Números Reales

5 de marzo de 2007

Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es simplemente un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto. El conjunto $\mathbb{R}$ con estas operaciones satisface propiedades que lo hacen único.

En $\mathbb{R}$ existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales. Estas últimas propiedades se conocen como el axioma del supremo.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de "todas ellas" de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: "sí, corresponde a la propiedad 1743 (por ejemplo)". Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Los postulados básicos elementales se llaman axioma y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es simplemente un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto. El conjunto $\mathbb{R}$ con estas operaciones satisface propiedades que lo hacen único.

En $\mathbb{R}$ existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales. Estas últimas propiedades se conocen como el axioma del supremo.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de “todas ellas” de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: “sí, corresponde a la propiedad 1743 (por ejemplo)”. Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Los postulados básicos elementales se llaman axioma y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es simplemente un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto. El conjunto $\mathbb{R}$ con estas operaciones satisface propiedades que lo hacen único.

En $\mathbb{R}$ existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales. Estas últimas propiedades se conocen como el axioma del supremo.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de “todas ellas” de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: “sí, corresponde a la propiedad 1743 (por ejemplo)”. Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Los postulados básicos elementales se llaman axioma y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es simplemente un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto. El conjunto $\mathbb{R}$ con estas operaciones satisface propiedades que lo hacen único.

En $\mathbb{R}$ existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales. Estas últimas propiedades se conocen como el axioma del supremo.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de “todas ellas” de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: “sí, corresponde a la propiedad 1743 (por ejemplo)”. Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Los postulados básicos elementales se llaman axioma y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es simplemente un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto. El conjunto $\mathbb{R}$ con estas operaciones satisface propiedades que lo hacen único.

En $\mathbb{R}$ existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales. Estas últimas propiedades se conocen como el axioma del supremo.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de "todas ellas" de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: "sí, corresponde a la propiedad 1743 (por ejemplo)". Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Los postulados básicos elementales se llaman axioma y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

Introducción

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es simplemente un conjunto cuyos elementos se llaman números reales, en el cual se definen dos operaciones llamadas suma o adición y multiplicación o producto. El conjunto $\mathbb{R}$ con estas operaciones satisface propiedades que lo hacen único.

En $\mathbb{R}$ existen numerosas propiedades que han sido usadas durante los años de enseñanza básica y media. Estas propiedades pueden agruparse en tres familias: el primer grupo corresponde a aquellas asociadas a la igualdad y las ecuaciones; el segundo grupo corresponde a las propiedades en torno a la desigualdad y las inecuaciones; finalmente, existe un conjunto de propiedades avanzadas que marca la diferencia entre los números reales y los racionales (las fracciones), estas propiedades se preocupan de la estructura interna de los números reales. Estas últimas propiedades se conocen como el axioma del supremo.

Una posibilidad de estudiar las propiedades de $\mathbb{R}$ sería dar un largo listado de "todas ellas" de modo que cuando se nos pregunte si una propiedad dada es cierta o no, bastaría con decir: "sí, corresponde a la propiedad 1743 (por ejemplo)". Esto transformaría al curso de matemáticas en uno donde sólo habría que memorizar infinitas propiedades.

En este curso, escogeremos una visión opuesta a la anterior. Es decir, todas las propiedades deben ser una consecuencia de ciertos postulados básicos elementales. Los postulados básicos elementales se llaman axioma y serán los pilares fundamentales de nuestra teoría. Las propiedades de $\mathbb{R}$ serán sólo aquellas que pueden ser deducidas, mediante una razonamiento lógico-matemático, de los AXIOMAS.

Agruparemos los axiomas en tres grupos: Los axiomas de cuerpo (asociados a la igualdad), los axiomas de orden (asociados a la desigualdad) y el axioma del supremo (que marca la diferencia entre los reales y los racionales).

Juntando todos los axiomas que satisface $\mathbb{R}$, suele decirse, en pocas palabras que $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado Completo y Arquimediano.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Los axiomas de $\mathbb{R}$ en torno a la igualdad también son llamados axiomas de cuerpo de los reales. Los agruparemos en los 5 siguientes:

Axioma 1 : Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

b) Para el producto se cumple la misma propiedad elemental, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2: Asociatividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Observemos que el axioma de la asociatividad NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$. Sin embargo esta última igualdad es una propiedad cierta, gracias a la combinación apropiada de los dos axiomas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y); && \text{Gracias al axioma 1} \\ &= (x + z) + y; && \text{Gracias al axioma 2.} \end{aligned}$$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Los axiomas de $\mathbb{R}$ en torno a la igualdad también son llamados axiomas de cuerpo de los reales. Los agruparemos en los 5 siguientes:

Axioma 1 : Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

b) Para el producto se cumple la misma propiedad elemental, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2: Asociatividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$
b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Observemos que el axioma de la asociatividad NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$. Sin embargo esta última igualdad es una propiedad cierta, gracias a la combinación apropiada de los dos axiomas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y); && \text{Gracias al axioma 1} \\ &= (x + z) + y; && \text{Gracias al axioma 2.} \end{aligned}$$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Los axiomas de $\mathbb{R}$ en torno a la igualdad también son llamados axiomas de cuerpo de los reales. Los agruparemos en los 5 siguientes:

Axioma 1 : Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

b) Para el producto se cumple la misma propiedad elemental, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2: Asociatividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Observemos que el axioma de la asociatividad NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$. Sin embargo esta última igualdad es una propiedad cierta, gracias a la combinación apropiada de los dos axiomas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y); && \text{Gracias al axioma 1} \\ &= (x + z) + y; && \text{Gracias al axioma 2.} \end{aligned}$$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Los axiomas de $\mathbb{R}$ en torno a la igualdad también son llamados axiomas de cuerpo de los reales. Los agruparemos en los 5 siguientes:

Axioma 1 : Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

b) Para el producto se cumple la misma propiedad elemental, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 2: Asociatividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Observemos que el axioma de la asociatividad NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$. Sin embargo esta última igualdad es una propiedad cierta, gracias a la combinación apropiada de los dos axiomas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y); && \text{Gracias al axioma 1} \\ &= (x + z) + y; && \text{Gracias al axioma 2.} \end{aligned}$$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma que se desee, sin cambiar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma que se desee, sin cambiar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

El tercer axioma, que sigue, completa las propiedades de manipulación algebraica de la suma y el producto.

Axioma 3 : Distributividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad (b) es una consecuencia de la (a) más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra, en las demostraciones.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma que se desee, sin cambiar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

El tercer axioma, que sigue, completa las propiedades de manipulación algebraica de la suma y el producto.

Axioma 3 : Distributividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad (b) es una consecuencia de la (a) más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra, en las demostraciones.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma que se desee, sin cambiar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

El tercer axioma, que sigue, completa las propiedades de manipulación algebraica de la suma y el producto.

Axioma 3 : Distributividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad (b) es una consecuencia de la (a) más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra, en las demostraciones.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma que se desee, sin cambiar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

El tercer axioma, que sigue, completa las propiedades de manipulación algebraica de la suma y el producto.

Axioma 3 : Distributividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad (b) es una consecuencia de la (a) más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra, en las demostraciones.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Por lo tanto, combinando los dos axiomas anteriores, se concluye que los operandos de una triple suma, se pueden reordenar de cualquier forma que se desee, sin cambiar el resultado. Es por esta razón, que en general, cuando hay varios sumandos, no se usan los paréntesis, a no ser que sea estrictamente necesario.

El tercer axioma, que sigue, completa las propiedades de manipulación algebraica de la suma y el producto.

Axioma 3 : Distributividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Observemos que en este tercer axioma, la propiedad (b) es una consecuencia de la (a) más los axiomas previos (más precisamente, el de conmutatividad del producto). Es decir, este axioma es redundante y por lo tanto no debiera ser axioma. Sin embargo, llamaremos a ambas propiedades axiomas, pudiéndose utilizar libremente, una o la otra, en las demostraciones.

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 4a :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para la suma.

Notemos que este axioma nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para la suma. Sin embargo no dice cuantos hay (en realidad dice que hay una cantidad mayor o igual a uno).
Si revisamos nuestros antiguos conocimientos de $\mathbb{R}$, recordaremos que hay sólo un neutro. Esta última afirmación puede demostrarse usando los axiomas, y la llamaremos un teorema (el primero del curso).

Teorema

El elemento neutro para la suma es único.

Observación

Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos "cero" y lo anotaremos 0.

Veamos la demostración del teorema:

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 4a :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para la suma.

Notemos que este axioma nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para la suma. Sin embargo no dice cuantos hay (en realidad dice que hay una cantidad mayor o igual a uno).
Si revisamos nuestros antiguos conocimientos de $\mathbb{R}$, recordaremos que hay sólo un neutro. Esta última afirmación puede demostrarse usando los axiomas, y la llamaremos un teorema (el primero del curso).

Teorema

El elemento neutro para la suma es único.

Observación

Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos "cero" y lo anotaremos 0.

Veamos la demostración del teorema:

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 4a :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para la suma.

Notemos que este axioma nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para la suma. Sin embargo no dice cuantos hay (en realidad dice que hay una cantidad mayor o igual a uno).
Si revisamos nuestros antiguos conocimientos de $\mathbb{R}$, recordaremos que hay sólo un neutro. Esta última afirmación puede demostrarse usando los axiomas, y la llamaremos un teorema (el primero del curso).

Teorema

El elemento neutro para la suma es único.

Observación

Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos "cero" y lo anotaremos 0.

Veamos la demostración del teorema:

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 4a :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra e que no afectan el resultado de la operación suma. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e que cumplen esta propiedad se llaman neutros para la suma.

Notemos que este axioma nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para la suma. Sin embargo no dice cuantos hay (en realidad dice que hay una cantidad mayor o igual a uno).
Si revisamos nuestros antiguos conocimientos de $\mathbb{R}$, recordaremos que hay sólo un neutro. Esta última afirmación puede demostrarse usando los axiomas, y la llamaremos un teorema (el primero del curso).

Teorema

El elemento neutro para la suma es único.

Observación

Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos “cero” y lo anotaremos 0.

Veamos la demostración del teorema:

Demostración del Teorema

Demostración.

Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x. \tag{2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1) y e_1 en la igualdad (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar esta dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

$\square$

Demostración del Teorema

Demostración.

Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x. \tag{2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1) y e_1 en la igualdad (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar esta dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

$\square$

Demostración del Teorema

Demostración.

Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x. \tag{2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1) y e_1 en la igualdad (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar esta dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x. \tag{2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1) y e_1 en la igualdad (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar esta dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x. \tag{2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1) y e_1 en la igualdad (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar esta dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Usando el axioma anterior, sabemos que existen elementos neutros. Digamos que hemos encontrado uno y lo llamamos e_1. Este real satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_1 = x. \tag{1}$$

Pensemos que por algún otro camino hemos encontrado un neutro e_2, pero no sabemos si es o no el mismo anterior. Este neutro satisface la propiedad

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e_2 = x. \tag{2}$$

Para demostrar que el neutro es único, debemos probar que necesariamente $e_1 = e_2$, y así sabremos que cada vez que encontremos un neutro, este será siempre el mismo.

Usando e_2 en la igualdad (1) y e_1 en la igualdad (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_2 + e_1 &= e_2 \\ e_1 + e_2 &= e_1. \end{aligned}$$

Al mirar esta dos expresiones vemos que lo único que falta para concluir la igualdad, es usar el axioma de la conmutatividad, que dice que el resultado de una suma es independiente del orden de los sumandos. Así se obtiene el resultado.

En una línea, lo anterior se resume en

$$e_1 = e_1 + e_2 = e_2 + e_1 = e_2.$$

$\square$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4b :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra h que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Nuevamente, este axioma sólo nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para el producto.

En este caso nuevamente se puede probar el teorema que dice que los neutros son únicos, es decir:

Teorema

El elemento neutro para el producto es único.

Observación

- La demostración de este teorema es análoga al caso de la suma y debe hacerla como ejercicio.
- Al único neutro para el producto lo llamaremos "uno" y lo anotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4b :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra h que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Nuevamente, este axioma sólo nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para el producto.

En este caso nuevamente se puede probar el teorema que dice que los neutros son únicos, es decir:

Teorema

El elemento neutro para el producto es único.

Observación

- La demostración de este teorema es análoga al caso de la suma y debe hacerla como ejercicio.
- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” y lo anotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4b :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra h que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Nuevamente, este axioma sólo nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para el producto.

En este caso nuevamente se puede probar el teorema que dice que los neutros son únicos, es decir:

Teorema

El elemento neutro para el producto es único.

Observación

- La demostración de este teorema es análoga al caso de la suma y debe hacerla como ejercicio.
- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” y lo anotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4b :Existencia de elementos neutros

En $\mathbb{R}$ existen ciertos números denotados por la letra h que, por un lado son diferentes de 0 y por otro no afectan en la operación producto. Es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad se llaman neutros para el producto.

Nuevamente, este axioma sólo nos garantiza la **existencia** de elementos neutros para el producto.
En este caso nuevamente se puede probar el teorema que dice que los neutros son únicos, es decir:

Teorema

El elemento neutro para el producto es único.

Observación

- La demostración de este teorema es análoga al caso de la suma y debe hacerla como ejercicio.
- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” y lo anotaremos 1.
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 5 : Existencia de elementos inversos

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \mathrm{opuesto}(x) = 0.$$

b) Análogamente, para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \mathrm{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, su elemento opuesto es único.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, su elemento recíproco es único.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 5 : Existencia de elementos inversos

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Análogamente, para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, su elemento opuesto es único.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, su elemento recíproco es único.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 5 : Existencia de elementos inversos

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Análogamente, para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema

1. $\forall x \in \mathbb{R},$ su elemento opuesto es único.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, su elemento recíproco es único.

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{3}$$
$$x + p_2 = 0. \tag{4}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2). && \text{aquí hemos usado la ecuación 4.}\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación 3,}\\
&= p_2 + 0. && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x + p_1 &= 0 \qquad (3)\\
x + p_2 &= 0. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación 4,}\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación 3,}\\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}
$$

$\square$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{3}$$
$$x + p_2 = 0. \tag{4}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,} \\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación 4,} \\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,} \\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,} \\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación 3,} \\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,} \\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{3}$$
$$x + p_2 = 0. \tag{4}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación } 4,\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación } 3,\\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{3}$$
$$x + p_2 = 0. \tag{4}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación } 4,\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación } 3,\\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{3}$$
$$x + p_2 = 0. \tag{4}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación } 4,\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación } 3,\\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x + p_1 &= 0 \qquad (3)\\
x + p_2 &= 0. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación } 4,\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación } 3,\\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}
$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \quad (3)$$
$$x + p_2 = 0. \quad (4)$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,}\\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación } 4,\\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,}\\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación } 3,\\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,}\\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 \quad (3) \\ x + p_2 &= 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del elemento neutro,} \\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado la ecuación } 4, \\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Asociatividad,} \\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{aquí hemos usado el axioma de la Conmutatividad,} \\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado la ecuación } 3, \\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,} \\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

□

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo. Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Comentarios

La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y debe hacerse como ejercicio.

Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1}, respectivamente.

Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

A continuación demostraremos otras propiedades de los números reales. Muchas de ellas son conocidas del colegio. Nos interesará revisarlas por un doble objetivo. Por un lado es bueno recordarlas (y/o aprenderlas), y por otro queremos ver por qué son ciertas y como se deducen ellas a partir de los 5 axiomas de cuerpo anteriores.

Comencemos por la propiedad más emblemática de este capítulo, aquella que todo el mundo conoce, algunos creen que es un axioma pero en realidad es una propiedad que se deduce de los axiomas.
Se trata de la tabla del cero.

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Notemos que la tabla del uno, que dice $a \cdot 1 = a$ SI ES un axioma (¿recuerda cual?). Pero esta tabla del cero ES UNA PROPIEDAD.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + a \cdot 0 = x \tag{5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Atención

Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + a \cdot 0 = x \tag{5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Atención

Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

□

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + a \cdot 0 = x \tag{5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Atención

Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + a \cdot 0 = x \tag{5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Atención

Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Sea $a \in \mathbb{R}$ un real cualquiera. Debemos probar que $a \cdot 0 = 0$.

O sea debemos probar que el real $a \cdot 0$ es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$.

Para concluir esto, debemos probar que el real $a \cdot 0$ satisface la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + a \cdot 0 = x \tag{5}$$

Comencemos por probar que la propiedad (5) es cierta para el real a (en lugar de x), o sea que

$$a + a \cdot 0 = a.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} a + a \cdot 0 &= a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ &= a \cdot (1 + 0) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

Atención

Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas usados en cada una de las 4 igualdades anteriores.

□

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a "simplificar" el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}$$

□

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a "simplificar" el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned} x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\ &= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\ &= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\ &= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\ &= x + [(-a) + a] \\ &= x + [a + (-a)] \\ &= x + 0 = x \end{aligned}$$

$\square$

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a "simplificar" el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$
\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)], \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}
$$

$\square$

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a "simplificar" el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$
\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}
$$

□

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si eliminaramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a "simplificar" el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$
\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}
$$

$\square$

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a "simplificar" el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}$$

□

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a “simplificar” el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$
\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}
$$

□

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a “simplificar” el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$
\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)], \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}
$$

□

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a “simplificar” el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned} x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\ &= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\ &= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\ &= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\ &= x + [(-a) + a] \\ &= x + [a + (-a)] \\ &= x + 0 = x \end{aligned}$$

$\square$

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Continuación de la demostración.

Esta primera propiedad, nos enseña a “simplificar” el término $a \cdot 0$ cuando aparece sumado con a. Debemos probar que en general se puede simplificar cuando está sumado con cualquier cosa.

Vamos ahora por la propiedad (5) en general. La clave es hacer aparecer la suma $a + a \cdot 0$ que ya conocemos:

$$\begin{aligned}
x + a \cdot 0 &= x + [0 + a \cdot 0] \\
&= x + [(a + (-a)) + a \cdot 0] \\
&= x + [((-a) + a) + a \cdot 0] \\
&= x + [(-a) + (a + a \cdot 0)]\,, \qquad \text{aquí apareció la suma conocida} \\
&= x + [(-a) + a] \\
&= x + [a + (-a)] \\
&= x + 0 = x
\end{aligned}$$

$\square$

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, si existiera debiera cumplir $0 \cdot 0^{-1} = 1$ y también la propiedad $0 \cdot 0^{-1} = 0$, de donde se obtendría $0 = 1,$ lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Si elimináramos la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, pero los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración.

Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{aligned}
a + x &= b && \text{; como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\
(-a) + (a + x) &= (-a) + b && \text{; asociando} \\
[(-a) + a] + x &= (-a) + b && \text{; pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\
0 + x &= (-a) + b && \text{; pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\
x &= (-a) + b.
\end{aligned}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación.

En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

□

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración.

Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{array}{rcll} a + x &=& b & \text{; como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\ (-a) + (a + x) &=& (-a) + b & \text{; asociando} \\ [(-a) + a] + x &=& (-a) + b & \text{; pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\ 0 + x &=& (-a) + b & \text{; pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\ x &=& (-a) + b. & \end{array}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación.

En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración.

Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{array}{rcll} a + x & = & b & \text{; como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\ (-a) + (a + x) & = & (-a) + b & \text{; asociando} \\ [(-a) + a] + x & = & (-a) + b & \text{; pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\ 0 + x & = & (-a) + b & \text{; pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\ x & = & (-a) + b. & \end{array}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación.

En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración.

Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{array}{rcll} a + x &=& b & ;\text{ como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\ (-a) + (a + x) &=& (-a) + b & ;\text{ asociando} \\ [(-a) + a] + x &=& (-a) + b & ;\text{ pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\ 0 + x &=& (-a) + b & ;\text{ pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\ x &=& (-a) + b. & \end{array}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación.

En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

□

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración.

Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{array}{rcll} a+x &=& b & \text{; como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\ (-a)+(a+x) &=& (-a)+b & \text{; asociando} \\ [(-a)+a]+x &=& (-a)+b & \text{; pero } (-a)+a=0 \text{ por definición de elemento inverso} \\ 0+x &=& (-a)+b & \text{; pero } 0+x=x \text{ por definición de elemento neutro} \\ x &=& (-a)+b. & \end{array}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación.

En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Haremos sólo la demostración de la parte (a). Como ejercicio debe demostrar que la solución única de la parte (b) es: $x = b \cdot a^{-1}$.

Demostración.

Veamos primero la existencia de la solución. Comenzaremos por hacer un cálculo formal, que consiste en transformar la ecuación original en una más evidente. Veamos:

$$\begin{array}{rcll} a + x & = & b & \text{; como } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } (-a) \in \mathbb{R} \\ (-a) + (a + x) & = & (-a) + b & \text{; asociando} \\ [(-a) + a] + x & = & (-a) + b & \text{; pero } (-a) + a = 0 \text{ por definición de elemento inverso} \\ 0 + x & = & (-a) + b & \text{; pero } 0 + x = x \text{ por definición de elemento neutro} \\ x & = & (-a) + b. & \end{array}$$

El problema de este cálculo formal, es que hemos transformado una igualdad que no sabemos si es cierta o no. Sin embargo, nos entrega un buen candidato a solución.

La verdadera demostración comienza aquí, diciendo: Sea $\alpha = (-a) + b$, veamos que este real satisface la ecuación.

En efecto

$$a + \alpha = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de al menos una solución de la ecuación.

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Ahora veamos que esta solución es única. Para ello, supongamos que hemos encontrado los reales x_1 y x_2, los que son soluciones de $a + x = b$. La unicidad quedará demostrada, si con sólo esta hipótesis, se concluye que $x_1 = x_2$.
Veamos:

$$\begin{array}{lrcl} a + x_1 = b \text{ y además } a + x_2 = b \quad \text{entonces,} & a + x_1 & = & a + x_2 \\ \text{entonces,} & (-a) + [a + x_1] & = & (-a) + [a + x_2] \\ \text{entonces,} & [(-a) + a] + x_1 & = & [(-a) + a] + x_2 \\ \text{entonces,} & 0 + x_1 & = & 0 + x_2 \\ \text{entonces,} & x_1 & = & x_2. \end{array}$$

Con esto se concluye la demostración de la unicidad de soluciones. □

Definiciones importantes

La unicidad que nos da la Propiedad anterior motiva las siguientes definiciones:

Definición: Diferencia y cuociente

- Llamaremos diferencia entre a y b al real $x = b + (-a)$ y se denota por $x = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en
$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$

- El resultado de la ecuación (b) $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cuociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$, o bien por el cuociente $x = b : a$. Luego si $a \neq 0$ se tiene que:
$$a \cdot x = b \text{ si y sólo si } x = \frac{b}{a}.$$

Definiciones importantes

La unicidad que nos da la Propiedad anterior motiva las siguientes definiciones:

Definición: Diferencia y cuociente

- Llamaremos diferencia entre a y b al real $x = b + (-a)$ y se denota por $x = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en

$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$

- El resultado de la ecuación (b) $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cuociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$, o bien por el cuociente $x = b : a$. Luego si $a \neq 0$ se tiene que:

$$a \cdot x = b \text{ si y sólo si } x = \frac{b}{a}.$$

Observaciones

De la unicidad de soluciones de estas ecuaciones se deducen varias variantes útiles en procesos algebraicos:

1. Ley de cancelación para la suma:
$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$
En efecto, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a + x = a + c$. Como la solución de esta ecuación es única, entonces $b = c$.
2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,
$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$
En efecto, análogamente al caso anterior, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a \cdot x = a \cdot c$.
3. Resolución de la ecuación lineal general
$$a \cdot x + b = 0, \qquad \text{donde } a \neq 0.$$
Combinando las dos partes de la proposición anterior, se obtiene que, primero (usando la parte de la suma)
$$a \cdot x = -b$$
y por otro para el producto
$$x = -\frac{b}{a}.$$

Observaciones

De la unicidad de soluciones de estas ecuaciones se deducen varias variantes útiles en procesos algebraicos:

1. Ley de cancelación para la suma:
$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$
En efecto, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a + x = a + c$. Como la solución de esta ecuación es única, entonces $b = c$.
2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,
$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$
En efecto, análogamente al caso anterior, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a \cdot x = a \cdot c$.
3. Resolución de la ecuación lineal general
$$a \cdot x + b = 0, \qquad \text{donde } a \neq 0.$$
Combinando las dos partes de la proposición anterior, se obtiene que, primero (usando la parte de la suma)
$$a \cdot x = -b$$
y por otro para el producto
$$x = -\frac{b}{a}.$$

Observaciones

De la unicidad de soluciones de estas ecuaciones se deducen varias variantes útiles en procesos algebraicos:

1. Ley de cancelación para la suma:
$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$
En efecto, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a + x = a + c$. Como la solución de esta ecuación es única, entonces $b = c$.
2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,
$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$
En efecto, análogamente al caso anterior, puede decirse que b y c son las soluciones de la misma ecuación $a \cdot x = a \cdot c$.
3. Resolución de la ecuación lineal general
$$a \cdot x + b = 0, \qquad \text{donde } a \neq 0.$$
Combinando las dos partes de la proposición anterior, se obtiene que, primero (usando la parte de la suma)
$$a \cdot x = -b$$
y por otro para el producto
$$x = -\frac{b}{a}.$$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. $\square$

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. □

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de “contar los signos”. Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. □

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. $\square$

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. $\square$

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. □

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. $\square$

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Demostración.

En el primer caso debe probarse que el opuesto de $(-a)$ es a.

Recordemos que el opuesto de $(-a)$ es un número p que cumple la relación

$$(-a) + p = 0.$$

Pues bien debemos probar que a es dicho número, es decir

$$\text{P.D.Q:} \qquad (-a) + a = 0.$$

Notemos que una vez que se logró comprender el problema a este nivel, y logramos identificar que es lo que hay que probar, la demostración misma es sencilla.

En efecto: se tiene que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

La demostración del caso (ii) es análoga y debe hacerla como ejercicio. $\square$

Notemos que de aquí, se obtiene la regla de "contar los signos". Así $-(-(-(-(-a)))) = -a$, etc.

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
iii) $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$
iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
v) $a - (b+c) = a - b - c$
vi) $a - (b-c) = a - b + c$

Demostración.

Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$.

Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i). $\square$

Atención

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
iii) $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$
iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
v) $a - (b+c) = a - b - c$
vi) $a - (b-c) = a - b + c$

Demostración.

Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$.

Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i).

□

Atención

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
iii) $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$
iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
v) $a - (b+c) = a - b - c$
vi) $a - (b-c) = a - b + c$

Demostración.

Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$.

Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i). $\square$

Atención

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
iii) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
v) $a - (b + c) = a - b - c$
vi) $a - (b - c) = a - b + c$

Demostración.

Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$.

Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i).

$\square$

Atención

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
iii) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
v) $a - (b + c) = a - b - c$
vi) $a - (b - c) = a - b + c$

Demostración.

Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$.

Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i).

□

Atención

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$
ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
iii) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$
iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
v) $a - (b + c) = a - b - c$
vi) $a - (b - c) = a - b + c$

Demostración.

Comencemos por la propiedad (i). Se debe probar sólo la primera igualdad, ya que la segunda es una notación del segundo término.

Esta igualdad pretende que EL OPUESTO DE $(a \cdot b)$ es el real $a \cdot (-b)$.

Por lo tanto debemos probar lo siguiente

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a \cdot b) + [a(-b)] = 0.$$

Veamos si esto último es o no cierto:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + [a(-b)] &= a \cdot [b + (-b)] \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (i).

□

Atención

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Para demostrar la propiedad (ii) usamos la propiedad (i) dos veces en forma sucesiva. En efecto

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= -[(-a)\cdot b]\\ &= -[b\cdot(-a)]\\ &= -[-(b\cdot a)]\\ &= ab.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad (iii) debemos probar que el opuesto de $(a+b)$ es el número real $(-a)+(-b)$. Es decir, debemos probar que

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a+b)+[(-a)+(-b)] = 0.$$

Esto efectivamente es cierto ya que

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)] &= [(a+b)+(-a)]+(-b)\\ &= [(b+a)+(-a)]+(-b)\\ &= [b+(a+(-a))]+(-b)\\ &= [b+0]+(-b)\\ &= b+(-b)=0.\end{aligned}$$

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Para demostrar la propiedad (ii) usamos la propiedad (i) dos veces en forma sucesiva. En efecto

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= -[(-a)\cdot b]\\ &= -[b\cdot(-a)]\\ &= -[-(b\cdot a)]\\ &= ab.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad (iii) debemos probar que el opuesto de $(a+b)$ es el número real $(-a)+(-b)$.

Es decir, debemos probar que

$$\text{P.D.Q.:}\qquad (a+b)+[(-a)+(-b)]=0.$$

Esto efectivamente es cierto ya que

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)] &= [(a+b)+(-a)]+(-b)\\ &= [(b+a)+(-a)]+(-b)\\ &= [b+(a+(-a))]+(-b)\\ &= [b+0]+(-b)\\ &= b+(-b)=0.\end{aligned}$$

□

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Para demostrar la propiedad (ii) usamos la propiedad (i) dos veces en forma sucesiva. En efecto

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= -[(-a)\cdot b]\\ &= -[b\cdot(-a)]\\ &= -[-(b\cdot a)]\\ &= ab.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad (iii) debemos probar que el opuesto de $(a+b)$ es el número real $(-a)+(-b)$.

Es decir, debemos probar que

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a+b)+[(-a)+(-b)] = 0.$$

Esto efectivamente es cierto ya que

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)] &= [(a+b)+(-a)]+(-b)\\ &= [(b+a)+(-a)]+(-b)\\ &= [b+(a+(-a))]+(-b)\\ &= [b+0]+(-b)\\ &= b+(-b)=0.\end{aligned}$$

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

Para demostrar la propiedad (ii) usamos la propiedad (i) dos veces en forma sucesiva. En efecto

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= -[(-a)\cdot b]\\ &= -[b\cdot(-a)]\\ &= -[-(b\cdot a)]\\ &= ab.\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad (iii) debemos probar que el opuesto de $(a+b)$ es el número real $(-a)+(-b)$.

Es decir, debemos probar que

$$\text{P.D.Q.:} \qquad (a+b)+[(-a)+(-b)]=0.$$

Esto efectivamente es cierto ya que

$$\begin{aligned}(a+b)+[(-a)+(-b)] &= [(a+b)+(-a)]+(-b)\\ &= [(b+a)+(-a)]+(-b)\\ &= [b+(a+(-a))]+(-b)\\ &= [b+0]+(-b)\\ &= b+(-b)=0.\end{aligned}$$

□

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

La propiedad (iv) es análoga a la (iii), cambiando la operación suma por producto. Debe hacerse como ejercicio.

Para demostrar las últimas dos propiedades, deben combinarse la propiedades ya demostradas. Hagamos la propiedad (v). La propiedad (vi) debe hacerse como ejercicio.

La demostración se realiza tomando el lado izquierdo y concluyendo que es igual al lado derecho.

Veamos:

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a+[-(b+c)] \\ &= a+[(-b)+(-c)] \\ &= a+(-b)+(-c) \\ &= (a-b)-c. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

La propiedad (iv) es análoga a la (iii), cambiando la operación suma por producto. Debe hacerse como ejercicio.

Para demostrar las últimas dos propiedades, deben combinarse la propiedades ya demostradas. Hagamos la propiedad (v). La propiedad (vi) debe hacerse como ejercicio.

La demostración se realiza tomando el lado izquierdo y concluyendo que es igual al lado derecho.

Veamos:

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a+[-(b+c)] \\ &= a+[(-b)+(-c)] \\ &= a+(-b)+(-c) \\ &= (a-b)-c. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

La propiedad (iv) es análoga a la (iii), cambiando la operación suma por producto. Debe hacerse como ejercicio.

Para demostrar las últimas dos propiedades, deben combinarse la propiedades ya demostradas. Hagamos la propiedad (v). La propiedad (vi) debe hacerse como ejercicio.

La demostración se realiza tomando el lado izquierdo y concluyendo que es igual al lado derecho.

Veamos:

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a+[-(b+c)] \\ &= a+[(-b)+(-c)] \\ &= a+(-b)+(-c) \\ &= (a-b)-c. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Demostración.

La propiedad (iv) es análoga a la (iii), cambiando la operación suma por producto. Debe hacerse como ejercicio.

Para demostrar las últimas dos propiedades, deben combinarse la propiedades ya demostradas. Hagamos la propiedad (v). La propiedad (vi) debe hacerse como ejercicio.

La demostración se realiza tomando el lado izquierdo y concluyendo que es igual al lado derecho.

Veamos:

$$\begin{aligned} a-(b+c) &= a+[-(b+c)] \\ &= a+[(-b)+(-c)] \\ &= a+(-b)+(-c) \\ &= (a-b)-c. \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. □

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Demostración.

La propiedad dice que cada vez que el producto de dos reales sea cero, entonces alguno de los factores debe ser cero.

Para demostrarla se toma la igualdad $x \cdot y = 0$ como un dato y se razona hasta concluir que es cierto que $x = 0$ o bien $y = 0$. (Así es como se demuestra en general una implicación).

Por lo tanto sabemos que $x \cdot y = 0$.

$$\text{P.D.Q.:} \qquad x = 0 \text{ o bien } y = 0.$$

Claramente x puede o no ser cero. Si lo fuera, entonces la demostración estaría concluida.

Solo nos faltaría ver que pasa si $x \neq 0$. En este caso la igualdad

$$x \cdot y = 0$$

se ve como una ecuación, en la cual se puede despejar y dividiendo por x (multiplicando por x^{-1}).

Haciendo esto se concluye que $y = 0$.
Por lo tanto, o bien $x = 0$, o bien $x \neq 0$, pero en este caso $y = 0$.

Conclusión: Alguno de los reales debe ser cero. $\square$

Propiedades adicionales

1. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ $\quad \forall a, b, c, \in \mathbb{R}$, con $b, c \neq 0$
2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$ $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$
3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$
4. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$ $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, c, d \neq 0$
5. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
6. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
7. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
8. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Observación

En estas propiedades se han usado las notaciones siguientes

$$ab = a \cdot b \qquad 1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4, \qquad \text{etc.}$$

$$a \cdot a = a^2, \qquad a^2 \cdot a = a^3, \qquad a^3 \cdot a = a^4, \qquad \text{etc.}$$

Además, el símbolo $\pm$ representa el que la propiedad es cierta si se reemplazan todas las apariciones de $\pm$ por $+$, o si se reemplazan todas por $-$.

Propiedades adicionales

1. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b} \qquad \forall a, b, c, \in \mathbb{R}$, con $b, c \neq 0$
2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$
3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$
4. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, c, d \neq 0$
5. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
6. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
7. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
8. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Observación

En estas propiedades se han usado las notaciones siguientes

$$ab = a \cdot b \qquad 1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4, \qquad \text{etc.}$$

$$a \cdot a = a^2, \qquad a^2 \cdot a = a^3, \qquad a^3 \cdot a = a^4, \qquad \text{etc.}$$

Además, el símbolo $\pm$ representa el que la propiedad es cierta si se reemplazan todas las apariciones de $\pm$ por $+$, o si se reemplazan todas por $-$.

Demostración

1.
$$\begin{aligned}\frac{ac}{bc} &= ac(bc)^{-1}\\ &= ac(b^{-1}c^{-1})\\ &= ac(c^{-1}b^{-1})\\ &= a(cc^{-1})b^{-1}\\ &= a\cdot 1\cdot b^{-1}\\ &= ab^{-1}\\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d} &= ab^{-1}\pm cd^{-1}\\ &= ab^{-1}dd^{-1}\pm cbb^{-1}d^{-1}\\ &= ad(bd)^{-1}\pm bc(bd)^{-1}\\ &= (ad\pm bc)(bd)^{-1}\\ &= \frac{ad\pm bc}{bd}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= ab^{-1}cd^{-1}\\ &= ac(bd)^{-1}\\ &= \frac{ac}{bd}\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\frac{a}{b}:\frac{c}{d} &= ab^{-1}:cd^{-1}\\ &= ab^{-1}\cdot(cd^{-1})^{-1}\\ &= ab^{-1}\cdot(c^{-1}d)\\ &= ad(bc)^{-1}\\ &= \frac{ad}{bc}\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Reflexión

Antes de continuar, reconozca cuales fueron los axiomas y propiedades usados en cada una de las igualdades anteriores.

La demostración de las propiedades restantes debe hacerse como ejercicio.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto formado por dos elementos siguiente:

$$A = \{\heartsuit, \triangle\}.$$

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$$\begin{array}{c|cc} \circ & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \triangle \\ \triangle & \triangle & \heartsuit \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} * & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ \triangle & \heartsuit & \triangle \end{array}$$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1+1=0$, $1+1+1=1$, etc.

Vemos que los axiomas de cuerpo son interesantes, pero no definen completamente al conjunto $\mathbb{R}$ que esperábamos. Este conjunto A de dos elementos satisface los mismos axiomas que $\mathbb{R}$.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto formado por dos elementos siguiente:

$$A = \{\heartsuit, \triangle\}.$$

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$\circ$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\triangle$	$\triangle$	$\heartsuit$

$*$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc.

Vemos que los axiomas de cuerpo son interesantes, pero no definen completamente al conjunto $\mathbb{R}$ que esperábamos. Este conjunto A de dos elementos satisface los mismos axiomas que $\mathbb{R}$.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto formado por dos elementos siguiente:

$$A = \{\heartsuit, \triangle\}.$$

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$$\begin{array}{c|cc} \circ & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \triangle \\ \triangle & \triangle & \heartsuit \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} * & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ \triangle & \heartsuit & \triangle \end{array}$$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc.

Vemos que los axiomas de cuerpo son interesantes, pero no definen completamente al conjunto $\mathbb{R}$ que esperábamos. Este conjunto A de dos elementos satisface los mismos axiomas que $\mathbb{R}$.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto formado por dos elementos siguiente:

$$A = \{\heartsuit, \triangle\}.$$

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$$\begin{array}{c|cc} \circ & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \triangle \\ \triangle & \triangle & \heartsuit \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} * & \heartsuit & \triangle \\ \hline \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ \triangle & \heartsuit & \triangle \end{array}$$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc.

Vemos que los axiomas de cuerpo son interesantes, pero no definen completamente al conjunto $\mathbb{R}$ que esperábamos. Este conjunto A de dos elementos satisface los mismos axiomas que $\mathbb{R}$.