos lógicos.
Polya [5] dice "las matemáticas en su forma final solo aparecen como puramente deductivas y solo contienen demostraciones; sin embargo, en su proceso de elaboración, se parecen a cualquier otro conocimiento humano", es decir, que aunque en los texto se muestre la matemática ya acabada y sin errores en el proceso de llegar a esa "pureza" se ha pasado por etapas en las cuales se han tenido que lanzar muchas hipótesis (conjeturas) fallidas. La geometría debe enseñarse y por ende aprenderse como en un laboratorio: **experimentando**. Felix Klein dijo: "las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, y no por los métodos rigurosos de demostración". Esa intuición de la que habla F. Klein sólo es posible desarrollarla si se tiene la oportunidad de experimentar.
Estamos convencidos cada vez más que la *intuición*, la conjetura y la demostración en matemáticas deben estar presentes siempre en el salón de clase. Esta es la base para construir en el niño un pensamiento científico. La intuición, la conjeturación y la demostración son inseparables en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La Geometría es quizá el mejor ejemplo que puede darse en matemáticas donde estas concepciones están íntimamente ligadas y es por supuesto, una de las materias escolares donde se puede ayudar a formar un pensamiento científico en el niño.

4.0.5 Segundo Demostrar

Quizá la importancia que las diferentes sociedades en todos los tiempos le han dado a las matemáticas no sea sino el reflejo del papel que desempeña el razonamiento deductivo en ellas. Demostrar una conjetura, como por ejemplo la conjetura planteada arriba: *que la suma de los ángulos interiores opuestos en todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia en el plano euclideo es igual a la suma de dos ángulos rectos*, es deducirla a partir de otras anteriormente demostradas o deducirla a partir de algunos supuestos. Estos supuestos son llamados en geometría *axiomas* o postulados. Los axiomas son verdades que no pueden ser demostradas y por tanto si queremos hacer geometría debemos aceptarlas. Por lo tanto *deducir* es demostrar matemáticamente, es decir siguiendo **pasos lógicos** llegar a un resultado que antes era una simple conjetura.
La primera demostración, según los historiadores en matemáticas, es la hecha por *Thales de Mileto*, unos 600 años antes de nuestra era. Thales demostró que todo diámetro biseca la circunferencia. Algo evidente, quizá que solo se necesite

la inducción y poca experimentación para conjeturar tal cosa. Pero la pregunta importante es por qué debemos demostrar dicha conjetura?, no es acaso evidente? La razón es por que cualquier ciencia, incluída las matemáticas no puede basarse en resultados evidentes u obvios. Lo obvio siempre es subjetivo, si no recuerde sus profesores de matemáticas o los autores de sus textos en matemáticas. Algún resultado se convierte en obvio cuando es un resultado casi inmediato de otro, es decir su demostración tendrá solo unas pocas líneas. Pero esto de pocas líneas será para quien haya seguido el proceso determinado de encontrar resultados ligados unos con otros, pero para quien solo ve el resultado por primera vez y no haya hecho el mismo seguimiento lógico de la otra persona tendrá que demostrar todos los resultados que le anteceden y dejará entonces de ser obvio.
La demostración no es más que el convencimiento de la verdad relativa de una conjetura. Decimos relativa refiriéndonos a que no toda verdad es demostrable en matemáticas. [2] La geometría por ejemplo se basa en ciertas verdades asumidas, llamadas axiomas o postulados. La demostración por lo tanto si no ayuda aclarar la afirmación hecha en la hipótesis, quizá deba ser modificada. Muchos teoremas, resultados demostrados, en matemáticas tienen más de una manera diferente de demostrarlo, y es muy común leer artículos recientes demostrando un resultado ya conocido y demostrado pero usando otras técnicas y otros pasos que simplifican la o las demostraciones anteriores. La demostración de un teorema reafirma el porqué existen las condiciones impuestas en las hipótesis, lo que se demuestra entonces en un teorema es su conjetura, llamada tesis en matemáticas, bajo unas ciertas condiciones impuestas llamadas hipótesis, es decir el teorema seguirá siendo válido para todas aquellas situaciones que se satisfagan como mínimo las hipótesis impuestas en el teorema. En otras palabras un teorema tiene dos partes la tesis que es la conjetura y la hipótesis que es la característica de la clase de los objetos para los cuales la conjetura es verdadera. Por ejemplo:

Teorema 2 (Pitágoras) *Dado un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa".*

Las hipótesis es solo una y es que el triángulo sea rectángulo, es decir una figura plana con uno de sus ángulos interiores igual a un ángulo recto. La clase de objetos que se estan tomando para aplicar el teorema es la clase de los triángulos rectángulos. La tesis, o sea la conjetura, es que la suma de los cuadrados de las medidas de sus catetos sea igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.
Aquí hay algunas hipótesis adicionales que no se mencionan dentro del teorema y que son implícitas, ellas son que el triángulo sea plano y que el plano en el cual este considerado el triángulo sea un plano euclideo. Una vez demostrado este teorema, el teorema sera válido para cualquier triángulo rectángulo (hipótesis única).
Decíamos entonces que las formas de demostrar un teorema no son únicas y que tampoco por que un teorema ya esté demostrado no se pueda intentar *hacer su propia demostración.* Es claro entonces que no se puede pretender enseñar a demostrar, lo que se puede pretender es estimular la intuición individual en cada niño. Sólo se tendrán nuevas demostraciones en la medida que se tengan nuevas formas de descubrir una conjetura, cada quien interpretará e internalizará a su modo ese resultado.

---

[2] Más adelante volveremos sobre esta frase la cual no es del todo cierta

Loomis E.S. en su libro "The Pithagorean Proposition" (segunda edicion) ha clasificado 370 demostraciónes del famoso Teorema de Pitágoras. Mucho se ha discutido acerca de la demostración dada por el propio Pitágoras a su teorema, pero según la mayoria de los historiadores en matemáticas coinciden que es algo parecida a la que se encuentra en los textos escolares. La demostración obviamente no es algebráica, sin embargo la demostración dada por Pitágoras y su escuela es muy geométrica y básicamente sigue los dos siguientes dibujos:

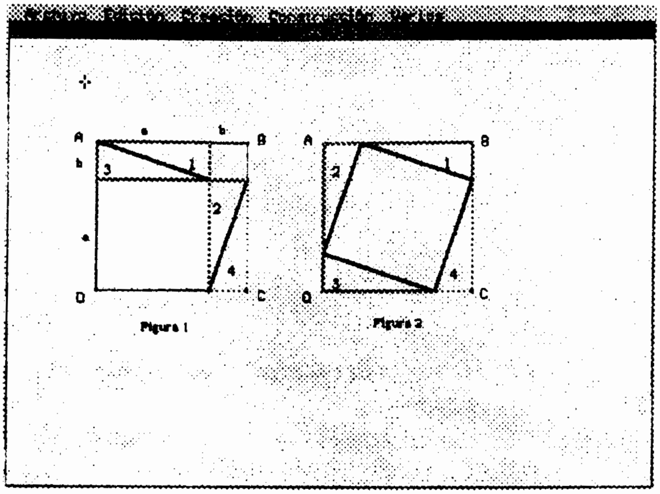

Figura 1: Teorema de Pitágoras

Observe, visulamente todo funciona. Comience con la figura 1, y haga movimientos rígidos mentales de traslación paralela a los lados del cuadrado de lado $a + b$, de la siguiente manera:

- Deslice el triángulo 1 hacia la derecha manteniendo el cateto superior siempre en contacto con el lado superior del cuadrado,

- el triángulo 2 hacia la izquierda hasta que el cateto de la izqquierda coincida con el lado izquierdo del cuadrado, AD,

- ahora intercambie los triángulos 2 y 3 de tal forma que el cateto que reposa sobre el lado izquierdo del cuadrado mantenga esta propiedad.

La figura obtenida es la figura 2 mostrada al lado derecho.

Algebráicamente, lo que están mostrando las dos figuras anteriores es que las áreas contenidas dentro del cuadrado $ABCD$ que no son la de los triángulos 1, 2, 3, y 4 deben ser iguales. Cada triángulo de la figura mostrada es un triángulo rectángulo con catetos que miden a y b y cuya hipotenusa mide c. En la figura 1 el área del cuadrado menos las cuatro áreas de los cuatro triángulos es igual a $a2 + b^2$, y en la figura 2 es igual a c^2. Es decir $c^2 = a^2 + b^2$ que es como lo conocemos.

Una demostración conocida que data del siglo octavo de nuestra era debida al matemático hindú Bhaskara Acharia del teorema de Pitágoras es visual y muestra la siguiente secuencia de tres dibujos que son:

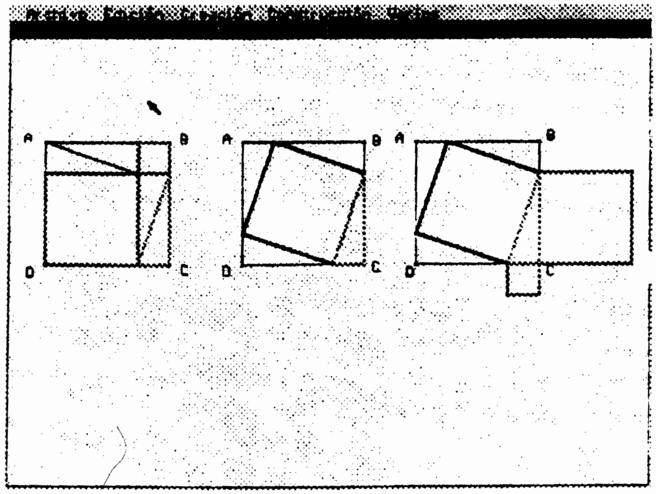

Figura 3

Para obtener la figura 3 puede hacer *desplazamientos* de los cuadrados de la figura 1 paralelos a los lados del cuadrado.

Muchos matemáticos dicen que una demostración visual no es una demostración y tienen toda la razón, nosotros también decimos lo mismo. Muchas demostraciones en geometría plana euclidea se alimentan de las figuras construídas o del realce que se haga en parte de ellas o de alguna construcción auxiliar que se haga y poder visualmente mostrar que la propiedad geométrica es verdadera. Por ejemplo:

Teorema 3 *El área de un triángulo es igual a la del rectángulo que tiene la misma base y su altura es la mitad de la altura del triángulo.*

Demostración: Observa con cuidado.

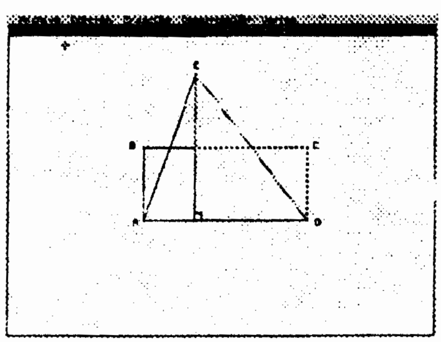

Figura 2

Esta demostración se encuentra en muchos textos y lo que falta es escribir analíticamente o mejor algebráicamente lo observado. Refinar un poco colocando letras y basarse en resultados demostrados anteriormente para completar una demostración rigurosa. (Esta demostración es muy conocida y se le conoce con el nombre de demostración hindú).

Por otro lado también es cierto, y es por esto que se debe ser cuidadoso, que no todo lo que aparentemente es cierto para nuestros sentidos, en particular para nuestros ojos sea una verdad matemática.
Como hablamos al comienzo, basta dar un contraejemplo, para demostrar que las demostraciones que aparentemente visuales son ciertas, matemáticamente quizá no lo sean.
Resumiendo las demostraciones necesitan de una secuencia de pasos lógicos. La geometría no es un conjunto de teoremas o verdades sobre las propiedaes de las figuras puestos al azar o en un orden caprichoso, es "un sistema axiomático" o sistema deductivo en el que cada teorema es deducido de otro anterior, y así sucesivamente hasta llegar al los postulados o axiomas iniciales, verdades que hay que aceptar si se quiere hacer geometría.

4.0.6 Tercero Explorar

Una última etapa que consideramos en este proceso de enseñanza - aprendizaje de la geometría es la de explorar. El significado que le hemos dado a esta palabra es la siguiente: ***Explorar es ahondar más aún en un resultado ya demostrado.*** Más adelante daremos un ejemplo. Explorar entonces parecería que es lo que hace que la geometría se encadene y no tenga un límite de investigación. La geometría está compuesta no sólo de teoremas o resultados muy conocidos dignos de ser publicados en los textos escolares, en revistas o libros especializados. La geometría está llena de resultados que parecen ser pequeños o inocuos para muchos lectores pero que son muy importantes para quienes han seguido el camino de la investigación en geometría.
A continuación mostraremos un ejemplo completo de cómo es posible enfrentar una temática particular hoy día, teniendo una herramienta nueva: la tecnología y en particular el software Cabri - géomètre .

4.1 Ejemplo de una plantilla de Laboratorio

Pensemos que en un curso particular estamos interesados en tratar el tema de las medianas de un triángulo y el descubrimiento de su propiedad fundamental. Para esto, supongamos que todo el análisis de contenido ya se haya hecho y que nos encontremos en la etapa de realizar actividades conducentes a descubrir dicha propiedad.

4.1.1 Medianas de un Triángulo

Objetivo: Que el estudiante conozca qué es el baricentro de un triángulo, explore, conjeture y luego vea una demostración de una de sus características y trate de generalizar ese resultado.

4.1.2 Actividades anteriores

Entre las actividades anteriores a ésta están: La construcción del punto medio de un segmento y la demostración que las medianas de un triángulo se interceptan en un mismo punto.

4.1.3 Definiciones y Teoremas

Definición 1 *El segmento que une cualquier vértice con el punto medio del lado opuesto se llama* **mediana**. *Un triángulo cualquiera tiene entonces tres medianas.*

Teorema 4 *Las tres medianas de cualquier triángulo se cortan en un mismo punto interior al triángulo.*

Definición 2 *Al corte de las medianas de un triángulo se le llama* **baricentro**.

Definición 3 *Al segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo le llama* **segmento medio** *del triángulo. En todo triángulo hay por lo tanto tres segmentos medios.*

Teorema 5 *Un segmento medio, que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al segmento restante.*

Teorema 6 *La medida de un segmento medio, que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es igual a la mitad del segmento restante.*

4.1.4 Construcción e Investigación

Actividad 1: Medianas, Baricentro

- Construya un triángulo $\triangle ABC$.
- Construya los puntos medios D, E, y F de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
- Construya las medianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.
- Trace el baricentro O, intersección de las medianas.
- Mueva los puntos A, B y C para verificar su construcción hasta el momento.
- Oculte las medianas trazadas.
- Trace los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OD}$.
- Mida $\overline{AO}$ y $\overline{OD}$.
- Mueva uno de los puntos A, B o C.
- Investigue la razón AO/OD. [Use el comando calcular y seleccione la medida AO, luego pulse la tecla de división y por último seleccione la otra cantidad OD. Pulse enter y aparecerá la razón entre estas dos cantidades.
- Mueva de nuevo uno de los puntos A, B o C.
- Enuncie con sus palabras la propiedad geométrica que usted observó.

Lo que se espera es que la conjetura diga más o menos lo siguiente.

Conjetura 7 ***Las medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto situado a los $\frac{2}{3}$ de cada una a partir del vértice perteneciente a la mediana.***

Como ya se ha trabajado con anterioridad, que las medianas se cortan en un mismo punto, es necesario demostrar que este punto está a $\frac{2}{3}$ de cualquiera de los vértices.

4.1.5 Demostración

En una hoja de papel o en Cabri - géomètre trace un triángulo y sus tres medianas. Coloque los nombres de la actividad anterior.
Las medianas $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ se cortan en el punto O, puesto que no son paralelas. Tómense los puntos medios M y N de $\overline{BO}$ y $\overline{CO}$ y trácense los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{FE}$. Estos segmentos son paralelos a $\overline{BC}$ e iguales a su mitad, porque $\overline{MN}$ une los puntos medios de los lados $\overline{BO}$ y $\overline{CO}$ del $\triangle BCO$ y $\overline{FE}$ une los puntos medios de los lados $\overline{BA}$ y $\overline{CA}$ del $\triangle ABC$ luego son paralelas e iguales entre si por teorema anterior. Por lo tanto los triángulos $\triangle FOE$ y $\triangle MON$ son congruentes (iguales) por ser los lados $\overline{MN}$ y $\overline{FE}$ iguales y adyacentes a ángulos alternos internos (Los ángulos alternos internos son iguales al igual que los ángulos opuestos por el vértice, teoremas ya demostrados) respectivamente iguales. Luego

$$MO = MB \quad \text{y} NO = NC,$$

por construcción;

$$MO = OE \quad \text{y} NO = OF,$$

por ser lados homólogos de triángulos congruentes. Por lo tanto

$$MO = OE = BM = \frac{1}{3}BE,$$

y además

$$NO = OF = CN = \frac{1}{3}CF.$$

Con lo cual podemos concluir que:

$$BO = \frac{2}{3}BE \quad \text{y} CO = \frac{2}{3}CF.$$

De manera similar se puede demostrar para las otras medianas. Al punto de intersección de las medianas se le conoce como *baricentro o centro de gravedad* del triángulo.

4.1.6 Exploración

Actividad 1

- Construya un triángulo $\triangle ABC$.

- Construya su baricentro O.
- Construya una macro para hallar el baricentro.
- Construya el triángulo $\triangle ABC$, formado por los segmentos medios del triángulo.
- Construya otra macro para construir el triángulo de los segmentos medios.
- Explore si los baricentros de los dos triángulos coinciden o tienden a un punto determinado. Cuál es ese punto? Conjeture y demuestre.
- Explore si la actividad realizada se podría hacer con las bisectrices en lugar de las medianas, que sucede en ese caso?

4.2 Ejercicios de Conjetura

Actividad 1

[3]

- Construya dos circunferencias con centros en P y Q respectivamente que se intercepten en los puntos H y K.
- Trace el diámetro $\overline{HT}$ de la circunferencia con centro en P.
- Trace el diámetro $\overline{HW}$ de la circunferencia con centro en Q.
- Explore y conjeture a partir de esta construcción básica.
- Usted puede agregar otros elementos que le ayudarán a "visualizar" su conjetura. También puede agregarlos para su previa demostración.
- Finalmente haga la demostración de su conjetura.

4.3 Macro - construcciones

4.3.1 Actividad 2: Baricentro

- Construya un triángulo $\triangle ABC$. El triángulo lo debe construir con la opción triángulo (F3:3). Este será el *objeto inicial*.
- Construya los puntos medios M y N de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
- Construya las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$.
- Trace el baricentro G que es la intersección de las medianas. Este será el *objeto final*.
- Seleccione Macro construccion (F4:6). Pulse Enter.

[3] Michel Keyton, "A search for an All-Encompassing Problem in Elementary Geometry", Geometry for the World, Revista de Cabri Geometry II, 1996

- Seleccione `Obj iniciales` (Opción 2). En este momento aparecerá únicamente su construcción anterior. Acerque el cursor al triángulo y pulse Enter.
- Seleccione Macro construccion (F4:6). Pulse Enter.
- Seleccione `Obj finales` (Opción 3). De nuevo aparecerá únicamente su construcción realizada. Acerque el cursor al baricentro y pulse Enter.
- Seleccione Macro construccion (F4:6). Pulse Enter.
- Seleccione `Definir macro` (Opción 4). El nombre (Name) que introduzca ayudará a identificar la macro más adelante. El nombre del objeto (Object name) que introduzca aparecerá en los mensajes del cursor, cuando corresponda. Ambos nombres pueden tener hasta 25 caracteres. Escriba en Nombre (Name) `baricentro`, y en el nombre del objeto (Object name): `baricentro del triangulo`. La primera escritura tiene 10 caracteres mientras que la segunda 24, contando los espacios, es decir estamos dentro de los límites permitidos (25 es el máximo).
- Después de llenar el recuadro de diálogo Nombre de la Macro (Name Macro) aparece el cuadro Save Macro (Guardar la Macro). Debe proporcionar un nombre válido, en el espacio `variable`, para que sea guardado como un archivo aparte, se guardará con la construcción. Por esto no podrá abrirlo con el menú (F8:1)
- Borre todo. (F8:8)
- Dibuje un triángulo.
- Ejecute la macro `baricentro` que acabó de crear. Para esto pulse (F4:6), luego Enter y luego escoja la opción 1 `Ejecutar macro`. Aparecerán todas las macros. Si es la primera solo tendrá una macro. Seleccione `baricentro`.
- Coloque el cursor encima de cualquier punto de algún lado del triángulo y pulse Enter.
- Mueva los vértices y verifique que su macro funciona correctamente.

4.3.2 Actividad 2: Segmentos medios

- Borre todo.
- Trace un triángulo.
- Trace los puntos medios de los lados del triángulo.
- Trace un triángulo que tenga como vértices los puntos medios del triángulo original. Use la opción triangulo (F3:3).
- Verifique su construcción
- Construya una macro que tenga como objeto inicial el triángulo inicial y como objeto final el triangulo construído con los puntos medios.

- Coloque como nombre de la macro `segmedios`.
- Borre todo.
- Dibuje un triángulo y verifique su macro haciendo un dibujo *fractal* con la macro recién creada.
- Borre todo.
- Dibuje un triángulo.
- Use las dos macros creadas en esta actividad.

4.3.3 Actividad 3: Mediatriz

- Construya un segmento $\overline{AB}$.
- Trace una circunferencia con centro en A y radio AB.
- Trace una circunferencia con centro en B y radio BA.
- Halle la intersección de los dos círculos.
- Trace la recta que une las intersecciones halladas.
- Cree una Macro construcción para hallar el corte de las circunferencias.
- Seleccione el segmento $\overline{AB}$ como objeto inicial.
- Seleccione ahora la recta que une los interceptos de los dos círculos como objeto final. Coloque un nombre `Media1`. No la guarde como archivo. Cabri le permite usar esta macro durante el tiempo en el cual usted no apague su calculadora.
- Verifique su macro con un nuevo segmento.
- Use el comando Mediatriz (F4:4) para hallar la mediatriz según Cabri.
- Verifique que el comando de Cabri - géomètre y su última macro coinciden.

4.3.4 Actividad 4: Circuncentro

- Borre lo anterior.
- Construya un triángulo $\triangle ABC$.
- Con la nueva macro (`Media1`) halle el corte de las mediatrices (Circuncentro).
- Construya el círculo circunscrito, es decir el círculo con centro en el circuncentro y que pasa por los vértices del triángulo.
- Construya una macro con objetos iniciales el triángulo y finales el círculo. Llame la macro `Circunscrito`. "Circ-circuns"
- Borre lo anterior y verifique su macro en varios triángulos.