Funciones Reales de Variable real

30 de marzo de 2007

Definición de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacios de naturaleza arbitraria. Una función de A en B es una correspondencia entre los elementos de A y los elementos de B de tal modo que a cada $x \in A$ se le hace corresponder un y sólo un elemento $y \in B$.

Notación

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Observación

En el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que la función es de variable real. Si además $B = \mathbb{R}$, entonces diremos que la función es real de variable real.
Es decir, las funciones reales de variable real son:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Elementos básicos de una función

- A se llama **dominio** de la función.
- $B = \mathbb{R}$, se llama **codominio** de la función.
- $y = f(x)$ se llama **imagen** de x por f o variable dependiente.
- x se llama **variable** de la función o variable independiente.

Observación

En nuestro caso una función puede especificarse dando sólo la ley $y = f(x)$ que permite calcular la imagen de x. Cuando esto suceda, entenderermos que el dominio de la función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la ley es aplicable para calcular $f(x)$, es decir:

$$\mathrm{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplos

- $f(x) = \frac{x}{x^2-1} \Longrightarrow \text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow \text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$.
- Si $f(x) = \sqrt{x + 2|x-5| - x^2 + |3x-2|}$
  entonces para determinar el dominio de f debe resolverse una inecuación con módulo.

Ejemplos

Observación

La ley de una función $(y = f(x))$ puede ser definida de multiples formas en cada una de ellas debe cumplirse la condición básica, que para x en el dominio de la función pueda calcularse una y sólo una imagen de x.

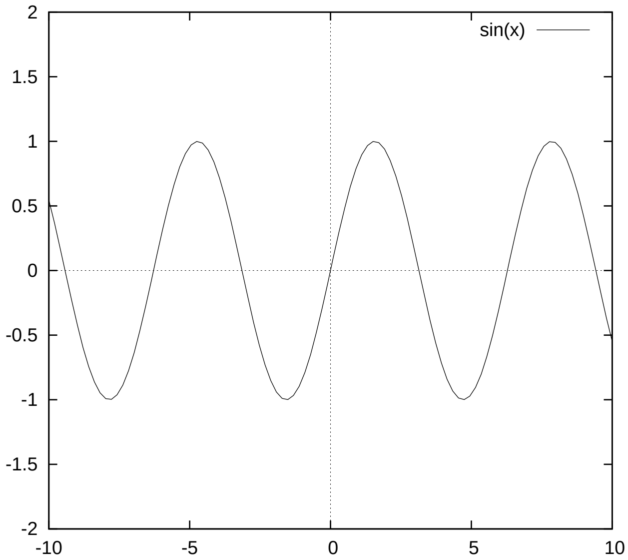
- $y = f(x)$ tal que $y + x^2 = 5$ corresponde a una función.
- $y = f(x)$ tal que $x^2 + y^2 = r^2$ **no** corresponde a una función.
- $y = f(x)$ tal que $y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 = r^2$ corresponde a una función **con** $\text{Dom}(f) = [-r.r]$.
- $y = f(x)$ tal que $y < 0 \wedge x^2 + y^2 = r^2$ corresponde a una función **con** $\text{Dom}(f) = (-r.r)$.

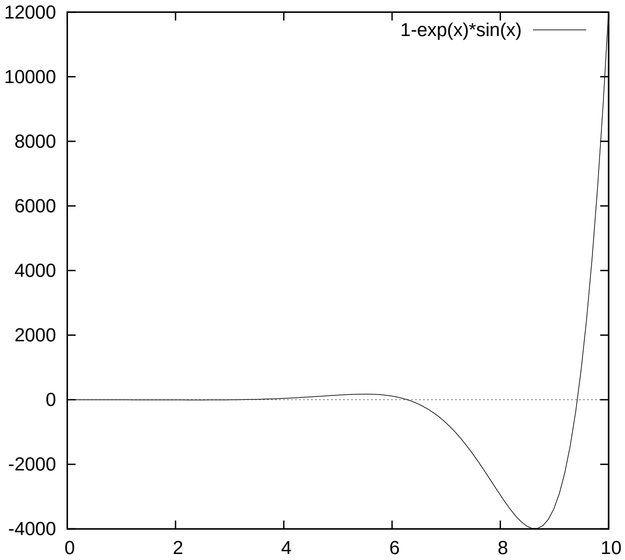
Gráfico de una función

Llamaremos **Gráfico de una función** f al conjunto de puntos del plano G_f definido por:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathrm{Dom}\ (f) \wedge y = f(x)\}.$$

Algunos ejemplos de gráficos:





Definiciones importantes

A continuación estudiaremos algunas propiedades, que pueden o no cumplir las funciones reales de variable real. De cumplirse algunas de estas propiedades, las funciones tomarán nombres especiales y esto se reflejará en características especiales de su gráfico.

Antes de comenzar, veamos un par de definiciones importantes:

Ceros de una función

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremos ceros de f a todos los reales de su dominio tales que $f(x) = 0$. En estos puntos el gráfico de f corta al eje OX.

Adicionalmente llamaremos $\cap$ con el eje Y al punto de cordenadas $(0, f(0))$.

Ejemplo: Los ceros de $f(x) = x(x-1)(x-2)$ son 0, 1 y 2.

Conjunto Imagen

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Llamaremos conjunto Imagen de f al conjunto definido por

$$\text{Im}\,(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R}/(\exists x \in A) \text{ de modo que } y = f(x)\}.$$

O sea

$$\text{Im}\,(f) = \{f(x)/x \in A\}.$$

Funciones Pares e Impares

Función par

Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par ssi

- $(\forall x \in A)\ -x \in A$.
- $(\forall x \in A)\, f(-x) = f(x)$.

Función impar

Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar ssi

- $(\forall x \in A)\ -x \in A$.
- $(\forall x \in A)\, f(-x) = -f(x)$.

Ejemplos

- $f(x) = 1$ tiene $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$ Luego la primera condición se cumple. Además $f(-x) = 1 = f(x)$. Luego f es par.
- $f(x) = x$ tiene $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$ Además $f(-x) = -x = -f(x)$. Luego f es impar.
- $f(x) = \sqrt{x}$ tiene $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, luego no cumple la primera condición, en consecuencia no es par ni impar.

Características de una función par o impar

- Si f es una función **par** entonces
$$(x, y) \in G_f \Rightarrow (-x, y) \in G_f.$$
Luego el gráfico de la función es simétrico con respecto al eje OY.
- Si f es una función **impar** entonces
$$(x, y) \in G_f \Rightarrow (-x, -y) \in G_f.$$
Luego el gráfico de la función es simétrico con respecto al origen O del sistema de coordenadas.
- En forma más general, puede observarse que el gráfico de una función será simétrico con respecto a una recta vertical de ecuación $x = \ell$ ssi se cumplen las siguientes condiciones:
    - $\ell + t \in \text{Dom}\,(f) \Longrightarrow \ell - t \in \text{Dom}\,(f)$.
    - $\ell + t \in \text{Dom}\,(f) \Longrightarrow f(\ell - t) = f(\ell + t)$.

Ejemplo

Como ejemplo veamos la siguiente función:

$$f(x) = |x - 5|$$

Es simétrica respecto de la recta $x = 5$ ya que

$$\begin{aligned} f(5-t) &= |(5-t)-5| = |-t| = |t| \\ f(5+t) &= |(5+t)-5| = |t| \end{aligned}$$

Para efectos prácticos, cuando una función es par, impar o presenta alguna simetría, entonces puede estudiarse sólo en una mitad de su dominio y luego construir su gráfico completo usando dicha simetría.

Funciones Periódicas

Función periódica

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f es **periódica** ssi $(\exists p \in \mathbb{R}^+)$ tal que :

- $(\forall x \in A)\ x + p \in A$.
- $(\forall x \in A)\ \ f(x+p) = f(x)$.

En este caso p se llama **periodo** de la función.

Periodo mínimo

Se llama periodo mínimo de la función f al real $\overline{p}$ tal que f es periódica de periodo $\overline{p}$ y, si f es periódica de periodo p, entonces $p \geq \overline{p}$.

Ejemplos

- $f(x) = a$ es periódica de periodo $p > 0,$ cualquiera. No tiene periodo mínimo.
- $f(x) = x - [x]$, donde $[x]$ es el mayor entero menor que x.
  Es periódica de periodo 1, 2 o 3. $p = 1$ es su periodo mínimo.

Observación

Cuando una función es periodica de periodo p, el estudio de su gráfico puede restringirse sólo a un intervalo de longitud p en su dominio y luego construir el gráfico total haciendo uso de la periodicidad.

Funciones Monótonas

Crecimiento de funciones

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Diremos que f es creciente en $B \subseteq A$ ssi $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Diremos que f es decreciente en $B \subseteq A$ ssi $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Adicionalmente agregaremos la palabra estrictamente cuando las desigualdades anteriores se satisfacean en forma estricta.

Si $B = A$ se dira que f es creciente o decreciente en lugar de decir que es creciente en A o decreciente en A.

Diremos que f es **monótona** ssi es o bien creciente o decreciente.

Observación

La negación de la frase $f(x)$ es creciente no es la frase f es decreciente ya que existen funciones crecientes y decrecientes a la vez y otras que no son ni crecientes ni decrecientes.

Funciones Acotadas

Función acotada

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Diremos que f es acotada inferiomente ssi $(\exists a \in \mathbb{R})$ tal que $(\forall x \in \text{Dom } f)\ a \leq f(x)$
- Diremos que f es acotada superiomente ssi $(\exists b \in \mathbb{R})$ tal que $(\forall x \in \text{Dom } f)\ f(x) \leq b$
- Diremos que f es acotada ssi $(\exists a, b \in \mathbb{R})$ tales que $(\forall x \in \text{Dom } f)\ a \leq f(x) \leq b$

Observaciones

- f es acotada superiormente ssi $\text{Im}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ lo es .
- f es acotada inferiormente ssi $\text{Im}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ lo es .
- f es acotada si lo es tanto superior como inferiormente.

Proposición

f es acotada $\iff$ $(\exists M \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \text{Dom } f)|f(x)| \leq M$

Observaciones adicionales

- Si f es acotada superior o inferiormente y $B \subseteq \text{Dom}\,(f)$ entonces se pueden determinar las siguientes expresiones:

$$\min_{x\in B} f(x) = \min\{f(x)/x \in B\}$$

$$\max_{x\in B} f(x) = \max\{f(x)/x \in B\}$$

Mínimo y máximo

Podemos decir que x_0 es **punto mínimo** de f si $x_0 \in \text{Dom}\,(f)$, y

$$(\forall x \in \text{Dom}\,(f))\ f(x_0) \leq f(x).$$

O, equivalentemente $x_0 = \min_{x\in \text{Dom}(f)} f(x)$.

De la misma manera, $x_0 \in \text{Dom}\,(f)$ es **punto máximo** de f si

$$(\forall x \in \text{Dom}\,(f))\ f(x_0) \geq f(x),$$

o, $x_0 = \max_{x\in \text{Dom}(f)} f(x)$.

Funciones conocidas

1. La función constante

Esta definida por $f(x) = a$.
Tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
$f(-x) = a = f(x)$, luego es una función par.
Si $a = 0$ entonces $f(-x) = -f(x) = 0$ luego sería también impar.
Si $a \neq 0$ entonces no tiene ceros, Si $a = 0$ todos los reales son sus ceros.
Su gráfico es la recta horizontal que pasa por $(0, a)$

2. La función potencia natural

Esta definida mediante la ecuación $f(x) = x^n$ donde $n \in \mathbb{N}$.
Tiene $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$.
Si $n = 1$ el gráfico es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante.
Si $n = 2$ el gráfico es una parábola.
Puesto que $f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f(x)$, luego es una función par si n es par y una función impar si n es impar.
Si $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $x^n \in \mathbb{R}^+$.
$(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in \mathbb{R}^+)\ y = f(x)$, luego $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$.

Funciones conocidas

3. La función raíz enésima

Esta definida mediante la expresión $f(x) = \sqrt[n]{x}$ donde $n \in \mathbb{N}$.
Esta función tiene variadas propiedades dependiendo de la paridad de n.
Su dominio depende de n:

- Si n es par entonces $\text{Dom}\,(f) = [0, \infty)$.
- Si n es impar entonces $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$.

Si n es impar entonces $f(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} = -f(x)$
Luego si n impar se trata de una función impar.
Si n par, por simetría respecto al eje Y, $\text{Im}\,(f) = [0, \infty)$.
Si n impar, por simetría respecto al origen O, $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R}$.

4. La función cajón o parte entera

Esta definida por: $f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z}/k \leq x\}$.
Tiene $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Im}\,(f) = \mathbb{Z}$.
Sus ceros son todos los reales en el intervalo $[0, 1)$.
No es una función par ni impar.
Es una función creciente, pero no de forma estricta.

Definiciones

5. Función opuesta

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Llamaremos función opuesta de f a la función $(-f)$ definida por:

$$-f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)(-f)(x) = -(f(x))$$

El gráfico de la función $(-f)$ es el conjunto simétrico con respecto al eje OX del gráfico de f.

6. Módulo de una Función

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Llamaremos función módulo de f a la función $|f|$ definida por:

$$|f| : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

El gráfico de la función módulo de f puede obtenerse fácilmente si se conoce el gráfico de f, ya que debe copiarse simétricamente respecto al eje OX los puntos del gráfico de f que queden bajo el eje OX y dejar intactos aquellos puntos que esten sobre el eje OX. Es decir, al tomar módulo a una función, su gráfico se refleja en el eje OX hacia el primer o segundo cuadrante.

7. Restricción de una función

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $B \subseteq A$. Se llama restricción de f a B a la función $f|_B$ definida por:

$$f|_B : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in B) f|_B(x) = f(x).$$

Algebra de Funciones.

Sean f y g dos funciones de Dominio D_f y D_g respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante fija. Definimos las funciónes suma, diferencia, ponderación, producto y cuociente por:

1. Función suma
$$f+g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f \cap D_g)(f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

2. Función Diferencia $f-g = f+(-g)$, es decir:
$$f-g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f \cap D_g)(f-g)(x) = f(x)-g(x).$$

3. Ponderación de una función
$$\lambda f : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f)(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

4. Función producto
$$f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in D_f \cap D_g)(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

5. Función cuociente
$$\frac{f}{g} : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } (\forall x \in A)\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
donde $A = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g / g(x) = 0\}$.

Observación

Con las definiciones dadas anteriormente pueden formarse funciones más complicadas, tomando módulo u operando las 4 funciones conocidas.

Por ejemplo se pueden formar las siguientes funciones:

- $f(x) = |x|$ que corresponde al módulo de la función $g(x) = x$, luego es la bisectriz del primer y segundo cuadrante.
- $f(x) = |x - a|$ es análoga a la anterior pero desplazada horizontalmente en a.
  Con esto se pueden resolver en forma sencilla inecuaciones como $|x - 2| + |x + 2| \leq 5$.

Otras funciones más importantes se dan en las siguientes definiciones.

Otras funciones importantes

Funciones polinmicas

Son de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
Donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes reales.

Estas funciones tienen siempre $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$. n se llama el grado.

Si $n = 1$ el gráfico corresponde a una recta.

Si $n = 2$ el gráfico es una parábola de eje vertical.

Si $n > 2$ el gráfico en general no es muy sencillo.

Funciones racionales

Son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$.
Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ salvo los puntos donde la función Q se anula, es decir:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : \ Q(x) = 0\}.$$

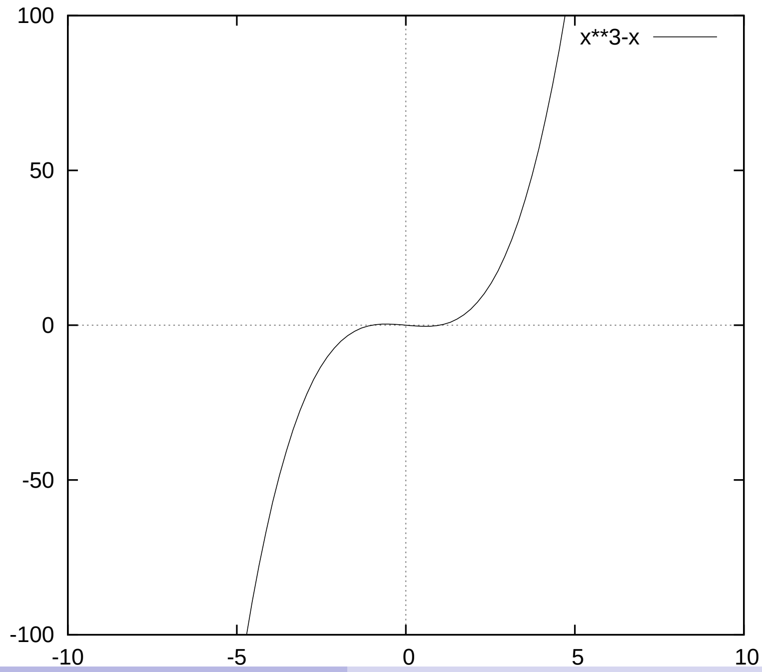
Ejemplos

- Consideremos la función polinómica $f(x) = x^3 - x$
  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
  $\text{Im } f = ?$
  Paridad: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ luego f es impar.
  Ceros: $f(x) = 0 \iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0$ luego los ceros son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

  Signos de la función:

$x \in (-\infty, -1)$	$f(x) < 0$
$x \in (-1, 0)$	$f(x) > 0$
$x \in (0, 1)$	$f(x) < 0$
$x \in (1, \infty)$	$f(x) > 0$

  Gráfico:



Ejemplos

- Consideremos la función racional $f(x) = \frac{1}{x-1}$
  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
  No tiene ceros.
  Signos de la función:

$x \in (-\infty, 1)$	$f(x) < 0$
$x \in (1, \infty)$	$f(x) > 0$

  Crecimiento de f: (por intervalos)

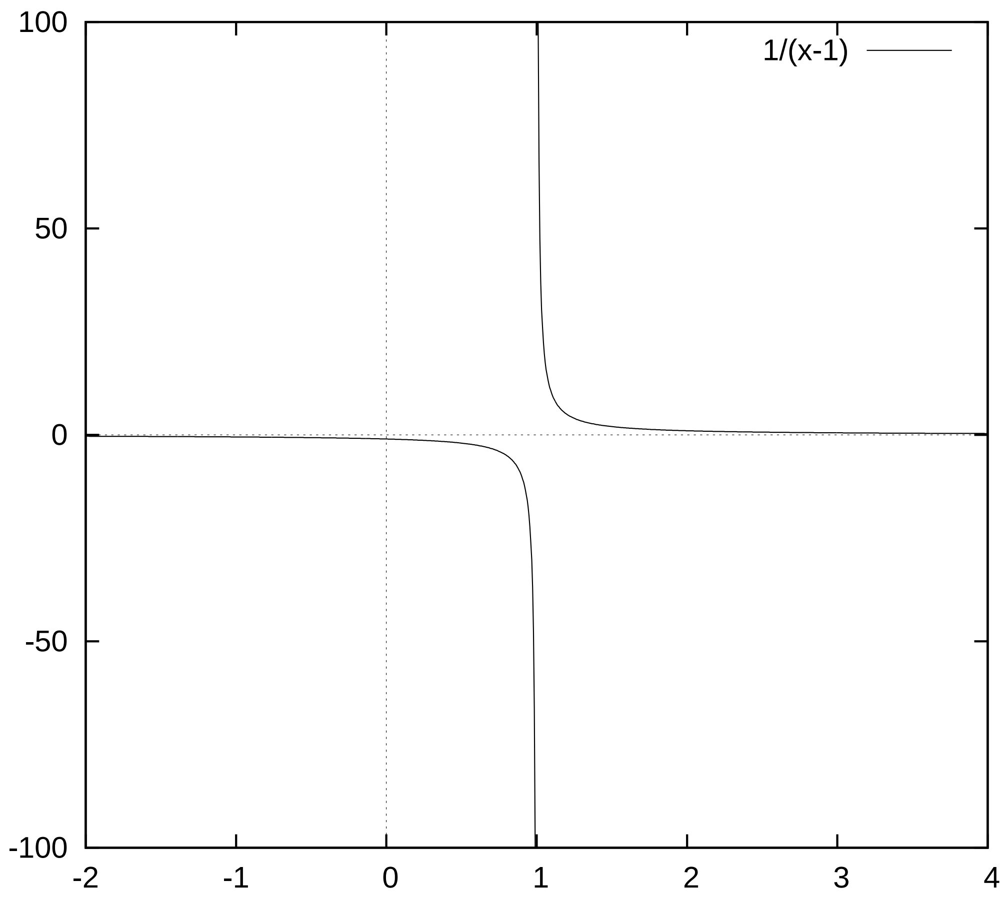
$$\begin{aligned} 1 < x_1 < x_2 &\implies 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ &\implies \frac{1}{x_2 - 1} < \frac{1}{x_1 - 1} \\ &\implies f(x-2) < f(x-1) \\ &\implies f(x-1) > f(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 < 1 &\implies x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \\ &\implies 1 - x_1 > 1 - x_2 > 0 \\ &\implies \frac{1}{1 - x_2} > \frac{1}{1 - x_1} \\ &\implies \frac{1}{x_2 - 1} < \frac{1}{x_1 - 1} \\ &\implies f(x-2) < f(x-1) \\ &\implies f(x-1) > f(x-2) \end{aligned}$$

Luego f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$ por separado.

Ejemplos

El gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es:



Asíntotas de una función racional

Asíntotas Verticales

Sea
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $x_1, x_2, \cdots x_r$ son todas las raices del Denominador, es decir de la función $Q(x)$ pero no del Numerador, o sea de la función $P(x)$, entonces las rectas $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_r$ se llaman **Asíntotas verticales** de la función $f(x)$ y se carecterizan por que para valores de x cercanos a dichos puntos la función crece o decrece sin cotas.

Asíntota Horizontal

Sea
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Si $n \leq m$ la recta $y = \frac{a_m}{b_m}$ se llama **asíntota horizontal** de la función f y se caracteriza por que para valores de x muy grandes o muy negativos los valores de $f(x)$ se aproximan a dicha recta.
Si $n < m$ entonces $a_m = 0$. Luego la asíntota horizontal es $y = 0$.

Observación

El concepto de asíntotas horizontales y verticales puede extenderse a funciones más generales, pero para formalizar este concepto deberemos esperar hasta el capítulo de Limite de Funciones.

Por el momento se trabajara con funciones racionales y algunas otras donde las asíntotas sean evidentes sin usar una definición rigurosa.

Ejemplo

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}$$

Tiene $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Asíntota horizontal: $y = 1$.
Asíntotas verticales: (postulantes $x = -1$ y $x = 1$).
Sin embargo $x = 1$ es raíz del numerador.
Además si $x \in \text{Dom }(f) \Longrightarrow f(x) = \frac{x-2}{x+1}$,
luego, si x está cerca de 1, la función ni crece ni decrece sin cota.
Por lo tanto la única asíntota vertical es $x = -1$.

Composición de Funciones

Recordemos que en general si A, B y C son conjuntos de naturaleza arbitraria y f, g son funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ entonces se define la composición de f y g como la función $g \circ f$ definida por $g \circ f : A \to C$ tal que $(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

En nuestro caso, dadas dos funciónes $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no siempre se cumple que $\text{Im}\,(f) \subseteq B$, luego la definición de la composición no siempre se puede hacer por este camino.

En consecuencia definiremos la composición simplemente mediante la ley, como se hace frecuentemente con las funciones reales de variable real, es decir

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

de modo que el dominio será

$$\text{Dom}\,(gof) = \{x \in \text{Dom}\,(f) \ : \ f(x) \in \text{Dom}\,(g)\}.$$

Funciones invertibles

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Cod}\,(f)$

- Diremos que f es **inyectiva** ssi $[f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$.
  Gráficamente esto equivale a decir que toda recta horizontal intersecta a lo más en un punto al gráfico de f.
- Diremos que f es **epiyectiva** ssi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Cod}\,(f)$
  Gráficamente esto equivale a decir que toda recta horizontal en el codominio de f intersecta al menos en un punto al gráfico de f.
- Diremos que f es **biyectiva** ssi f es inyectiva y epiyectiva.
  Gráficamente esto equivale a decir que toda recta horizontal en el codominio de f intersecta en exactamente un punto al gráfico de f.

Si f es biyectiva entonces $\forall y \in \mathrm{Cod}\,(f)$ el problema de encontrar $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tal que $y = f(x)$ tiene solución única.

Esto motiva la definición de una función llamada función inversa.

Función inversa

Función inversa

Sea $f : \text{Dom}(f) \to \text{Cod}(f)$ una función biyectiva. se define la función inversa de f como la función f^{-1} definida por:

$$f^{-1} : \text{Cod}(f) \to \text{Dom}(f) \text{ tal que } [y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)].$$

Observación

En el caso de funciones reales de variable real existen varias de ellas que no son inyectivas o no son epiyectivas y por lo tanto no tienen inversa. sin embargo, se puede contruir una función inversa por el siguiente metodo.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera no invertible.

- Se determina $B \subseteq A$ tal que $f|_B$ sea inyectiva.
- De igual modo se restringe el codomonio $\mathbb{R}$ a $\text{Im}(f|_B)$. Con esto $f|_B$ se hace biyectiva y luego invertible.