Geometría Analítica

16 de marzo de 2007

Sistema de coordenadas cartesianas

Motivación:

Has oido hablar sobre gente que juega ajedrez sin tener que mirar nunca el tablero?

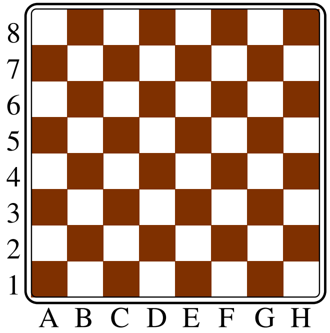
Sí!. Esto es posible, y se debe a la herramienta llamada coordenadas de un punto.

En un tablero de ajedrez, se usan las letras de la A a la H para identificar las columnas del tablero y los números del 1 al 8 para identificar sus filas.

Observa la figura de la derecha, allí aparece el típico tablero de ajedrez, con sus columnas y filas rotuladas según la regla enunciada anteriormente.

Así por ejemplo, la torre blanca comienza ubicandose en la coordenada (1,A) del tablero.

Con esta técnica, los jugadores pueden anotar sus jugadas, en los partidos, o simplemente comunicarle a su adversario las coordenadas de la pieza que piensa mover y este sabe exactamente cual será la nueva configuración del tablero



Esta idea puede usarse en otras situaciones, como por ejemplo un clasico juego de batallas navales donde los jugadores intentan destruir el barco adversario dando coordenadas a su bombardeos.

Sistema de coordenadas cartesianas

Un ejemplo muy importante es el Plano Geométrico.

En este caso, la idea para ubicar un punto cualquiera es trazar arbitrariamente dos rectas perpendiciulares, que se cortan un punto llamado origen O.

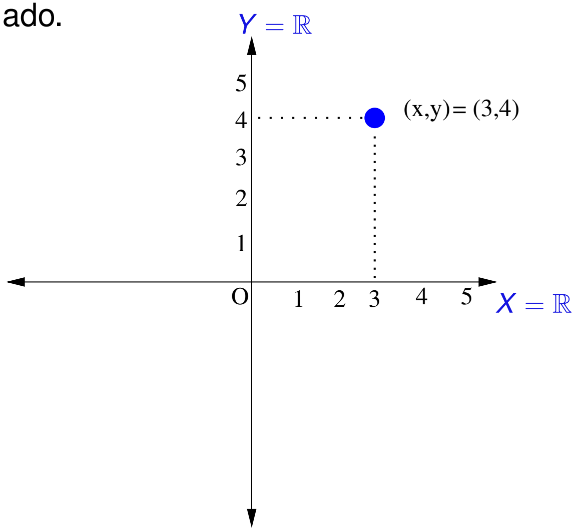
Normalmente una de las rectas es horizontal y se denota por OX y la otra es vertical y se denota por OY.

Con esta construcción, un punto P se ubica en el plano midiendo su distancia a cada una de las rectas.

Para diferenciar los diferentes lados, a estas distancias se le asignan signos positivo o negativo, del modo siguiente:

- La distancia de P a la recta OY se denota por la letra x.
  $x > 0$ si P está a la derecha de OY, si no x será negativo al otro lado.
- La distancia de P a la recta OX se denota por la letra y.
  $y > 0$ si P esta arriba de la recta OX, abajo se usa $y < 0$.

> Este conjunto de rectas y la forma en que se ubican los puntos en base a ellas, constituyen el Famoso Sitema de Coordenadas Cartesianas.
> Se suele denotar este sistema por el simbolo $\{OXY\}$ para recordar sus elementos gestores.
> Observa al a derecha como se ha dibujado el punto P que dista $x = 3$ del eje OY y dista $y = 4$ del eje horizontal OX.
> Los números 3 y 4 se llaman las coordenadas del punto P. Esto se anota $P = (3, 4)$.



Sistema de coordenadas cartesianas

Un poco más de nomenclatura:

La recta horizontal OX se suele llamar eje de las x, o eje de las abscisas. La recta vertical OY se llama o eje de las y, o eje de las ordenadas.

Si $P = (x, y)$, entonces se dice que x es la abscisa de P y que y es la ordenada de P.

Conjuntos destacados:

El sistema de Coordenadas cartesianas también sirve para representar conjuntos de puntos. En general, estos conjuntos se anotan por expresiones del tipo

$$A = \{\text{todos los puntos de coordenadas } (x, y) \text{ tales que } \in C\},$$

donde la letra C denota alguna condición que satisfacen dichas coordenadas.

Ejemplo

Por ejemplo, los ejes de coordenadas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} OX &= \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y = 0\} \\ OY &= \{(x, y) : x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Los siguientes conjuntos se llaman Cuadrantes del sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{1er. Cuadrante} &= \{(x, y) : x > 0,\ y > 0\} \\ \text{2do. Cuadrante} &= \{(x, y) : x < 0,\ y > 0\} \\ \text{3er. Cuadrante} &= \{(x, y) : x < 0,\ y < 0\} \\ \text{4to. Cuadrante} &= \{(x, y) : x > 0,\ y < 0\}. \end{aligned}$$

Otras ecuaciones elementales

Veamos algunos conjuntos elementales del plano descritos usando ecuaciones algebraicas.

- $\{(x, y) : xy = 0\} = \{(x, y) : x = 0 \text{ o bien } y = 0\}$ corresponde a la unión de dos ejes.
- $\{(x, y) : y > 0\}$ corresponde al semiplano de los puntos ubicados sobre el eje OX
- $\{(x, y) : x = a\}$ donde a fijo, corresponde a una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$.
- $\{(x, y) : y = b\}$ donde b fijo, corresponde a una recta horizontal que pasa por el punto $(0, b)$.

Lugares Geométricos

Definición (Lugar geométrico)

En este contexto, a los conjuntos de puntos del plano que satisfacen alguna condición geométrica o algebraica, los llamaremos Lugares Geométricos.

Observación

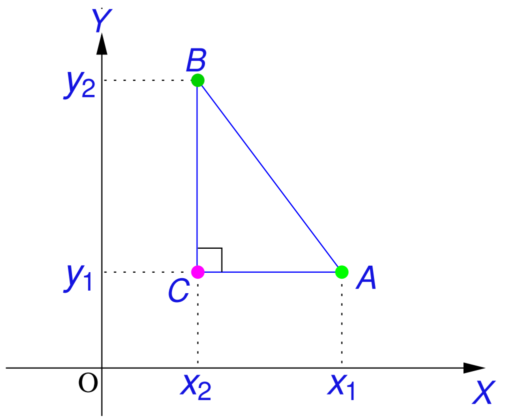
En geometría se han estudiado muchos lugares geométricos importantes, tales como las rectas, circunferencias, etc., dándose sus características mediante el lenguaje de la geometría.
Nuestro objetivo será estudiar dichos lugares geométricos, escribiendo sus definiciones mediante ecuaciones algebraicas que los identifiquen plenamente. Normalmente en nuestros problemas tendremos que encontrar dichas ecuaciones e identificar el concepto geométrico que ellas representan.

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos del plano $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Sea C el punto de coordenadas (x_2, y_1). Entonces el ΔACB es rectángulo en C.

Por teorema de Pitágora se cumple que:

$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(C,B)^2.$$



De la figura, vemos claro que la distancia entre A y C, y la distancia entre C y B están dadas por:

$$\begin{aligned} d(A,C) &= |x_2 - x_1| \\ d(C,B) &= |y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

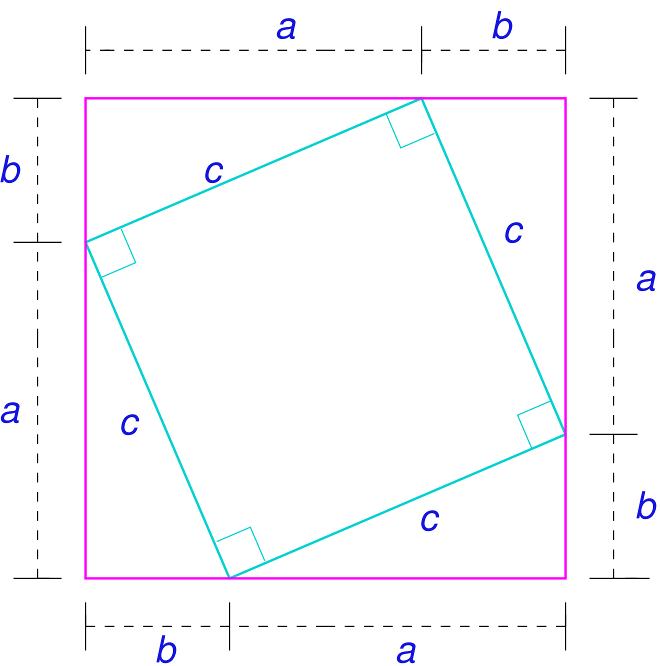
reemplazando y sacando raíz cuadrada, la distancia $d(A,B)$ vale:

Distancia entre dos puntos:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Teorema de pitágoras

Veamos una demostración del famoso teorema de pitágoras, con la ayuda de la siguiente figura.



Vemos que el área del cuadrado de lado $a+b$ es igual al área del cuadrado inclinado de lado c más el área de los triángulos de los extremos, es decir:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{(ab)}{2}.$$

Desarrollando el cuadrado del binomio a la izquierda y ordenando términos a la derecha se obtiene:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$$

Finalmente, se simplifican los términos $2ab$ y resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ecuación de la circunferencia

Sean $A = (a, b)$ un punto fijo conocido del plano y r un número real conocido mayor que 0.

Una circunferencia con centro en el punto A y radio r, es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano tales que su distancia al punto A vale r, es decir:

$$\mathscr{C} = \{P = (x, y) : d(P, A) = r\},$$

usando la ecuación 1, obtenemos:

$$\mathscr{C} = \{P = (x, y) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\},$$

luego elevando al cuadrado:

$$\mathscr{C} = \{P = (x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Ecuación de la circunferencia

Por lo tanto la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (a, b) y de radio r será:

Ecuación de la circunferencia:

$$\mathscr{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Es decir, al dibujar en el plano los puntos que satisfacen esta ecuación se formará una circunferencia.

Ejemplos

- $x^2 + y^2 = 8^2$, es decir :$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 64$, corresponde a una circunferencia con centro en el origen $(0, 0)$ y de radio 8.
- $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x = 0$

Completación de cuadrados

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Para poder ver que efectivamente este último ejemplo se trata de una circunferencia, es necesario detenernos para aprender el método de completación de cuadrados.

Luego la ecuación del ejemplo $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x = 0$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad &\iff \quad x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ &\iff \quad (x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0 \\ &\iff \quad (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Es decir corresponde a una circunferencia con centro en $(1, 0)$ y de radio $r = 1$.

Observaciones

1. Si $\mathscr{C}$ es una circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ entonces su ecuación puede escribirse

$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad &\iff \quad x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2\\ &\iff \quad x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0,\end{aligned}$$

es decir, si definimos: $A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-r^2$, la ecuación de la circunferencia también se escribirá de la forma:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

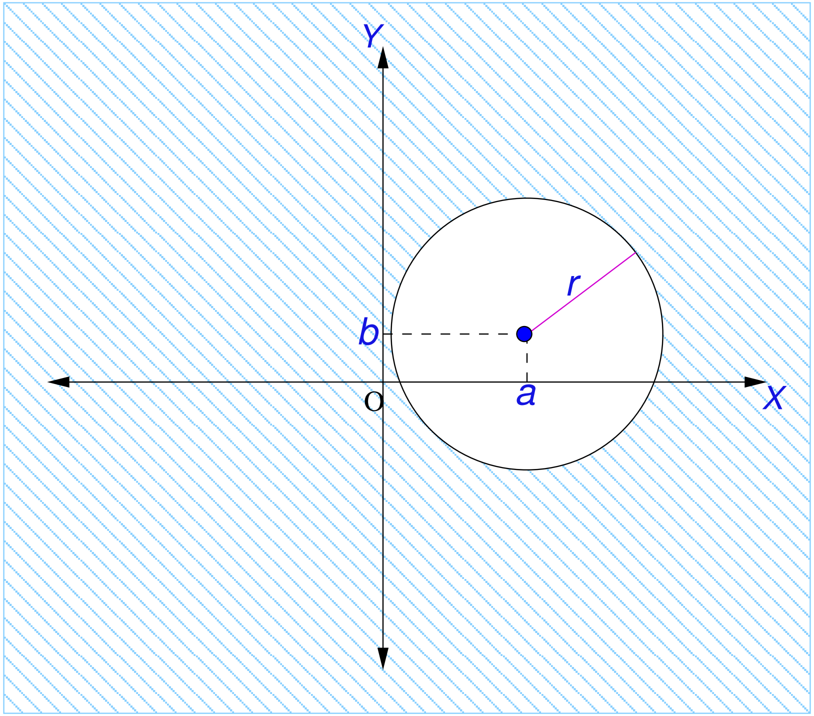
2. Recíprocamente, utilizaremos el método de completación de cuadrados. Consideremos el conjunto $M=\{(x,y): x^2+y^2+Ax+By+C=0\}$, donde A, B, C son constantes dadas. La ecuación del conjunto M puede escribirse:

$$\begin{aligned}& x^2+y^2+Ax+By+C=0\\ \iff\quad & x^2+Ax+y^2+By+C=0\\ \iff\quad & x^2+2(\tfrac{A}{2})x+y^2+2(\tfrac{B}{2})y+C=0\\ \iff\quad & x^2+2(\tfrac{A}{2})x+(\tfrac{A}{2})^2-(\tfrac{A}{2})^2+\\ & +y^2+2(\tfrac{B}{2})y+(\tfrac{B}{2})^2-(\tfrac{B}{2})^2+C=0\\ \iff\quad & (x+\tfrac{A}{2})^2+(y+\tfrac{B}{2})^2+C-\tfrac{A^2}{4}-\tfrac{B^2}{4}+C=0\\ \iff\quad & (x+\tfrac{A}{2})^2+(y+\tfrac{B}{2})^2=\tfrac{A^2+B^2-4C}{4}\end{aligned}$$

De donde vemos que M corresponde a una circunferencia de centro $(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ y radio $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ cuando $A^2+B^2-4C\geq 0$.
Si por el contrario, los datos A, B y C fueran tales que $A^2+B^2-4C<0$ entonces observamos que no existirían valores de x e y que satisfagan la ecuación de M, luego M corresponde al conjunto vacío, ya que no podemos crear una circunferencia de radio negativo.

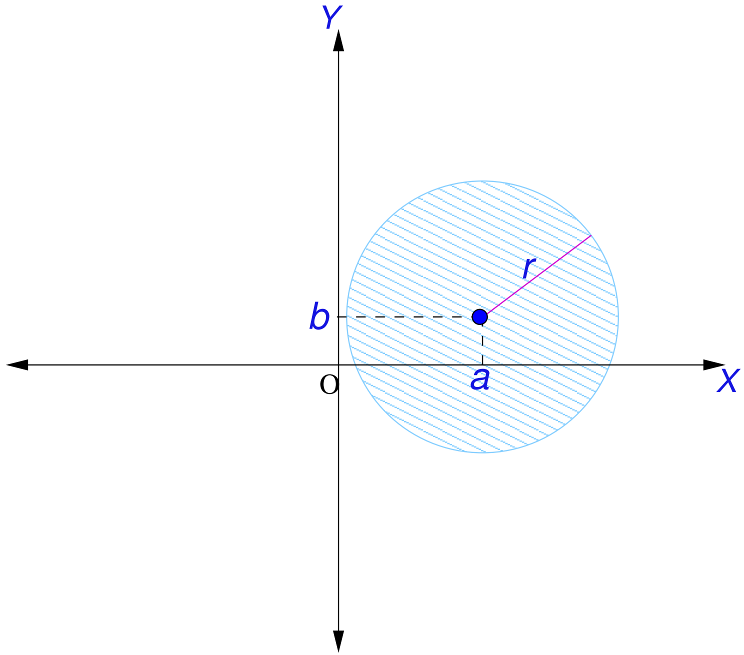
Ejemplo

- $\{(x, y)/(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2\}$ Representa a la zona exterior a la circunferencia de centro en (a, b) y radio r.



Ejemplo

- $\{(x, y)/(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$ Representa a la zona interior a la circunferencia de centro en (a, b) y radio r.



Ecuación de la recta

Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del plano tales que $A \neq B$.

Queremos encontrar la ecuación de la única recta que pasa por los puntos A y B.

En los casos $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$ que corresponden a rectas vertical y horizontal respectivamente, la ecuación es evidentemente $x = x_1$ o $y = y_1$ respectivamente.

En el caso $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ podemos ver que un punto cualquiera $P = (x, y)$ del plano pertenece a la recta que pasa por A y B, sí y solamente sí alguna de las siguientes condiciones se cumple:

1. $P = A$
2. $P = B$
3. P está en el segmento $\overline{AB}$
4. B está en el segmento $\overline{AP}$
5. A está en el segmento $\overline{PB}$

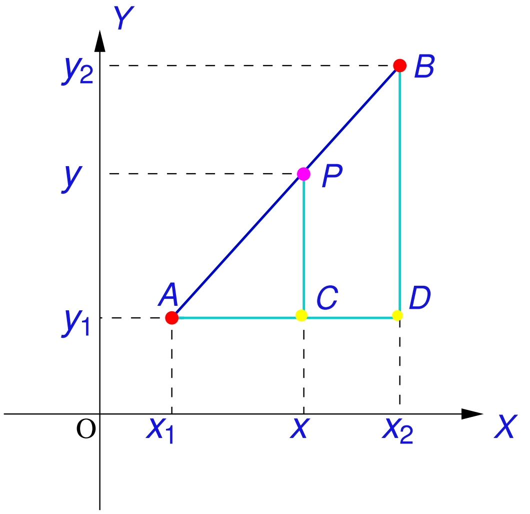
Ecuación de la recta

Supongamos que estamos en el caso (3). Sean $C = (x, y_1)$y D=(x_2, y_1). Gráficamente tenemos:

De la figura podemos ver que los triángulos ΔACP y ΔADB son semejantes.

La condición de semejanza la escribimos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{CP}}{\overline{DB}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \\
\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
(x_2 - x_1)(y - y_1) &= (x - x_1)(y_2 - y_1) \\
(x - x_1)(y_2 - y_1) &= (y - y_1)(x_2 - x_1).
\end{aligned}
$$



Queda como ejercicio ver que las condiciones (4) y (5) son equivalentes a la misma ecuación.

Con esto podemos ver que la condición necesaria y suficiente para que un punto $P = (x, y)$ esté sobre la recta L que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ es

$$P = (x, y) \in \mathscr{L} \iff (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Ejemplo

Dados los puntos $A = (-2, 3)$ y $B = (5, 0)$, la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por A y B es:

$$(x + 2)(0 - 3) = (y - 3)(5 + 2).$$

Sin embargo, simplificando esta ecuación también se escribe:

$$\mathscr{L} : 3x + 7y - 15 = 0.$$

Ecuación de la recta, forma 1

Sea $\mathscr{L}$ la recta de ecuación $(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1)$. Igual que en el ejemplo, podemos escribir esta ecuación en forma simplificada:

$$
\begin{aligned}
(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1) \quad &\iff \quad (x-x_1)y_2-(x-x_1)y_1=(x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1\\
&\iff \quad xy_2-xy_1-x_1y_2+x_1y_1=yx_2-yx_1-x_2y_1+x_1y_1\\
&\iff \quad (y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, si escribimos $a=(y_2-y_1)$, $b=-(x_2-x_1)$, $c=(x_2y_1-x_1y_2)$, la ecuación de cualquier recta puede escribirse de la forma:

Ecuación de la recta forma 1

$$\mathscr{L}: ax+by+c=0.$$

Analicemos cuales son los puntos (x,y) que satisfacen esta ecuación para distintos valores de a, b, c. Es decir, cual es el conjunto solución de esta ecuación.

Ecuación de la recta, forma 1

Teorema

El conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$ es:

i) El conjunto vacío si $a = 0, b = 0, c \neq 0$.
ii) Todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a = b = c = 0$.
iii) Una recta vertical si $a \neq 0$ y $b = 0$.
iv) Una recta horizontal si $a = 0$ y $b \neq 0$.
v) Una recta oblicua (inclinada) si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Demostración.

i) No hay punto (x, y) que cumpla la ecuación, por lo tanto el conjunto solución es vacío.
ii) Cualquier punto (x, y) satisface la ecuación. Lo que implica que la solución es todo el plano cartesiano.
iii) Como $b = 0$ y $a \neq 0$ entonces la ecuación queda $x = -c/a$, la cual corresponde a una recta vertical.
iv) Como $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces la ecuación queda $y = -c/b$, la cual corresponde a una recta horizontal.
v) En este caso la demostración la dividiremos en dos etapas:

Etapa 1.
Primero probaremos que el conjunto $R = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ contiene al menos dos puntos distintos. En efecto, si $c \neq 0$ entonces $A = (0, -c/b)$ y $B = (-c/a, 0)$ son dos puntos de R y si $c = 0$ entonces $A' = (0, 0)$ y $B' = (-b, a)$ son dos puntos de R. Luego, no importando el valor de c, se tiene que R contiene al menos dos puntos distintos entre sí.

Continúa...

$\square$

Ecuación de la recta, forma 1

Continuación demostración.

Etapa 2.
Como demostramos que R posee al menos dos puntos distintos entre sí, llamemos a estos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), y sea $P = (x, y)$ un punto arbitrario de R.
Probaremos que P satisface la ecuación $(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$.
En efecto, como (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x, y) son puntos de R, entonces los tres puntos satisfacen la ecuación $ax + by + c = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \qquad (1)\\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \qquad (2)\\ ax + by + c &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

luego restando$(2) - (1)$ y $(3) - (1)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= 0 \qquad (2) - (1) = (4)\\ a(x - x_1) + b(y - y_1) &= 0 \qquad (3) - (1) = (5) \end{aligned}$$

luego haciendo $(y - y_1) \cdot (4) - (y_2 - y_1) \cdot (5)$ se obtiene:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Con esto hemos probado que R es una recta.
De la Etapa 1 vimos que si $c \neq 0$ entonces los puntos $A = (0, -c/b)$ y $B = (-c/a, 0)$ pertenecen a R y son puntos de abscisas y ordenadas distintas, por lo tanto la recta R que pasa por esos puntos es oblicua, lo mismo pasa para los puntos encontrados con $c = 0$. $\square$

Observación

Hemos demostrado que la ecuación $ax + by + c = 0$ representa siempre una recta, teniéndose los siguientes casos.

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$ entonces la recta es horizontal.
- Si $a \neq 0$ y $b = 0$ entonces la recta es vertical.
- Finalmente, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la recta es inclinada.

Ecuación de la recta, forma 1

Proposición

Sea $\mathscr{L} : ax + by + c = 0$ una recta donde $b \neq 0$ (es decir, no vertical). Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de la recta $\mathscr{L}$, distintos entre sí, entonces el cuociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es independiente de las coordenadas de los puntos A y B, y vale $\frac{a}{b}$.

Demostración.

Sabemos que

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0, \end{aligned}$$

luego restando se obtiene:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0,$$

de donde

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}.$$

□

Pendiente de una recta

Pendiente de una recta

Sea $\mathscr{L}$ una recta no vertical. Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes de $\mathscr{L}$, entonces al real $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se le llama pendiente de la recta $\mathscr{L}$.

Con la proposición demostrada anteriormente, se ve que la pendiente de una recta es única, es decir, no depende de los puntos empleados en su cálculo.

Ecuación de una recta, forma 2

La segunda forma de escribir la ecuación de una recta será dada a partir de la pediente.
Sea $\mathscr{L}$ la recta de pendiente m y que pasa por $A = (x_0, y_0)$.
La ecuación de $\mathscr{L}$ es de la forma $ax + by + c = 0$ con $b \neq 0$, es decir:

$$\mathscr{L} : \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0.$$

Pero $m = -\frac{a}{b}$ luego la ecuación queda:

$$\mathscr{L} : y - mx + \frac{c}{b} = 0.$$

Pero como $A \in \mathscr{L}$ entonces, $y_0 - mx_0 + \frac{c}{b} = 0$, de donde despejamos $\frac{c}{b} = mx_0 - y_0$, con lo cual la ecuación de la recta queda:

$$\mathscr{L} : y - mx - y_0 + mx_0 = 0,$$

es decir:

Ecuación de la recta forma 2

$$\mathscr{L} : (y - y_0) = m(x - x_0).$$

Ecuación de una recta, forma 3

La tercera forma de escribir la ecuación de una recta será dada a partir dedos puntos.

Sea $\mathscr{L}$ la recta que pasa por $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$

Si $x_1 = x_2$ entonces la ecuación de $\mathscr{L}$ es $\mathscr{L} : x = x_1$ o bien $\mathscr{L} : x = x_2$

Si $x_1 \neq x_2$ entonces lo más cómodo es calcular la pendiente y utilizar la fórmula deducida anteriormente. Es decir:

Ecuación de la recta forma 3

$$\mathscr{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ecuación de una recta, forma principal

Sea $\mathscr{L} : ax + by + c = 0$ una recta no vertical ($b \neq 0$). Sea m su pendiente. Entonces dividiendo por b la ecuación de $\mathscr{L}$ puede escribirse

$$\mathscr{L} : -mx + y + \frac{c}{b} = 0$$

o sea

$$\mathscr{L} : y = mx - \frac{c}{b},$$

donde llamamos $n = -\frac{c}{b}$, con lo cual la ecuación de la recta queda

Ecuación de la recta forma principal

$$\mathscr{L} : y = mx + n.$$

Observación

Es claro que el punto $(0, n)$ satisface la ecuación de la recta, luego el significado geométrico de la constante n corresponde a la altura donde la recta corta al eje OY.