2.1 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Definición.

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real *x* le hace corresponder la potencia a^x se llama **función exponencial de base *a* y exponente *x*.**

Como $a^x > 0$ para todo $x \in \Re$,la función exponencial es una función de $\Re$ en $\Re^+$.

En el siguiente teorema, se presentan las propiedades más importantes de la función exponencial.

2.1.1 Teorema (Leyes de los Exponentes)

Sean *a* y *b* reales positivos y $x,y \in \Re$,entonces:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

6 . $\left[\dfrac{a}{b}\right]^{-x} = \left[\dfrac{b}{a}\right]^x$

Cuando *a* > 1 ,si *x* < *y*, entonces, $a^x < a^y$ .Es decir, cuando la base *a* es mayor que 1,la función exponencial
de base *a* es estrictamente creciente en su dominio.

Cuando 0 < *a* < 1, si *x* < *y* , entonces, $a^y < a^x$.

Esto significa que la función exponencial de base *a* < 1 es estrictamente decreciente en

su dominio.

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

10.Si 0< *a* < *b* ,se tiene:

$x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$

$x < 0 \Rightarrow a^x > b^x$.

Esta propiedad permite comparar funciones exponenciales de diferentes bases.

11. Cualquiera que sea el número real positivo y_0 ,existe un único número real x_0 tal que

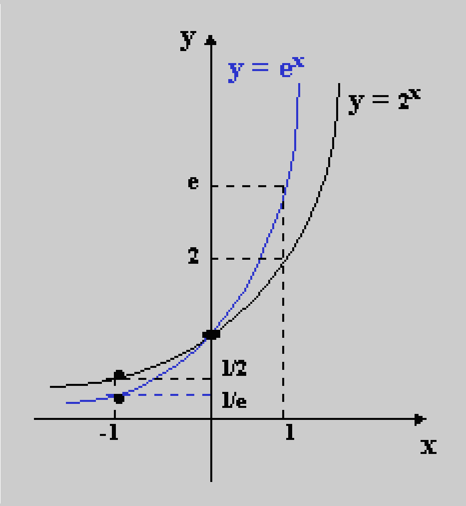
$a^{x_0} = y_0$. Esta propiedad indica que la función exponencial es sobreyectiva.

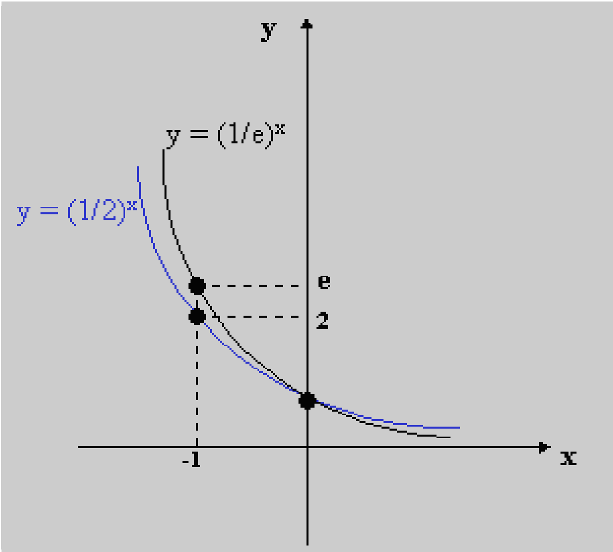
Cuando *x* e *y* son enteros, los propiedades enunciadas anteriormente pueden demostrarse usando las definiciones y el teorema 1. Para el caso en el cual *x* e *y* son racionales, la demostración utiliza la definición y el teorema 2. Para el caso general, es decir, cuando *x* e *y* son reales, la demostración utiliza elementos del análisis real.

2.1.2 Gráfica de la Función Exponencial

En relación con las propiedades 7 y 8, enunciadas en el teorema, es conveniente hacer algunos comentarios adicionales.

En primer lugar, en las figuras 1 y 2, aparecen las gráficas de algunas funciones exponenciales de base *a* > 1 (fig. 1) y de base *a* < 1 (fig. 2).





Note que cuando la base *a* es mayor que 1,la función exponencial $y = a^x$ (fig.1) no está acotada superiormente. Es decir , a^x crece sin límite al aumentar la variable *x*. Además, ésta función tiene al cero como extremo inferior. Esto es , a^x tiende a cero(0), cuando *x* toma valores grandes pero negativos.

Igualmente, cuando la base *a* < 1, la función exponencial $y = a^x$ (fig.2) no está acotada superiormente, pero su comportamiento para valores grandes de *x*, en valor absoluto, es diferente. Así, a^x crece sin límite, al tomar *x* valores grandes, pero negativos y a^x tiende a cero, cuando la variable *x* toma valores grandes positivos.

El hecho de ser la función exponencial a^x con *a* > 1, estrictamente creciente (estrictamente decreciente cuando 0 < *a* < 1), significa que la función exponencial es inyectiva en su dominio.Este hecho y la continuidad de la función son las condiciones que se exigen para garantizar la existencia de la función inversa (función logarítmica), que se presentan en la próxima sección.

En relación con la propiedad 9, en un sentido, se deduce fácilmente de la definición de función; y, en otro, del hecho de ser la función exponencial inyectiva.

Observación.

Cuando *a* = *e* ,donde *e* es el número irracional cuya representación decimal con sus primeras cifras decimales, es *e* = 2.7182818284….,la función exponencial e^x ,se llama: **función exponencial de base *e*** y, frecuentemente, se denota por **Exp(*x*) =** e^x **.**