3. COMANDOS BÁSICOS PARA EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

En esta sección vamos a mostrar una breve relación de las RUTINAS BASICAS del cálculo contenidas en el programa DERIVE-5.

3.1.CÁLCULO DE DERIVADAS Y DERIVADAS PARCIALES.

Si tenemos seleccionada en la ventana de álgebra una expresión algebraica, por ejemplo

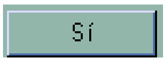
LN(COS(x))

y deseamos calcular su derivada podemos utilizar dos alternativas:

- usar la secuencia de menú *Cálculo-Derivadas*
- o bien el botón de herramientas 

a continuación aparecerá la ventana de diálogo:

en esta ventana de diálogo tenemos varios elementos, por un lado la VARIABLE DE DERIVACIÓN (que deberemos elegir si se trata de una expresión de varias variables), y el ORDEN de la derivada que deseamos calcular. Una vez seleccionados estos elementos podemos optar por hacer clic sobre el botón



en cuyo caso aparecerá en la ventana de álgebra una expresión que indica la operación de derivación a realizar:

$$\frac{d}{dx} \text{LN(COS(x))}$$

en este caso, si se desea obtener posteriormente la derivada habría que simplificar la expresión obtenida.

Si por el contrario hacemos uso del botón

obtendremos el valor de la derivada directamente. Obsérvese la diferencia en el uso de ambos botones.

Por ejemplo si deseamos calcular la derivada de orden tres de y=ln(cos x)), en primer lugar introducimos la expresión “ln(cos x)” en la ventana de álgebra y a continuación aplicamos la secuencia de menú *Cálculo-Derivar,* seleccionamos la variable respecto de la cual queremos derivar (en este caso x) elegimos también el orden 3 y hacemos clic sobre el botón SI obteniendo

$$\frac{d}{dx} \text{LN}(\text{COS}(x))$$

Simplificando esta expresión con *Simplificar-Normal* obtenemos

$$-\text{TAN}(x)$$

Si lo que deseamos es calcular derivadas parciales, tendremos que aplicar *Calculo-Derivar* respecto de la variable que deseemos derivar así como su orden.

Por ejemplo si deseamos calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(4xy^2 - 3x \operatorname{sen} y\right)$$

Primero introducimos la expresión “4xy^2-3 x sin(y)” con , luego aplicamos  respecto de la variable y con orden 1 y se obtiene la expresión

$$\frac{d}{dy}\left(4 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot x \cdot \text{SIN}(y)\right)$$

A continuación aplicamos sobre esta última expresión nuevamente  respecto de la variable x con orden 1 y resulta

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\left(4 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot x \cdot \text{SIN}(y)\right)$$

Que al simplificar con *Simplificar-Normal* nos da las derivada parcial deseada:

$$8 \cdot y - 3 \cdot \text{COS}(y)$$

EJERCICIO 21.

Calcular $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\cos(\ln(x \ \ + 3)\right)$

3.2. CÁLCULO DE INTEGRALES INDEFINIDAS.

Dada una expresión algebraica introducida previamente en la ventana de álgebra, por ejemplo:

$$\text{CSC}(x)$$

si deseamos calcular una primitiva de dicha expresión algebraica podemos utilizar una de las dos alternativas siguientes:

- aplicar la secuencia de menú *Cálculo-Integrales*
- o bien aplicar el botón de herramientas 

apareciendo en ambos casos la siguiente ventana de diálogo:

En esta ventana de diálogo debemos elegir la variable de integración, el tipo de integral (indefinida en este caso) y la constante de integración (si dejamos el 0 no introduce ninguna constante; para que DERIVE sume una constante de integración debemos indicarle el nombre de dicha constante, que puede ser por ejemplo c). Una vez introducidos los datos correspondientes a los tres campos anteriores tenemos dos botones para aplicar la integración deseada,

- el botón Sí que dejará la integral indefinida indicada como una nueva expresión en la ventana de álgebra

  $\int$ CSC(x) dx

  obsérvese que si deseamos obtener a continuación el resultado de esta integral deberemos simplificarla.
- el botón Simplificar nos da el resultado de la integral indefinida.

Por ejemplo, si deseamos calcular $\int \tan(x)dx$, primero introducimos la expresión "csc(x)" (nombre con el cual se representa con DERIVE la función cosecante), aplicamos $\int$ respecto de la variable x, marcamos el campo "Indefinida" y en el campo "Constante" introducimos la letra c ; si deseamos dejar indicada la operaciones hacemos clic en Sí, obtenemos

INT(TAN(x), x, c)

Simplificando ahora esta expresión con *Simplificar-Normal* resulta

c - LN(COS(x))

que es una de las primitivas.

Si después de haber aplicado $\int$ hacemos clic sobre Simplificar obtenemos directamente el resultado de la integral, es decir

c - LN(COS(x))

Obsérvese que DERIVE únicamente calcula una de las primitivas, la constante general de integración deberíamos añadírsela para dar una respuesta correcta al problema.

EJERCICIO 22. Calcular las siguientes integrales indefinidas

a) $\int \frac{x^2+3x+2}{3x-5}dx$

Solución:

$$\frac{88\cdot LN(3\cdot x-5)}{27}+\frac{x^2}{6}+\frac{14\cdot x}{9}+c$$

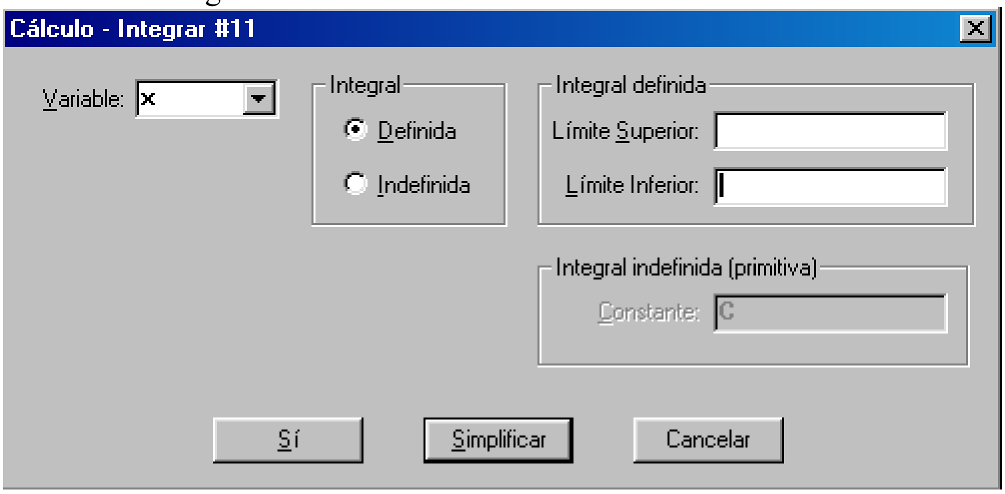
b) $\int x^6 e^x dx$

Solución:

$$\hat{e}^{x}\cdot(x^6-6\cdot x^5+30\cdot x^4-120\cdot x^3+360\cdot x^2-720\cdot x+720)+c$$

3.3. CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS.

Para calcular integrales definidas primero editamos el integrando y luego activamos la ventana de diálogo de la integración bien a través de la secuencia de menú *Cálculo-Integrales* o bien con el botón de herramientas ∫. Una vez activada dicha ventana de diálogo



seleccionamos en el campo Integral la opción DEFINIDA con un simple clic, a continuación aparecerá abierto el campo Integral Definida en el cual podemos incluir los límites superior e inferior. Luego hacemos clic sobre el botón SI en el caso de que deseemos dejar indicada la operación para posteriormente simplificarla. Cuando deseemos obtener el resultado haremos clic sobre el botón SIMPLIFICAR.

Por ejemplo, si deseamos calcular $\int_0^3 (x^3-3x^2+4x-2)dx$ primero introducimos la expresión “x^3-3x^2+4x-2”, aplicamos el comando *Cálculo-Integrales*, respecto de la variable “x”, seleccionamos el campo de Integral Definida, introducimos los valores 0 y 3 en los campos correspondientes a límite inferior y superior y finalmente hacemos clic sobre el botón SI y obtenemos la expresión

$$\int_0^3 (x^3-3\cdot x^2+4\cdot x-2)\,dx$$

si aplicamos ahora *Simplificar-Normal* obtenemos:

$$\frac{21}{4}$$

Existen integrales "no elementales" como por ejemplo $\int_1^2 \frac{sen(x)}{x}dx$ que al intentarlas resolver con derive nos dan la misma expresión:

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}\,dx$$

Esto se debe a que la integral indefinida de esta función es no elemental, es decir no es expresable a partir de funciones elementales. En estos casos es aconsejable realizar una aproximación usando *Simplificar-Aproximar* en cuyo caso resulta

$$0.659329$$

EJERCICIO 23. Calcular $\int_0^{\pi} e^x sen(x)dx$. (Observación: el número π se introduce tecleando "pi").

Solución:

$$\frac{\hat{e}^{\pi}}{2} + \frac{1}{2}$$

3.4. CÁLCULO DE INTEGRALES IMPROPIAS.

DERIVE permite calcular integrales impropias tratándolas "como si fuesen integrales definidas". Para ello basta con activar (del mismo modo que con en las integrales definidas) la ventana de diálogo por medio de la secuencia de menú *Calculo-Integrales* o bien mediante el botón de herramientas ∫. Así por ejemplo, si deseamos calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

como se trata de integrar una función no acotada en un recinto acotado, cuyo único punto de no acotación es *x=0*. Para resolverla bastará introducir la función

$$\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}$$

plantear la integral como si fuese una integral definida en DERIVE

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(x+1)}\,dx$$

y al simplificarla resulta:

$$\frac{\pi}{2}$$

De igual forma si tenemos que calcular una integral de una función acotada en un recinto no acotado como

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}dx$$

Esto se consigue editando

$$\frac{1}{x^2 + 4}$$

plantearla como si fuese una integral definida, teniendo en cuenta que el símbolo de infinito en DERIVE se escribe "inf" (o bien se selecciona de la barra de caracteres adjunta a la ventana de diálogo de la integración el símbolo ∞)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4}\, dx$$

y tras simplificar resulta

$$\frac{\pi}{4}$$

En los dos casos anteriores hemos obtenido la convergencia de ambas integrales. Pero DERIVE también nos da información acerca de la NO CONVERGENCIA. Por ejemplo si intentamos calcular

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4 - 1}$$

utilizando el procedimiento anterior obtendremos las siguientes expresiones en DERIVE

$$\frac{1}{x^4 - 1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 - 1}\, dx$$

$$-\infty$$

Obsérvese que en la última expresión aparece -∞ , por tanto la integral no converge.

Pero deberemos tener cuidado a la hora de estudiar integrales impropias en las que, la función sea no acotada en un intervalo no acotado, así como en aquellas integrales de funciones no acotadas que contienen, los puntos de no acotación en el interior del intervalo de integración. En estos casos DERIVE no calcula la integral impropia sino que calcula lo que se suele denominar el VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY. Podemos comprobarlo con el cálculo de

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Si efectuamos el cálculo de esta integral en DERIVE "como si fuera una integral definida", en este caso DERIVE nos indica que la integral es convergente, sin embargo es sabido que esta integral impropia no converge. El problema reside en que el punto de no acotación *x=0* está en el interior y por tanto DERIVE calcula otra cosa distinta a la integral, obteniendo como valor de convergencia

$$\frac{1}{x^3}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$\frac{3}{8}$$

Sin embargo si calculamos por separado en DERIVE las integrales

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx \quad y \quad \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx$$

se obtienen las expresiones

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$-\infty$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$\infty$$

por lo que es divergente.

EJERCICIO 24.

Determinar la convergencia o no convergencia de las siguientes integrales impropias

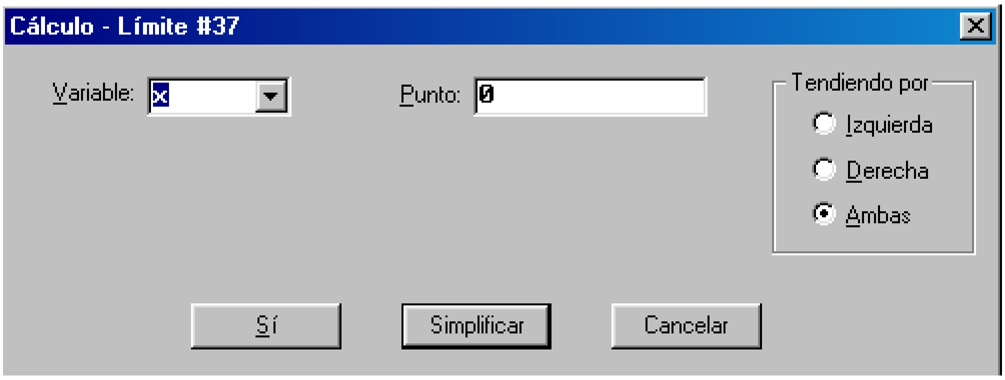
(a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-2}{x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x-2}{x}\, dx$

3.5. CÁLCULO DE LÍMITES.

El cálculo de límites se puede efectuar aplicando sobre cierta expresión algebraica dos opciones:

- la secuencia de menú *Cálculo-Límites*
- o bien la barra de herramientas lim

en este momento aparecerá desplegada la ventana de diálogo correspondientes al cálculo de límites:



En esta ventana podemos observar varios campos:

- El campo VARIABLE en el que debemos indicar la variable del límite
- El campo PUNTO en el que indicaremos el punto en el que deseamos calcular el límite
- Y finalmente el campo TENDIENDO POR; en el que indicaremos si se trata de un límite o bien un límite por la izquierda o por la derecha.
-

Una vez introducidos estos datos podemos hacer clic en SI para que aparezca en la ventana de álgebra la expresión que estamos calculando y que después podremos simplificar o bien hacer clic en SIMPLIFICAR si deseamos obtener directamente el valor.

Por ejemplo, para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$$

En primer lugar introducimos la expresión “sin(x)/x”, a continuación aplicamos *Calculo-Límite* sobre esta expresión, y rellenamos la ventana de diálogo indicando

- en el campo VARIABLE: x
- en el campo PUNTO: 0
- y en el campo TENDIENDO POR: ambas

y obtenemos después de simplificar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}$$

$$1$$

Se pueden calcular límites en el infinito si introducimos en el campo PUNTO: +∞ ó -∞. Por ejemplo para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x}{2x+1}$$

tras introducir la expresión “(x^3-3x)/(2x+1)” en DERIVE, obtendremos tras sucesivas aplicaciones de los comandos ya explicados las expresiones

$$\frac{x^3-3\cdot x}{2\cdot x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3\cdot x}{2\cdot x+1}$$

$$\infty$$

EJERCICIO 25.

Calcular los siguientes límites funcionales:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x \quad - 2x}{x - 2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x \quad - 2x}{x - 2}$

Según los resultados obtenidos ¿existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x \quad - 2x}{x - 2}$?

3.6. CÁLCULO DE SUMATORIOS.

La expresión

$$\sum_{i=a}^{b} p(i)$$

siendo *a,b* números enteros y *b>a*, denota un sumatorio de la expresión p(i) variando desde *i=1* hasta *i=b*, es dedir

$$p(a)+p(a+1)+p(a+2)+\ldots+p(b)$$

DERIVE permite obtener el resultado de este tipo de operaciones desplegando una ventana de diálogo especial para este tipo de operaciones. Una vez introducida la expresión base del sumatorio podemos aplicar:

- o bien la secuencia de menú *Calculo-Suma y Series*
- o bien el botón de herramientas Σ

y aparecerá la ventana de diálogo correspondiente a esta operación. En esta ventana de diálogo aparecen varios campos como se observa en la siguiente figura:

Los campos de esta ventana de diálogo son:

- Campo VARIABLE; en el que se indica la variable del sumatorio
- Campo SUMA, en el que se debe señalar si se trata de una suma definida o una suma indefinida.
- Campos LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR; indicando los límites superiores e inferiores de la variable.

Por ejemplo si deseamos calcular cuanto vale la suma de los cuadrados de los 10 primeros números naturales, es decir

$$\sum_{i=1}^{10} i^2$$

En primer lugar editamos la expresión "i^2", aplicamos sobre esta expresión el comando *Calculo-Sumas*, elegimos como variable "i", elegimos suma "Definida" y seleccionamos como límites inferior "1" y como límite superior "10" *(enter)* (para pasar de un campo a otro recuérdese que se utiliza la tabla de tabulación) y obtenemos la expresión

$$i^2$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2$$

que al simplificar resulta

$$385$$

También podríamos haber obtenido la fórmula general de la suma de los cuadrados de los n-primeros números naturales, efectuando

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

EJERCICIO 26.

Calcular la suma de los cubos de los n-primeros números naturales.
¿Cuánto valdrá la suma de los cubos de los 100-primeros números naturales?

Solución:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{100} i^3$$

$$25502500$$

3.7. CÁLCULO DE PRODUCTORIOS.

Se denota por

$$\prod_{i=a}^{b} p(i)$$

si *a,b* son números enteros y *b*>*a*, al resultado de efectuar el producto

$$p(a)\cdot p(a+1)\cdot p(a+2)\cdot \ldots \cdot p(b)$$

Para efectuar este cálculo con DERIVE debemos desplegar la ventana de diálogo correspondiente al cálculo de productos. Esta ventana se obtiene por dos métodos:

- aplicando la secuencia de comandos *Calculo-Productos*,
- o bien aplicando el botón de herramientas Π

Una vez desplegada la ventana de diálogo

debemos rellenar los campos que aparecen:

- Campo VARIABLE, en el que debemos señalar cual es la variable de la expresión de productos (por defecto DERIVE suele considerar una de las variables de la expresión base del productorio)
- Campo PRODUCTO; donde debemos señalar si se trata de un producto definido o indefinido
- En el caso de ser un producto definido, aparecen abiertos los campos LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR; en el que introduciremos los límites superior e inferior del productorio.

Por ejemplo si deseamos calcular

$$\prod_{i=1}^{20}(i^2-2i+1)$$

En primer lugar editamos la expresión “i^2-2i+1”, aplicamos sobre la misma el comando *Calculo-Productos*, elegimos la variable “i” *(enter)*, señalamos que se trata de un producto definido e indicamos en los campos límite superior e inferior los valores 1 y 20 respectivamente *(enter)*. Al simplificar se obtendrá el valor del productorio anterior:

$$i^2 - 2\cdot i + 1$$

$$\prod_{i=1}^{20}(i^2 - 2\cdot i + 1)$$

¿por qué se obtiene 0? Obsérvese que el primer factor para i=1, sale 0, por tanto el producto total ha de ser nulo.

EJERCICIO 27.

Calcular el producto de los cuadrados de los n-primeros enteros positivos. ¿Cuánto vale el producto de los cuadrados de los 20 primeros enteros positivos?

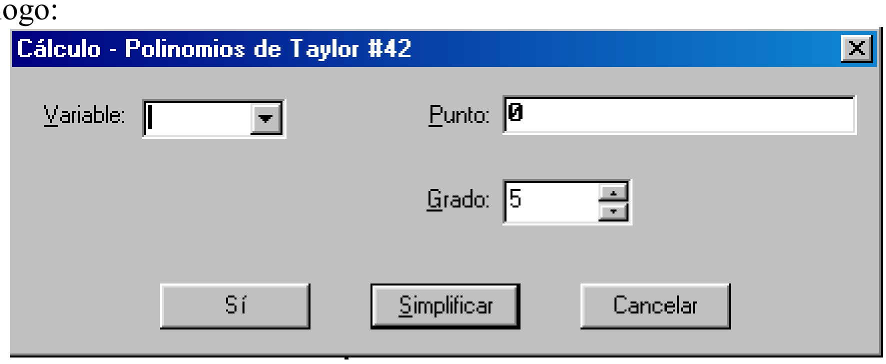
Solución:

$$\prod_{i=1}^{n} i^2 \qquad \prod_{i=1}^{20} i^2$$

$$n!^2 \qquad 5919012181389927685417441689600000000$$

3.8. CÁLCULO DE DESARROLLOS DE TAYLOR.

Para calcular el desarrollo de Taylor de cierta función, debemos como es habitual en todas las opciones de CALCULO desplegar la ventana de diálogo correspondiente a este comando, con la secuencia *Calculo-Polinomios de Taylor* apareciendo la ventana de diálogo:



que contiene los siguientes campos:

- Campo VARIABLE, variable respecto de la cual se realiza el desarrollo de Taylor
- Campo PUNTO; en el que se indica el punto donde se desarrolla la Serie de Taylor
- Campo GRADO; es el orden del polinomio de Taylor que deseamos

Por ejemplo, si deseamos calcular el polinomio de Taylor de la función e^x en un entorno del punto x=0, procederemos de la siguiente forma: en primer lugar introducimos la expresión “ê^x”, aplicamos *Calculo-Polinomios de Taylor*, indicamos la variable "*x*" (aunque DERIVE la toma por defecto), en el punto "0" y el orden "6" *y* obtenemos

$$\mathrm{TAYLOR}(\hat{e}^x,\ x,\ 0,\ 6)$$

que tras simplificar resulta el polinomio

$$\frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

EJERCICIO 28.

Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x)=x^4-3x+2$ en un entorno del punto $x=0$.

Con las secuencias de comandos estudiadas tenemos las herramientas fundamentales para el CALCULO DIFERENCIAL. Las secciones que siguen son aplicaciones que requieren únicamente un conocimiento CONCEPTUAL de los elementos que vamos a ir estudiando.