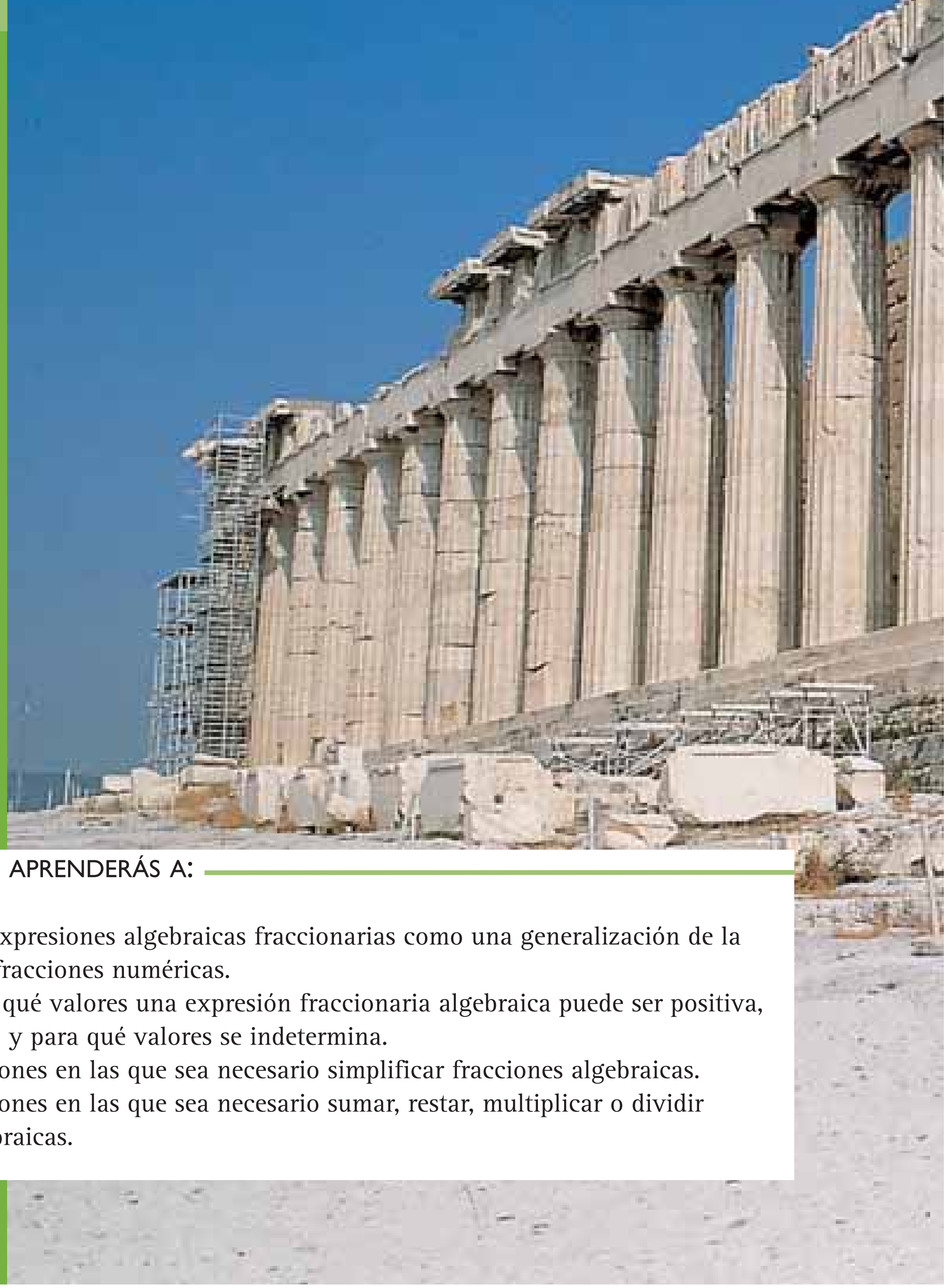
2 Unidad

Expresiones algebraicas fraccionarias



En esta unidad aprenderás a:

- Interpretar las expresiones algebraicas fraccionarias como una generalización de la operatoria con fracciones numéricas.
- Reconocer para qué valores una expresión fraccionaria algebraica puede ser positiva, negativa o cero, y para qué valores se indetermina.
- Resolver situaciones en las que sea necesario simplificar fracciones algebraicas.
- Resolver situaciones en las que sea necesario sumar, restar, multiplicar o dividir fracciones algebraicas.

Conversemos de:

Los antiguos griegos eran conocidos por buscar la perfección en todas las cosas. El Partenón de Atenas, templo ubicado en la Acrópolis, dedicado a la diosa Atenea y considerado el monumento más importante de la civilización griega antigua, está construido de manera que el largo y ancho de la base forman un rectángulo que consideraban ideal. Es un rectángulo tal que, si se quita el mayor cuadrado posible, se obtiene un nuevo rectángulo, cuyos lados están en la misma proporción que el rectángulo original. Esta relación entre los lados del rectángulo se puede expresar como:

$$\frac{x+1}{x} = x$$

- ¿Has visto alguna vez una expresión como esta?
- ¿Existe algún valor de x que satisface tal relación?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Para qué valores de x está definida la fracción del lado izquierdo?
- Intenta dibujar un rectángulo que cumpla con esta condición.

¿Cuánto sabes?

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve en tu cuaderno.

1. Resuelve los siguientes ejercicios con fracciones y simplifica cada vez que sea necesario.

a. $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)-\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)\right)$

b. $\frac{4}{5}-8+\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}+\frac{7}{10}\right)$

c. $\frac{2}{5}+\frac{8}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}+\frac{9}{7}$

d. $5+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{9}{6}\cdot\frac{3}{2}-2+\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}$

e. $\frac{1}{9}-\frac{9}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}-\left(\frac{6}{4}-2+\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{4}-5\right)$

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. La adición de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.

b. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a} = 0$

c. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{a} = b$

d. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a \cdot b}{a} = b$

e. $\frac{1}{0}$ existe.

f. La multiplicación de fracciones cumple con las propiedades conmutativa y asociativa.

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a. $2x^6 + 5x^6$

b. $5y^2 - y^2$

c. $3x^3 \cdot 5x^4$

d. $6a^2 : 4a^3$

e. $\left(\frac{4a}{5b}-5a^2-3b\right)-\left(\frac{7}{4b}-6b+\frac{3a}{b}\right)$

f. $\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{7}a-\frac{5}{3}b^5-3b^3+\frac{2}{9}ab\right)-\left(\frac{5}{6}b-\frac{6}{5}b^3-\frac{9}{10}a^2-5ab\right)$

g. $(ab + 2b - c) \cdot (3a^2 - c)$

h. $(5xy - 3x^2) \cdot (3y^2 - yx)$

i. $\left(\frac{6}{x^3}-x+\frac{3x}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}-x^2\right)$

Compara tus respuestas con las de tus compañeras y compañeros. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿Qué debes recordar?

- Para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.
- Para sumar o restar fracciones con distinto numerador, se puede amplificar o simplificar hasta obtener fracciones equivalentes con igual denominador y, luego, sumarlas o restarlas.
- Al multiplicar fracciones, se obtiene una fracción cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores, y cuyo denominador, al producto de los denominadores.

  En general, si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

- Para dividir fracciones, se puede multiplicar la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda.

  En general, si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

- Algunas factorizaciones y productos notables son:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	(cuadrado de binomio)
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	(suma por su diferencia)
$x^2 + (a + b) \cdot x + ab = (x + a) \cdot (x + b)$	(producto de dos binomios con un término común)
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	(cubo de binomio)
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$	(suma y diferencia de cubos)

Fracciones algebraicas

Ana debe trotar cuatro vueltas a la pista de atletismo de su colegio. Su desempeño es como sigue: se demora t segundos en dar la primera vuelta, luego trota más rápido, demorándose $t - 10$ segundos en la segunda, pero cerca del final se cansa un poco, y se demora $t - 5$ segundos en la tercera vuelta y $t + 5$ segundos en dar la última vuelta.

Analicemos...

- Si la distancia recorrida en una vuelta es a, ¿qué expresión permite calcular la rapidez con que recorrió cada vuelta?
- ¿En qué vuelta trotó a mayor rapidez y en qué vuelta a menor rapidez?

Recuerda que...

- *La rapidez es el cuociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.*

$$v = \frac{d}{t}$$

- *Los elementos de una fracción son:*

a → *Numerador*
b → *Denominador*

Glosario

Álgebra: *rama de la matemática en la cual las operaciones aritméticas se generalizan empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática.*

Expresión algebraica fraccionaria (o fracción algebraica): *expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son expresiones algebraicas, con $b \neq 0$.*

Si los datos de la situación anterior se organizan en una tabla, se obtiene:

	Distancia recorrida	Tiempo	Rapidez
Primera vuelta	a	t	$\frac{a}{t}$
Segunda vuelta	a	$t - 10$	$\frac{a}{t - 10}$
Tercera vuelta	a	$t - 5$	$\frac{a}{t - 5}$
Cuarta vuelta	a	$t + 5$	$\frac{a}{t + 5}$

Luego, las expresiones $\frac{a}{t}$, $\frac{a}{t - 10}$, $\frac{a}{t - 5}$ y $\frac{a}{t + 5}$ representan la rapidez de Ana en cada vuelta. Expresiones como las anteriores son llamadas **expresiones algebraicas fraccionarias** o simplemente **fracciones algebraicas**.
Observa que corresponden a cuocientes entre expresiones algebraicas.
Tal como en las fracciones, se llama numerador y denominador a cada parte de la fracción algebraica.
Ahora, considerando que una pista de atletismo tiene 400 m se puede remplazar este valor por a, y suponiendo que en la primera vuelta Ana se demoró 80 s, se obtiene:

Primera vuelta: $\frac{a}{t} = \frac{400}{80} = 5$ Rapidez: 5 m/s

Segunda vuelta: $\frac{a}{t - 10} = \frac{400}{70} = 5{,}71$ Rapidez: 5,71 m/s

Tercera vuelta: $\frac{a}{t - 5} = \frac{400}{75} = 5{,}33$ Rapidez: 5,33 m/s

Cuarta vuelta: $\frac{a}{t + 5} = \frac{400}{85} = 4{,}7$ Rapidez: 4,7 m/s

Luego, Ana trotó con mayor rapidez durante la segunda vuelta, y con menor rapidez en la última vuelta.

En tu cuaderno

1. **Calcula cuál sería la rapidez de Ana en cada vuelta suponiendo ahora que en la primera vuelta se demora:**

a. 1 minuto. **b.** 1 minuto y 10 segundos. **c.** un minuto y medio.

- En cada caso, ¿en qué vueltas se tienen la mayor y menor velocidad?
- ¿Existe alguna diferencia con el ejemplo? De ser así, ¿en qué casos cambian?

2. **Determina el valor de las siguientes fracciones algebraicas si n = 1, 2, 3, 4, 5:**

a. $\dfrac{1}{n+1}$

b. $\dfrac{3-2n}{5n}$

c. $\dfrac{n^2-1}{2n+7}$

d. $\dfrac{4n-1}{2n}$

e. $\dfrac{2+n^2}{n^3+1}$

f. $\dfrac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$

3. **Observa el siguiente ejemplo:**

Las fracciones $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, ...$, son generadas por la fracción algebraica $\dfrac{n}{2n+1}$, porque se obtienen al remplazar n = 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

Encuentra la fracción algebraica que genera las siguientes fracciones en cada caso:

a. $\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{9}{16}, \dfrac{16}{25}, \dfrac{25}{36}, ...$

b. $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{18}, -\dfrac{1}{27}, ...$

c. $\dfrac{2}{2}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{10}{28}, \dfrac{17}{65}, \dfrac{26}{126}, ...$

d. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, -\dfrac{3}{10}, \dfrac{4}{17}, -\dfrac{5}{26}, ...$

En resumen

Dadas dos expresiones algebraicas representadas por p y q, con $q \neq 0$, llamaremos expresión algebraica fraccionaria o **fracción algebraica** a toda expresión de la forma $\dfrac{p}{q}$.

Ejemplo:

Las expresiones $\dfrac{2}{n-1}$ y $\dfrac{n+1}{3n^2-n+9}$ son fracciones algebraicas.

Comparación de fracciones algebraicas

Dos socios discuten acerca de unos cambios que desean realizar en un terreno rectangular cuyo largo mide b m y su área es de a m^2. Uno de ellos quiere aumentar el área en 1 m^2 sin cambiar el largo, pero el otro quiere aumentar el largo del terreno en 1 m sin cambiar el área, y necesitan determinar en qué caso es mayor el ancho del terreno.

Analicemos...

- ¿En qué caso se obtiene una medida mayor del ancho del terreno?
- ¿Cómo se puede determinar el nuevo ancho del terreno en cada caso?
- ¿Cómo se pueden comparar las nuevas medidas del ancho?

Para poder comparar las dos propuestas y decidir en qué caso se obtiene mayor ancho, considera que el ancho original del terreno es igual a $\frac{a}{b}$ m.

El primer socio desea aumentar el área total en 1 m^2, y como el largo sigue siendo igual a b m, la nueva medida del ancho es $\frac{a+1}{b}$ m.

El segundo socio quiere aumentar el largo en 1 m, y mantener el área total. Por tanto, en este caso la nueva medida del ancho es $\frac{a}{b+1}$ m.

Glosario

Desigualdad: *expresión matemática que sirve para representar que cierta cantidad es menor o mayor que otra.*

Dado que en este caso $a > 0$ y $b > 0$, ya que son medidas de área y de longitud, debemos comparar cuál de estas fracciones es mayor.

En el primer caso, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+1}{b}$, ambas son de igual denominador (positivo), pero el numerador de la segunda fracción es mayor (ya que a también es positivo), de modo que:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b}$$

Recuerda que...

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

En el segundo caso, al comparar con el ancho original se tienen fracciones con igual numerador, pero el denominador de la tercera fracción es mayor, por tanto tenemos la relación:

$$\frac{a}{b+1} < \frac{a}{b}$$

Luego, se verifica la relación:

$$\frac{a}{b+1} < \frac{a+1}{b}$$

Entonces, el ancho del terreno es mayor con la modificación propuesta por el primer socio.

En otros casos, el valor de una fracción algebraica depende de solo una variable, y es necesario analizar los casos posibles. Observa.

1. Si $n > 0$, se tiene que $\frac{n+1}{n} > \frac{n-1}{n}$.

2. Considera $n < 0$, se tiene ahora la relación $\frac{n+1}{n} < \frac{n-1}{n}$.

   Sea $n = -k$, $k > 0$, luego al remplazar se tiene:

   $\frac{n+1}{n} = \frac{-k+1}{-k} = \frac{k-1}{k}$, $\frac{n-1}{n} = \frac{-k-1}{-k} = \frac{k+1}{k}$

   Y como $k > 0$ se tiene ahora $\frac{k-1}{k} < \frac{k+1}{k}$, es decir, $\frac{n+1}{n} < \frac{n-1}{n}$.

Recuerda que...

- *Para a, b, c, d, números naturales, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ es equivalente a $ad < bc$.*
- *Al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un factor negativo, esta se invierte.*

  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \rightarrow \frac{-a}{b} < \frac{-c}{d}$ *con $b, d \neq 0$*

En resumen

Para **comparar** fracciones algebraicas, observa que:
- Si las expresiones son positivas y ambas fracciones tienen igual denominador, es mayor la fracción de mayor numerador.
- Si las expresiones son positivas y ambas fracciones son de igual numerador, es mayor la fracción de menor denominador.
- Si alguna de las expresiones es negativa, se debe tener cuidado y analizar caso a caso, ya que las desigualdades pueden cambiar.

En tu cuaderno

1. Compara las fracciones según los valores dados en cada caso.

a. $\frac{a}{a+b}, \frac{a}{a-b}, a > 0, b > 0, a > b.$

b. $\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q+1}, p > 0, q > 0.$

c. $\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q+1}, -1 < p < 0, q > 0.$

d. $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a-b}, a > 0, b > 0, a < b.$

2. Determina, para cada caso, cuál de las fracciones $\frac{x+a}{x}$, $\frac{x}{x-a}$ es mayor:

a. $x > 0, a > 0, x > a.$

b. $x > 0, a > 0, x < a.$

c. $x > 0, a < 0, x < -a.$

d. $x > 0, a < 0, x > -a.$

Análisis de fracciones algebraicas

Además de ordenar dos o más fracciones algebraicas, también es importante decidir qué tipo de valores puede tomar una fracción algebraica, dependiendo de los valores de la o las variables. Por ejemplo, considera la fracción: $\frac{x-1}{x}$

ANALICEMOS...

- ¿Qué ocurre con la fracción algebraica dada cuando $x = 1$?, ¿ocurrirá esto para otro valor?
- Si $x < 0$, ¿qué signo tiene el numerador?, ¿qué signo tiene el denominador?, ¿y la fracción?
- En el caso de que $x > 1$, ¿qué signo tiene la fracción?, ¿por qué?
- ¿Para qué valores de x la fracción es siempre negativa?, ¿cómo lo calculaste?

RECUERDA QUE...

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Para analizar cómo cambia el signo de una fracción algebraica, se debe recordar que el signo de una fracción depende del signo del numerador y del denominador. Si tienen igual signo, la fracción es positiva, y cuando tienen distinto signo, la fracción es negativa.
En este caso, el numerador es positivo si $x > 1$ y negativo si $x < 1$. Por otra parte, el denominador es positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$. Entonces, al considerarlos simultáneamente, se obtiene que la fracción es positiva si $x > 1$ y si $x < 0$, y negativa si $0 < x < 1$.

Si la fracción algebraica tiene más de una variable, se deben analizar todos los casos posibles.

GLOSARIO

Se dice que una expresión matemática se ***anula*** *en cierto valor, si al evaluarla en ese valor la expresión tiene valor 0.*

Considera, por ejemplo, la fracción $\frac{a}{b+1}$. Antes de determinar qué tipo de valores toma, se debe determinar para qué valores se anulan el numerador y denominador.
En este caso, esto ocurre para $a = 0$ y para $b = -1$, respectivamente. Entonces, para analizar la fracción no se consideran estos valores, pero son importantes para separar los casos que se van a analizar.

Observa el análisis de la fracción $\frac{a}{b+1}$:

- Si $a > 0$ y $b > -1$, tanto el numerador como el denominador son positivos, de modo que la fracción toma valores positivos.
- Si $a > 0$ y $b < -1$, el numerador es positivo, pero el denominador es negativo, y la fracción toma valores negativos.
- Si $a < 0$ y $b > -1$, el numerador es negativo, pero el denominador es positivo, y la fracción nuevamente toma valores negativos.
- Si $a < 0$ y $b < -1$, tanto el numerador como el denominador son negativos, y por lo tanto la fracción toma valores positivos.

RECUERDA QUE...

Al dividir números de igual signo se obtiene un cuociente positivo, y al dividir números de distinto signo se obtiene un cuociente negativo.

Finalmente, para $a = 0$, si $b \neq -1$, el valor de la fracción es cero, ya que el valor del numerador es cero.

En conclusión, la fracción toma valores positivos cuando $a > 0$, $b > -1$, y cuando $a < 0$, $b < -1$; en cambio, toma valores negativos para $a > 0$, $b < -1$, y para $a < 0$, $b > -1$, y toma el valor cero cuando $a = 0$ y $b \neq -1$.

En resumen

Para analizar los valores que toma una fracción algebraica, se debe considerar para qué valores se anulan el numerador y el denominador. Luego, se separan los casos en que cada variable es mayor o menor que estos valores hallados, para compararlos y determinar el signo de la fracción.

En tu cuaderno

1. Determina para qué valores de x las siguientes fracciones son positivas:

a. $\dfrac{3x-1}{x+2}$ **c.** $\dfrac{x}{7x+2}$ **e.** $\dfrac{x^2+4}{7-x}$

b. $\dfrac{x+3}{2x+1}$ **d.** $\dfrac{4x-9}{5x}$ **f.** $\dfrac{x^2+25}{(4-x)^2}$

2. ¿Cuáles de las siguientes fracciones son siempre positivas para todo $x > 1$?

a. $\dfrac{3x-1}{x+3}$ **c.** $\dfrac{3-x}{2-7x}$ **e.** $\dfrac{x-12}{8-x}$

b. $\dfrac{x-1}{7-x}$ **d.** $\dfrac{3x-1}{x+2}$ **f.** $\dfrac{3x-1}{1-x^2}$

3. Determina los valores que pueden tomar m y n, de manera que las siguientes fracciones sean negativas:

a. $\dfrac{3m-1}{2-n}$ **b.** $\dfrac{n+1}{11-m}$ **c.** $\dfrac{2m-1}{5+n^2}$

Restricciones en fracciones algebraicas

Pedro y Pablo necesitan analizar la fracción algebraica $\frac{x+1}{x}$. Quieren saber cuándo se obtienen valores positivos y negativos de esta expresión.

Analicemos...

- Si x es un número real cualquiera, ¿cómo son los valores que se obtienen para la expresión dada?, ¿positivos o negativos?, ¿enteros o decimales? Justifica tus respuestas..
- ¿Existen valores que hacen indefinida esta expresión?, ¿cuál o cuáles?
- ¿Cómo se describe lo que ocurre para estos casos?

Para diversos valores de x, Pedro y Pablo obtienen la siguiente tabla:

Valor de x	−10	−4	−2	−1	−0,5	−0,1	0	0,1	0,5	1	2
$\frac{x+1}{x}$	$\frac{-9}{-10}$	$\frac{-3}{-4}$	$\frac{-1}{-2}$	$\frac{0}{-1}$	$-\frac{0,5}{0,5}$	$-\frac{0,9}{0,1}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1,1}{0,1}$	$\frac{1,5}{0,5}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$
Cuociente	0,9	0,75	0,5	0	−1	−9		11	3	2	1,5

Glosario

*Una fracción algebraica está **indefinida** para un cierto valor de una variable si su denominador se anula para tal valor y el numerador es distinto de 0.*

Si $a \neq 0$, $\frac{a}{0}$ está indefinida.

Según los valores que aparecen en la fila de los cuocientes, se observa que:

- Cuando $x = -1$, el valor de la expresión es 0.
- Si x es positivo y cercano a 0, el cuociente es cada vez mayor.
- Si x es positivo y lejano a 0, el cuociente es un número cercano a 1.
- Si x es negativo y cercano a 0, el cuociente es cada vez menor.
- Si x es negativo y lejano a 0, el cuociente es un número cercano a 1.
- Cuando $x = 0$, la expresión se indefine, y se dice que tiene una restricción.

En resumen

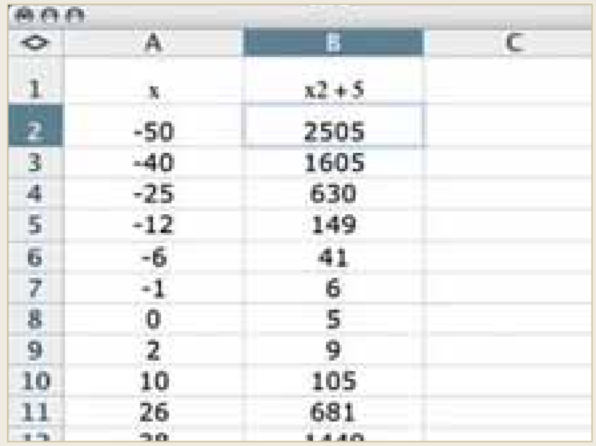
Para el análisis de expresiones algebraicas fraccionarias, es importante considerar valores distintos, positivos y negativos, grandes y pequeños. Además, se debe distinguir si la expresión se indefine y los valores para los cuales se anula.

Herramientas tecnológicas

En esta actividad, aprenderás cómo analizar expresiones algebraicas y obtener sus valores utilizando una planilla de cálculo como Excel.

Primero, debes familiarizarte con el procedimiento para escribir fórmulas, y la manera de remplazar valores en ellas. Considera, por ejemplo, la fórmula $x^2 + 5$.

- Selecciona en la celda **A2** y escribe un número real.
- A continuación, al lado escribe la fórmula, escribiendo en lugar de x la celda en la que escribiste tu número. Es decir, escribe como fórmula **= A2^2 + 5**.
- Aparecerá el resultado de remplazar en la fórmula el valor escrito antes.



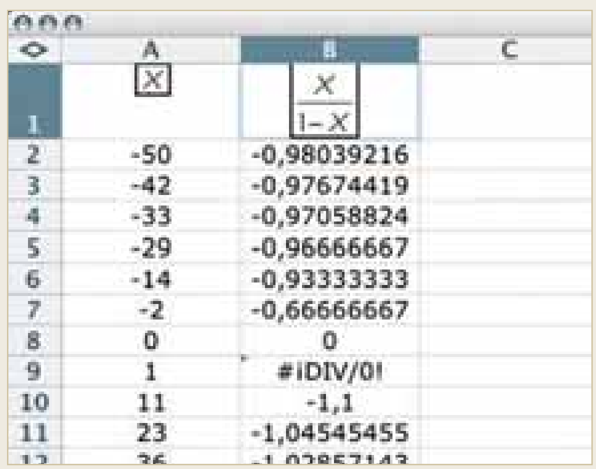
	A	B	C
1	x	x2 + 5	
2	-50	2505	
3	-40	1605	
4	-25	630	
5	-12	149	
6	-6	41	
7	-1	6	
8	0	5	
9	2	9	
10	10	105	
11	26	681	

Ahora estás en condiciones de analizar fracciones algebraicas. Como ejemplo considera la expresión $\frac{x}{1 - x}$.

En una planilla de cálculo como Excel, haz lo siguiente:

- En la columna **A** escribe, hacia abajo, una serie de números, los cuales pueden ser enteros, fraccionarios, positivos o negativos. Para anotar fracciones, anota en la celda correspondiente, por ejemplo **=5/7**.
- Luego, en **B1** escribe lo siguiente: **=A1/(1–A1)**, ya que con esto ingresarás la fórmula; al terminar, aprieta **enter**. El número que aparece es el resultado de remplazar en la expresión el valor escrito en **A1**.

A continuación, copia el resultado que aparece en **B1** de manera que aparezca abajo de cada valor escrito anteriormente. Lo que hace la planilla de cálculo es copiar la fórmula escrita (en este caso, la fracción algebraica) y mostrar el resultado inmediatamente. Si aparece el mensaje **#¡DIV/0!**, el valor al que acompaña es una restricción para x.



	A	B	C
1	x	$\frac{x}{1-x}$	
2	-50	-0,98039216	
3	-42	-0,97674419	
4	-33	-0,97058824	
5	-29	-0,96666667	
6	-14	-0,93333333	
7	-2	-0,66666667	
8	0	0	
9	1	#¡DIV/0!	
10	11	-1,1	
11	23	-1,04545455	

Ejercicios

Repite el procedimiento anterior de análisis, indicando los valores de x para los cuales las expresiones son positivas, negativas o cero, además de los puntos donde la expresión no está definida.

1. $\frac{2x}{1 - x^2}$
2. $\frac{1 - 2x}{x - 4}$
3. $\frac{4x - 5}{x^2 + 2}$

Simplificación de fracciones algebraicas

Mario y Valeria discuten acerca del siguiente problema: se les pide simplificar la expresión $\dfrac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}$ y no están de acuerdo en cómo resolverlo.
Él realiza lo siguiente:

$$\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}=\frac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}$$

Analicemos...

- ¿Es correcto lo que hizo Mario?, ¿se puede seguir simplificando?, ¿cómo?
- Valeria simplificó la expresión y obtuvo $\dfrac{3(x-1)}{4(x+3)}$. ¿Es correcto?, ¿por qué?

Para simplificar la expresión anterior, se pueden simplificar primero los factores numéricos comunes en el numerador y denominador. Para esto, se divide por 4, el máximo común divisor entre 12 y 16.

Entonces:

$$\frac{12x^2-12}{16(x+3)(x+1)}=\frac{\cancel{12}(x^2-1)}{\cancel{16}(x+3)(x+1)}=\frac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}$$

A continuación, se debe determinar si existen factores algebraicos iguales en el numerador y denominador para simplificar. Luego, se debe factorizar también el numerador:

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

y se tiene que:

$$\frac{3(x^2-1)}{4(x+3)(x+1)}=\frac{3\cancel{(x+1)}(x-1)}{4(x+3)\cancel{(x+1)}}=\frac{3(x-1)}{4(x+3)}\quad \text{con } x\neq -1$$

Como ahora no hay factores comunes en el numerador y denominador, la fracción es irreducible, cuya restricción para x es $x \neq -3$ y $x \neq -1$.

Por lo tanto, ambos tuvieron razón al decir que había que simplificar por números, pero Valeria tuvo razón al observar que, además, había que encontrar factores algebraicos comunes.

Glosario

Factor de un número: *es un divisor del número.*
Factorizar: *expresar un número o una expresión algebraica como producto de dos o más números o expresiones algebraicas, llamados factores.*

Recuerda que...

*Una **fracción irreducible** es aquella cuyo numerador y denominador no poseen divisores comunes, distintos de 1.*

En resumen

Para **simplificar** fracciones algebraicas, se puede factorizar completamente el numerador y el denominador y revisar si existen factores numéricos y/o algebraicos comunes en el numerador y el denominador, y si existen, dividir por estos, obteniendo una fracción algebraica irreducible.
Finalmente, si es necesario, se deben indicar las restricciones para los valores que pueda tomar x.

Ejemplos:

1. $\dfrac{3x-18}{x^2-5x-6} = \dfrac{3\cancel{(x-6)}}{\cancel{(x-6)}(x+1)} = \dfrac{3}{x+1}$, con $x \neq -1$, $x \neq 6$

2. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+7x-30} = \dfrac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+10)} = \dfrac{x-2}{x+10}$ con $x \neq -10$, $x \neq 3$

En tu cuaderno

1. Simplifica las siguientes fracciones, indicando las restricciones, si las hubiera:

a. $\dfrac{2x-4}{(x-2)(x+9)}$

b. $\dfrac{x^2-x-20}{7x+28}$

c. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

d. $\dfrac{x^2-a^2+x+a}{x^2+2ax+a^2}$

e. $\dfrac{x-(a-y)}{(a-y)^2-x^2}$

f. $\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}$

g. $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$

h. $\dfrac{5a^3-a^2}{a^5-2a^3}$

i. $\dfrac{3(25-x^2)}{(x^3-125)}$

2. Encuentra el valor de las siguientes expresiones fraccionarias sin desarrollarlas, como en el ejemplo:

Ejemplo: $\dfrac{1+(0,6)^3}{1+0,6} = \dfrac{\cancel{(1+0,6)}\left(1^2+1\cdot(0,6)+(0,6)^2\right)}{\cancel{(1+0,6)}} = 1+0,6+0,36 = 1,96$

a. $\dfrac{(0,7)^3-(0,3)^3}{(0,7)^2-(0,3)^2}$

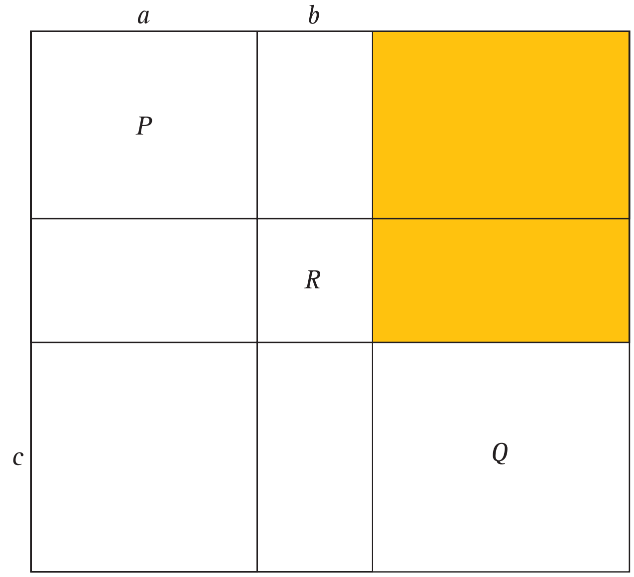
b. $\dfrac{8(1,1)^2-6(1,1)+1}{2(1,1)-1}$

c. $\dfrac{(0,21)^2+3(0,21)+2}{(0,21)^2-1}$

d. $\dfrac{(3,1)^2-(3,1)}{(3,1)^2-2(3,1)+1}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Considera la siguiente figura:



Analicemos...

- ¿Cuál es el área pintada en función de las áreas P, Q y R, sabiendo que $c = 3a$, $2b = a$ y $R = \frac{P}{2}$?, ¿cómo lo resolviste?
- Para multiplicar fracciones algebraicas, ¿se procede igual que con las fracciones numéricas?
- Si no es igual, ¿qué cambia en este procedimiento?

Como primer paso, se deben determinar las medidas del largo y el ancho del rectángulo pintado. Primero, se determina el ancho:

$$\text{Ancho} = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{3a}$$

Luego, se calcula el largo, que es igual al cuociente de P sobre a, más el cuociente de R sobre b, de modo que se tiene:

$$\text{Largo} = \frac{P}{a} + \frac{R}{b} = \frac{P}{a} + \frac{P}{2b} = \frac{P}{a} + \frac{P}{a} = \frac{2P}{a}$$

Finalmente, el área del rectángulo se obtiene calculando el largo por el ancho hallados:

$$\text{Área} = \frac{Q}{3a} \cdot \frac{2P}{a} = \frac{2PQ}{3a^2}$$

EN RESUMEN

Para multiplicar dos fracciones algebraicas, se calcula de manera similar que para multiplicar fracciones numéricas.
Primero, se factorizan los numeradores y los denominadores en ambas fracciones; luego, se simplifican por los factores comunes que existan, tanto numéricos como algebraicos; y, finalmente, se multiplican los términos restantes.

Ejemplos:

1. $\dfrac{10x}{3y} \cdot \dfrac{9y}{2} = \dfrac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot x}{\cancel{3} \cdot \cancel{y}} \cdot \dfrac{3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{y}}{\cancel{2}} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot x}{1} = 15x$, con $y \neq 0$

2. $\dfrac{5}{4x} \cdot \dfrac{12x}{7} \cdot \dfrac{21}{25y} = \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{4} \cdot \cancel{x}} \cdot \dfrac{3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{x}}{\cancel{7}} \cdot \dfrac{\cancel{7} \cdot 3}{5 \cdot \cancel{5} \cdot y} = \dfrac{3 \cdot 3}{5 \cdot y} = \dfrac{9}{5y}$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$

3. $\dfrac{a-b}{a+3} \cdot \dfrac{a^2+a-6}{a^3-b^3} = \dfrac{\cancel{a-b}}{\cancel{a+3}} \cdot \dfrac{(a-2)\cancel{(a+3)}}{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)} = \dfrac{a-2}{a^2+ab+b^2}$, con $a \neq -3$ y $a \neq b$

4. $\dfrac{1-x}{2-y} \cdot \dfrac{y^2-4}{x^3-1} = \dfrac{-\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(y-2)}} \cdot \dfrac{\cancel{(y-2)} \cdot (y+2)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x^2+x+1)} = \dfrac{y+2}{x^2+x+1}$, con $x \neq 1$ e $y \neq 2$

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones. Simplifica cuando sea posible.

a. $\dfrac{3(x-a)}{9-a^2} \cdot \dfrac{(a-3)(5-x)}{x^2-a^2}$

b. $\dfrac{x^2+5}{3-3x} \cdot \dfrac{x^3-1}{2+2x+2x^2}$

c. $\dfrac{a-b}{a+b} \cdot \dfrac{b-a}{b^2}$

d. $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x+1} \cdot \dfrac{x^3+1}{x-1} \cdot \dfrac{x+1}{x^3-x^2+x}$

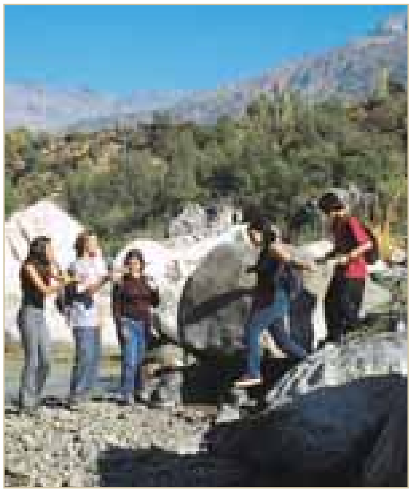
e. $\dfrac{m^2+5m-14}{2(m-8)^2} \cdot \dfrac{7m-28}{3m+21}$

f. $\dfrac{(m+2)^2}{m-3} \cdot \dfrac{1}{11m+22} \cdot \dfrac{5m-15}{3m-3}$

g. $\dfrac{x-3}{x-2} \cdot \dfrac{y+1}{xy^3} \cdot \dfrac{(xy)^2}{x-3}$

h. $\dfrac{w^5-w}{x^3y^6-1} \cdot \dfrac{x^2y^4+xy^2+1}{w^3-w^2+w-1}$

División de fracciones algebraicas



Aprovechando el buen tiempo, un grupo de amigos fue de excursión. Al terminar el paseo, sacaron de su mochila un envase cilíndrico lleno de agua. A continuación, sacaron vasos cilíndricos más pequeños, cuya altura era la tercera parte de la altura del envase y cuyo radio era la mitad del radio del envase.

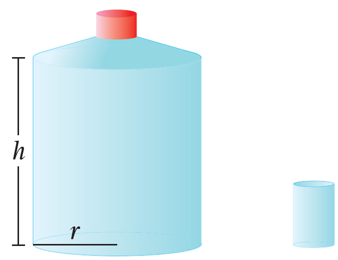
Analicemos...

- ¿Cuántos vasos se podían servir?, ¿cómo lo calculaste?
- Para poder dividir fracciones algebraicas, ¿se procede igual que en la división con fracciones numéricas?
- Si no se procede de igual manera, ¿qué cosas cambian en el procedimiento?

Recuerda que...

Para dividir una fracción por otra, se debe multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Observa la relación entre el tamaño del envase y el de un vaso.



Si se llama r al radio y h a la altura del envase, entonces los vasos tienen altura igual a $\frac{h}{3}$ y radio igual a $\frac{r}{2}$. Luego, se debe resolver la operación:

$$\pi r^2 h : \left[\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\left(\frac{h}{3}\right)\right] =$$

Para resolverla, se puede transformar en una multiplicación de fracciones, cuyo segundo término es el inverso multiplicativo del divisor. Observa.

$$\pi \cdot r^2 \cdot h : \left[\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{3}\right)\right] = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \frac{2^2 \cdot 3}{\pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Simplificando por los factores comunes en numeradores y denominadores, y multiplicando los demás términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}\pi \cdot r^2 \cdot h : \left[\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{3}\right)\right] &= \cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \cdot \cancel{h} \cdot \frac{2^2 \cdot 3}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \cdot \cancel{h}} \\ &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 12\end{aligned}$$

Luego, el contenido del envase alcanza para servir 12 vasos de esas medidas.

Según cómo se factorice cada fracción, se puede simplificar antes de multiplicar. Observa los siguientes ejemplos.

1. $\dfrac{10x^2}{3y} : \dfrac{20xy}{9} = \dfrac{10x^2}{3y} \cdot \dfrac{9}{20xy} = \dfrac{\cancel{10} \cdot \cancel{x} \cdot x}{\cancel{3} \cdot y} \cdot \dfrac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{10} \cdot 2 \cdot \cancel{x} \cdot y} = \dfrac{3x}{2y^2}$, con $x \neq 0$ e $y \neq 0$

2. $\dfrac{7y}{3x^3} : \dfrac{14}{x^2} = \dfrac{7y}{3x^3} \cdot \dfrac{x^2}{14} = \dfrac{\cancel{7} \cdot y}{3 \cdot \cancel{x^2} \cdot x} \cdot \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{7} \cdot 2} = \dfrac{y}{6x}$, con $x \neq 0$

3. $\dfrac{-2a}{a+3} : \dfrac{6}{5a+15} = \dfrac{-2a}{a+3} \cdot \dfrac{5a+15}{6} = \dfrac{\cancel{2} \cdot (-a)}{\cancel{a+3}} \cdot \dfrac{5 \cdot \cancel{(a+3)}}{\cancel{2} \cdot 3} = \dfrac{-5a}{3}$, con $a \neq -3$

4. $\dfrac{a-b}{a-2} : \dfrac{a^3-b^3}{a^2+a-2} = \dfrac{a-b}{a-2} \cdot \dfrac{a^2+a-2}{a^3-b^3}$

$= \dfrac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-2}} \cdot \dfrac{(a+1)\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)} = \dfrac{a+1}{a^2+ab+b^2}$, con $a \neq 2$ y $a \neq b$

En resumen

Para dividir dos fracciones algebraicas, se procede de manera similar que para la división de fracciones numéricas; es decir, se transforma en una multiplicación de fracciones, en la cual el segundo término corresponde al inverso multiplicativo del divisor.

En tu cuaderno

1. Resuelve las siguientes divisiones de fracciones algebraicas y simplifica cuando sea posible. Indica las restricciones en cada caso.

a. $\dfrac{m^2-8m-1008}{m+4} : \dfrac{3m+84}{7m+28}$

b. $\dfrac{x^2-x^4y}{1+6z^2} : \dfrac{y-x^2y^2}{1-36z^4}$

c. $\dfrac{x^2-4x}{x^2-25} : \dfrac{x^2-16}{x^3-10x^2+25x}$

d. $\dfrac{15}{a^{12}-1} : \dfrac{3}{a^8-1}$

e. $\dfrac{b(x-a)}{cb^2-a^2} : \dfrac{b^3x^2-b^3a^2}{c^2b^4-a^4}$

f. $\dfrac{x^5y-xyw}{w^2yz-5w^2x^2} : \dfrac{x^3y-5xy}{7wx^2-35w}$

g. $\dfrac{a^2c^2+2}{a^6b^6-2a^3b^3-3} : \dfrac{a^4c^4-4}{a^3b^3+1}$

h. $\dfrac{z^4+z^2-42}{za^2-7} : \dfrac{z^2+7}{z^2a^4-49}$

Mi progreso

1. Ordena las siguientes fracciones algebraicas de menor a mayor. Considera todas las variables con valores positivos.

a. $\dfrac{3a}{2b}, \dfrac{3a-1}{2b}, \dfrac{6a-1}{4b}$ **b.** $\dfrac{1}{b+1}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{2}{2b+1}$ **c.** $\dfrac{3b-1}{6b}, \dfrac{2b-1}{4b}, \dfrac{1}{2}$

2. Determina los valores de x para los cuales se anulan las siguientes fracciones algebraicas. Luego, determina los valores para los cuales quedan indefinidos.

a. $\dfrac{3x-1}{7x}$ **b.** $\dfrac{x^2-1}{x+2}$ **c.** $\dfrac{x(x^2-25)}{6x-7}$ **d.** $\dfrac{6x^2+5}{x^2+2}$

3. Determina los valores de x para los cuales las siguientes fracciones algebraicas son positivas:

a. $\dfrac{4x-2}{x+5}$ **b.** $\dfrac{x-7}{2-x}$ **c.** $\dfrac{1}{x^2-1}$ **d.** $\dfrac{x}{x^2-x-6}$

4. Calcula las siguientes multiplicaciones de fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{3x-1}{7x}\cdot\dfrac{6x^3}{3x^2-4x+1}$ **b.** $\dfrac{3a^2-1}{6a-4}\cdot\dfrac{9a^2-4}{a^2-1}$ **c.** $\dfrac{4a^4(a-1)}{6a-4}\cdot\dfrac{a^2+a+1}{6a^4-6}\cdot\dfrac{9a^2-9}{a^6-a^3}$

5. Calcula las siguientes divisiones de fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{21x-14}{14x}:\dfrac{35}{3x^4-4x^3+x^2}$ **b.** $\dfrac{a-b}{a+b}:\dfrac{b-a}{b^2}$ **c.** $\dfrac{x^2+5x}{1-x}:\dfrac{x^3-1}{x+2x^2}$

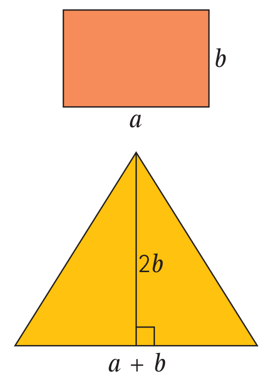
¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

Criterio	Pregunta	Ejercicios correctos
Ordenar fracciones algebraicas.	1	____ / 3
Determinar para qué valores se anula una fracción algebraica y queda indefinida.	2	____ / 4
Determinar para qué valores una fracción algebraica es positiva.	3	____ / 4
Resolver multiplicaciones de fracciones algebraicas.	4	____ / 3
Resolver divisiones de fracciones algebraicas.	5	____ / 3

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas

Diego recibió de regalo un tablero separado en dos partes, cada una con bloques triangulares y rectangulares iguales entre sí. Como es curioso, notó que la altura de los triángulos era el doble del largo del rectángulo y que la base de los triángulos medía la suma del largo y del ancho del rectángulo.



Analicemos...

- Si hay suficientes bloques de cada forma como para cubrir una misma área, ¿cuál es la menor área que puede cubrirse con bloques de una misma forma?
- ¿Es posible encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) de expresiones algebraicas de la misma forma que en el caso numérico?, ¿por qué?

En la situación anterior, se debe determinar cuál es la menor área que puede cubrirse con bloques de una misma forma.
Considera que a es el largo y b el ancho del rectángulo. Entonces, la base del triángulo mide $a + b$, y la altura del triángulo es igual a $2b$.
Ahora, observa cómo calcular el área de cada figura:

Área del rectángulo: $a \cdot b = ab$

Área del triángulo: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot 2b = ab + b^2$

Ahora, se calcula el mcm de ambas expresiones. Una buena idea es factorizar cada una de las expresiones, y buscar su mcm. En este caso, se obtiene como factores a, b y $(a + b)$. Por lo tanto, el mcm de ab y de $b(a + b)$ es igual a $ab(a + b)$. Luego, a triángulos cubren la misma área que $(a + b)$ rectángulos.

Como debe ser el menor de los múltiplos comunes, hay que fijarse en los factores para no considerar más factores de los necesarios. Observa.

1. Encuentra el mcm de $a^2 - ab$ y $a^2 - b^2$. Factorizando:

   $a^2 - ab = a \cdot (a - b)$

   $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

   Los factores que contienen son a, $(a - b)$ y $(a + b)$, y por tanto el mcm es $a \cdot (a - b) \cdot (a + b) = a^3 - ab^2$.

2. Encuentra el mcm de $a^2 - 10a + 21$ y $a^2 - 9$. Factorizando:

   $a^2 - 10 + 21 = (a - 3) \cdot (a - 7)$

   $a^2 - 9 = (a - 3) \cdot (a + 3)$

   Los factores que contienen son $(a - 7)$, $(a - 3)$ y $(a + 3)$, y por tanto el mcm es $(a - 7)(a - 3)(a + 3)$.

Recuerda que...

El área de un rectángulo de lados x e y es $x \cdot y$.

El área de un triángulo de base b y altura h es $\frac{b \cdot h}{2}$.

Glosario

Múltiplos de un número: *números que se obtienen al multiplicar el número dado por otro.*
Mínimo común múltiplo (mcm): *entre dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de ellos.*

3. Encuentra el mcm de $4a^2 - 16ab + 16b^2$ y $2a^2 - 8b^2$. Factorizando:

$$4a^2 - 16ab + 16b^2 = 4 \cdot (a^2 - 4ab + 4b^2) = 2^2 \cdot (a - 2b)^2$$

$$2a^2 - 8b^2 = 2 \cdot (a^2 - 4b^2) = 2 \cdot (a + 2b) \cdot (a - 2b)$$

Los factores que se obtienen son 2, $(a - 2b)$ y $(a + 2b)$, y el mcm es $4(a - 2b)^2(a + 2b)$.

En resumen

Para encontrar el mcm de expresiones algebraicas, se sugiere factorizar cada expresión, si es posible, y luego multiplicar todos los factores encontrados. Si hay algún factor que se repite, se elige el de exponente mayor.

En tu cuaderno

1. Encuentra el mcm de las expresiones:

a. $8x^3, 4x^2, 12x$

b. ax^3, bx^4y, a^2xb

c. $a - 1, a^2 - 1, (a - 1)^2$

d. $a + 2, a^3 + 8, a^2 - 4$

e. $10 - 20x, 4x^2 - 20, x - 2$

f. $a^2 - 13a + 30, a^2 - 100, a^2 - 9$

g. $9x + 6y, 3x + 2y, 9x^2 + 12xy + 4y^2$

h. $x^2 + 6x + 9, x^2 - x - 12, x^2 - 16$

2. Amplifica por el factor necesario para igualar los denominadores en las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{z^3a - b}{zc + d}, \dfrac{a^3 - z^2}{(zc - d)^2}$

b. $\dfrac{z^3}{ab - cx}, \dfrac{a^3 - z^2}{ax - c}$

c. $\dfrac{abx - 54}{x^3 - 1}, \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

d. $\dfrac{a^2 - b}{c^3}, \dfrac{a^3 - z^2}{a^2bc^3}, \dfrac{cd - z}{b^2a}$

Adición de fracciones algebraicas

Se requiere terminar la construcción de un edificio, y solamente falta pintar su interior, para lo cual se contrata a dos grupos con igual cantidad de trabajadores, todos de igual eficiencia y con la misma cantidad de horas de trabajo diario. El segundo grupo comenzará a trabajar algunos días después que el primero.

Analicemos...

- Si al comienzo solamente trabaja el primer grupo, ¿qué fracción del trabajo total logran hacer diariamente cada uno de ellos y en conjunto?
- Si el segundo grupo debe pintar la superficie, menos 1 000 metros cuadrados que le corresponden a la primera, ¿qué parte del trabajo realiza a partir de este momento?
- ¿Qué parte del trabajo diario realizan ambos grupos a partir del momento que ingresa el segundo de ellos a trabajar?

En la situación anterior, no se sabe la cantidad de trabajadores que se van a contratar, entonces se pueden asignar variables. Sea N la cantidad de metros cuadrados que se deben pintar al interior del edificio, h la cantidad de hombres que conforman cada grupo y n la cantidad de metros cuadrados que puede pintar cada uno de los trabajadores del primer grupo al día. De esta manera, cada uno de ellos hace una fracción del trabajo igual a $\frac{n}{N}$, y por lo tanto, el primer grupo hace diariamente una fracción del trabajo igual a $h \cdot \frac{n}{N} = \frac{hn}{N}$.

Para el segundo grupo, se debe notar que no pueden trabajar sobre 1 000 metros cuadrados que corresponden al primero. De modo que cada trabajador del segundo grupo realiza al día una fracción igual a $\frac{n}{N-1000}$, y, por tanto, el trabajo realizado por el segundo grupo es igual a $\frac{hn}{N-1000}$.

A partir del momento que ingresa el segundo grupo, el trabajo diario realizado por ambos grupos es igual a $\frac{hn}{N} + \frac{hn}{N-1000}$. Para reducir a una fracción, se amplifica cada fracción para tener el mismo denominador, que en este caso es $N(N - 1\,000)$:

$$\frac{hn}{N} = \frac{hn(N-1000)}{N(N-1000)} \qquad \frac{hn}{N-1000} = \frac{hnN}{N(N-1000)}$$

Es decir, el trabajo en conjunto hecho diariamente es igual a:

$$\frac{hn}{N} + \frac{hn}{N-1000} = \frac{hn(N-1000)+hnN}{N(N-1000)} = \frac{2hnN-1000hn}{N(N-1000)} = \frac{2hn(N-500)}{N(N-1000)}.$$

Que corresponde a la parte que realizan ambos grupos cuando comienzan a trabajar juntos.

Recuerda que...

Para sumar fracciones de igual denominador, simplemente se suman los numeradores.

Cuando se suman fracciones algebraicas, el procedimiento es similar al que se aplica en las fracciones numéricas. Observa.

1. $\frac{3b}{4}+\frac{7b}{10}=\frac{3b\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{7b\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{15b+14b}{20}=\frac{29b}{20}$

2. $\frac{3}{2x^2-4xy}+\frac{5}{2x}=\frac{3}{2x\cdot(x-2y)}+\frac{5\cdot(x-2y)}{2x\cdot(x-2y)}=\frac{3+5x-10y}{2x\cdot(x-2y)}$

En resumen

Para sumar fracciones algebraicas, debemos ver si sus denominadores son iguales. De no ser así, debemos encontrar fracciones equivalentes de denominador igual al mínimo común hallado. Finalmente, se suman los numeradores de las fracciones equivalentes halladas.

En tu cuaderno

1. Valoriza las fracciones correspondientes al trabajo diario realizado por cada grupo por separado y en conjunto en el ejemplo de la página anterior para:

a. $h = 10$, $n = 18$, $N = 3\,000$ **b.** $h = 20$, $n = 15$, $N = 4\,000$ **c.** $h = 15$, $n = 15$, $N = 4\,500$

2. Resuelve las siguientes adiciones de fracciones algebraicas:

a. $\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{3xz}$

b. $\frac{x^2}{x^4-16}+\frac{3}{x^2+4}$

c. $\frac{x-d}{x+d}+\frac{x^2+2xd-3d^2}{x^2-d^2}$

d. $\frac{3x-1}{3x+3}+\frac{8x}{2x(x+1)}$

e. $\frac{1}{x^2+xy}+\frac{2}{xy+y^2}+\frac{1}{x}$

f. $\frac{4}{3x+9}+\frac{x}{x^2-9}+\frac{2}{3x-9}$

g. $\frac{x}{9x^2-3x-2}+\frac{x}{3x+1}+\frac{x}{3x-2}$

h. $\frac{1}{1-x^3}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x}{x^2+x+1}$

3. Se requiere llenar un estanque usando dos llaves, una de las cuales demora las tres cuartas partes del tiempo (en minutos) que se demora la otra.

a. Determina la parte del estanque que llenan ambas por minuto.

b. Intenta calcular cuántos minutos demoran ambas llaves en llenar el estanque.

Sustracción de fracciones algebraicas

A medida que pasan los días, el personal a cargo de la construcción ha quedado satisfecho con el trabajo de ambos grupos, de modo que comienzan a comparar el trabajo realizado por cada grupo y a sacar conclusiones.

Analicemos...

- Si el segundo grupo comenzó a trabajar dos semanas después del primero y trabajan cinco días por semana, ¿qué parte del trabajo llevan después de cuatro semanas de trabajo?
- ¿Cuánto más de avance tendrían en el caso que ambos grupos hubiesen comenzado a trabajar al mismo tiempo?
- ¿Cuántos días menos habrían tardado en terminar la obra si ambos grupos comenzaban a trabajar juntos?

Dado que el primer grupo comenzó a trabajar solo durante dos semanas, el trabajo diario realizado por este grupo es igual a $\frac{hn}{N}$, luego, al pasar cuatro semanas (20 días de trabajo), ha hecho $\frac{20hn}{N}$ del trabajo total. Hasta entonces, el segundo grupo ha trabajado durante dos semanas (10 días), y como al día realizan $\frac{hn}{N-1\,000}$ del trabajo, a la fecha han hecho $\frac{10hn}{N-1\,000}$ del trabajo total. De modo que, el trabajo de ambos grupos juntos es:

$$\frac{20hn}{N}+\frac{10hn}{N-1\,000}=\frac{20hn(N-1\,000)}{N(N-1\,000)}+\frac{10hnN}{N(N-1\,000)}=\frac{10hn(3N-2\,000)}{N(N-1\,000)}$$

En el caso de que ambos grupos empezaran a trabajar al mismo tiempo, cada día realizarían $\frac{2hn(N-500)}{N(N-1\,000)}$ del total, y durante las cuatro semanas hubiesen realizado $\frac{40hn(N-500)}{N(N-1\,000)}$ del trabajo total.

Por lo tanto, la diferencia de avance entre el caso que ambos comienzan al mismo tiempo menos el trabajo efectivamente realizado en las cuatro semanas es igual a:

$$\frac{40hn(N-500)}{N(N-1\,000)}$$

Que corresponde a la fracción de trabajo que realizaría el segundo grupo durante los días que no pudo estar presente.

Recuerda que...

El signo menos, cuando está antes de un paréntesis, indica que al momento de eliminar el paréntesis, los signos + y – que estaban dentro de este cambian.

$$-(a+b-c)=-a-b+c$$

En resumen

Para restar fracciones algebraicas, se siguen los mismos pasos de la adición; es decir, se busca el mcm de los denominadores y se transforman en fracciones equivalentes con denominador igual al mcm hallado. Luego, se restan los numeradores.

Ejemplos:

1. $\frac{3x}{5} - \frac{6x}{11} = \frac{3x \cdot 11}{5 \cdot 11} - \frac{6x \cdot 5}{11 \cdot 5} = \frac{33x - 30x}{55} = \frac{3x}{55}$

2. $\frac{3}{a-5} - \frac{6}{a^2-25} = \frac{3 \cdot (a+5)}{(a-5) \cdot (a+5)} - \frac{6}{a^2-25} = \frac{3a+9}{a^2-25}$

En tu cuaderno

1. Valoriza las fracciones correspondientes al trabajo hecho por ambos grupos a la fecha y en el caso que hubieran comenzado al mismo tiempo en el ejemplo de la página anterior, para:

a. $h = 20$, $n = 16$, $N = 4\,000$

b. $h = 15$, $n = 15$, $N = 4\,500$

c. $h = 25$, $n = 20$, $N = 5\,000$

2. Resuelve las siguientes sustracciones de fracciones algebraicas:

a. $\frac{x+yz}{4x^2} - \frac{2y}{18xz}$

b. $\frac{x}{1-x^2} - \frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x^2+2x+1}$

c. $\frac{1}{2a+2} - \frac{2}{4a-1} - \frac{a}{a^2-a}$

d. $\frac{x}{x^2+2x-3} - \frac{x-3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

e. $\frac{1}{x^2-2x-3} - \frac{2}{x+3} - \frac{x}{6-2x}$

f. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x+2}{x-1} - \frac{x}{x+1}$

g. $\frac{(1+x)}{1-x^6} - \frac{5x+25}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$

h. $\frac{1}{w} - \frac{w-1}{w+2} - \frac{w+2}{w-1} - \frac{w}{w^2-1}$

Ecuaciones que involucran fracciones algebraicas

Lee atentamente el siguiente enunciado:

¿Qué número debe sumarse al numerador y restarse del denominador de la fracción $\frac{13}{31}$ y simultáneamente restarse del numerador y sumarse al denominador de $\frac{52}{47}$ para que las fracciones resultantes sean equivalentes?

Analicemos...

- ¿Cómo se traduce el enunciado en fracciones algebraicas?
- ¿Cómo se puede escribir la incógnita y los datos conocidos?
- Compara la ecuación con un compañero o compañera, ¿cuál de las ecuaciones obtenidas es más sencilla?
- ¿Existe una única manera de expresar la ecuación?, ¿por qué?
- ¿Cómo se puede resolver la ecuación planteada?

Para responder este enunciado, se puede plantear una ecuación. Observa que, si se asigna la incógnita x al número buscado, la ecuación que lo representa es:

$$\frac{13 + x}{31 - x} = \frac{52 - x}{47 + x}$$

$$(13 + x) \cdot (47 + x) = (52 - x) \cdot (31 - x)$$

$$611 + 60x + x^2 = 1\,612 - 83x + x^2$$

$$143x = 1\,001$$

$$x = 7$$

En el caso de las ecuaciones con incógnitas en el denominador, al finalizar se debe verificar la pertinencia de la solución obtenida. Es decir, que el número obtenido realmente resuelva el enunciado o situación planteada. En este caso:

$$\frac{13 + 7}{31 - 7} = \frac{52 - 7}{47 + 7}$$

$\frac{20}{24} = \frac{45}{54}$, que son fracciones equivalentes, luego, la solución es correcta.

Recuerda que...

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

No olvides que...

Además de verificar si la solución efectivamente satisface la ecuación, debe verificarse que ninguna de las fracciones de la ecuación se indefina en el valor de la solución.

En resumen

Para resolver ecuaciones que involucran fracciones algebraicas, se procede de manera similar a las ecuaciones con coeficientes fraccionarios, esto es, se puede transformar la ecuación en una con coeficientes enteros, multiplicando cada miembro de ella por el mcm de los denominadores de las fracciones algebraicas.

En tu cuaderno

1. Escribe los siguientes enunciados como una ecuación:

a. Halla un número tal que su séptima parte, más la tercera parte de su inverso multiplicativo, sea igual al número más 4.

b. Halla un número tal que la diferencia entre la tercera parte del número y la cuarta parte de su inverso multiplicativo sea igual al doble, del número aumentado en 3.

c. Encuentra un número tal que la diferencia entre su cuadrado y el doble de su inverso multiplicativo sea igual a 3.

2. Plantea las ecuaciones que representan los siguientes problemas y, luego, resuélvelas:

a. Halla un número que sumado a 21 veces su inverso multiplicativo da como resultado 10.

b. Un número es tal que la mitad de este es igual a 8 veces su inverso multiplicativo. ¿Cuál es el número?

c. Un número es tal que la novena parte de 5 veces el número, aumentada en 1, es igual a 3 veces la sexta parte del número menos 2. ¿Cuál es el número?

3. Resuelve las siguientes ecuaciones para la incógnita x:

a. $\dfrac{3x-5}{2x}=\dfrac{39}{x}$

b. $\dfrac{3}{4x}+\dfrac{13}{x}=\dfrac{4}{x}$

c. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x^2-4}=0$

d. $5x-\left(5x-\dfrac{2x-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$

e. $-\dfrac{24}{5}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}}$

f. $\dfrac{1}{m}-\dfrac{n}{x}=\dfrac{1}{mn}-\dfrac{1}{x}$, $mn \neq 0$

g. $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{x+3}{4x^2-1}$

h. $\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{x+b}{b}-2$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

i. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=5$

j. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2+2x+4}=\dfrac{x^2}{x^3-8}$

Situaciones que involucran fracciones algebraicas

Un acuario requiere ser llenado mediante un par de llaves ubicadas en uno de sus costados. Se sabe que ambas llaves juntas llenan el acuario en tres horas y que una de las llaves sola se demora la mitad de tiempo que la otra llave sola.

Analicemos…

- ¿Cuánto tiempo demora cada una de las llaves por separado?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Qué tipo de expresiones determinan los tiempos de cada una de las llaves?
- ¿Qué operaciones se requieren para resolver el problema?

En la situación anterior, para determinar el tiempo en horas que demora cada llave para llenar el acuario, se asigna la variable x, tiempo (en horas) que necesita la primera llave para llenar el acuario.

Por las condiciones del problema, se tiene:

$2x$ = tiempo (en horas) que tarda la segunda llave en llenar el acuario.

Además, se debe saber qué parte del acuario llena cada llave por separado por unidad de tiempo (en este caso, una hora). De este modo, se tiene:

$$\text{la llave } A \text{ llena } \frac{1}{x} \text{ del acuario;}$$

$$\text{la llave } B \text{ llena } \frac{1}{2x} \text{ del acuario.}$$

Y por tanto, la fracción que llenan ambas llaves juntas en una hora es igual a la suma de cada una de las partes:

$$A + B = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\right) \text{ del acuario}$$

Por otro lado, ambas llaves llenan el acuario en 3 horas, es decir, en una hora llenan $\frac{1}{3}$ del acuario. Entonces, se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2x} &= \frac{1}{3} \\ 2x &= 9 \\ x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera llave demora cuatro horas y media en llenar el acuario sola, y la segunda lo hace en nueve horas.

En resumen

Para resolver un problema que involucra expresiones algebraicas fraccionarias, se debe reconocer la incógnita y plantear la ecuación según el contexto y las condiciones del problema.

En tu cuaderno

1. Plantea las ecuaciones y resuelve los siguientes problemas:

a. Determina qué número disminuido en sus $\frac{3}{8}$ equivale a su triple disminuido en 11.

b. La suma de la quinta parte de un número con los $\frac{3}{8}$ del número excede en 49 al doble de la diferencia entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ del número. Halla el número.

c. La edad de Juan es los $\frac{3}{5}$ de la de Marta, y si ambas edades se suman, la suma excede en 4 años al doble de la edad de Juan. Halla la edad de Juan.

d. El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Halla el número.

e. Escribe dos números consecutivos tales que los $\frac{4}{5}$ del mayor sean equivalentes al menor disminuido en 4.

f. Tenía cierta cantidad de dinero. Gasté \$ 2 000 y presté $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. Si ahora tengo \$ 1 000, ¿cuánto tenía al principio?

g. Después de gastar la mitad de lo que tenía y de prestar la mitad de lo que me quedó, tengo \$ 2 500. ¿Cuánto tenía al principio?

h. La edad de Marcos es $\frac{1}{3}$ de la edad de Karen, y hace 15 años la edad de Marcos era $\frac{1}{6}$ de la de Karen. ¿Cuáles son las edades actuales?

2. Escribe un problema que involucre expresiones algebraicas fraccionarias. Junto con un compañero o compañera, intercambien sus enunciados y cada uno plantee la ecuación correspondiente.

Mi progreso

1. Encuentra el mcm de:

a. $3a^2 - 12$, $14a - 28$, $a^2 + 5a - 14$

b. $a^2b^3 - 12ab$, $ab + a^2b^3$

c. $3(x-2)(x+1)$, $6(x+2)(x+1)$, $8(x-2)(x+2)$

d. $9x^2(x+1)$, $6x(x+2)$, $15(x+2)$

2. Resuelve las siguientes operaciones:

a. $\dfrac{1}{7x} + \dfrac{3}{x+1}$

b. $\dfrac{x-1}{x^2+2} + \dfrac{x^2}{(x^2+2)^2}$

c. $\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{x-2}{x^2-9}$

d. $\dfrac{x+5}{x+1} - \dfrac{x-5}{x-1}$

e. $\dfrac{9}{x(x+1)} - \dfrac{5}{(x+1)^2}$

f. $\dfrac{9x-1}{x^3+1} - \dfrac{1}{x+1}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\dfrac{3x^2+7x-1}{6x^2-3x+40} = \dfrac{1}{2}$

b. $-4x + \dfrac{12}{x+3} = \dfrac{8}{x+3} + 12 + \dfrac{8}{2x+6}$

c. $\dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{50}{x^2-16}$

4. Determina un número positivo, tal que, si se le resta 24 veces su inverso multiplicativo, se obtiene 2.

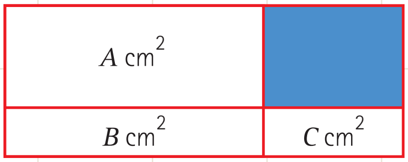
¿Cómo voy?

- Revisa tus respuestas y, luego, escribe la cantidad de ejercicios correctos en tu cuaderno.

Criterio	Pregunta	Ejercicios correctos
Determinar el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.	1	____ / 4
Resolver adiciones y sustracciones de fracciones algebraicas.	2	____ / 6
Resolver ecuaciones que contienen fracciones algebraicas.	3	____ / 3
Resolver problemas que involucran fracciones algebraicas.	4	____ / 1

Cómo resolverlo

Problema resuelto 1



Se considera un rectángulo dividido en cuatro partes como se muestra en la figura. Si se conoce el área de tres de estas partes, determina el área del rectángulo azul en función de las áreas conocidas.

Solución:
Primero, se debe considerar que no se conocen las longitudes de los lados de ningún rectángulo, de modo que debemos ponerles nombres provisionales. De esta forma, el largo y el ancho del mayor de los rectángulos menores serán m cm y p cm, respectivamente. De modo que tenemos la relación:

$$m \cdot p = A$$

El segundo rectángulo, ubicado debajo del que tiene área A, tiene el mismo largo (igual a m cm), pero es de ancho distinto (digamos, q cm).
Por tanto, tenemos:

$$m \cdot q = B$$

Y el tercer rectángulo de área conocida, tiene el mismo ancho del segundo (es decir, q cm), pero su largo es distinto del de los anteriores (digamos, n cm), luego tenemos:

$$n \cdot q = C$$

De lo anterior, podemos deducir que el rectángulo desconocido tiene el mismo largo del tercer rectángulo (es decir, n), y que su ancho es igual al del primer rectángulo (es decir, p). Por tanto, podemos calcular su área:

$$\begin{aligned} \text{Área } &= n \cdot p \\ &= \left(\frac{C}{q}\right) \cdot \left(\frac{A}{m}\right) \\ &= \frac{A \cdot C}{m \cdot q} = \frac{A \cdot C}{B} \end{aligned}$$

El área del rectángulo azul es igual a $\dfrac{A \cdot C}{B}$ cm^2.

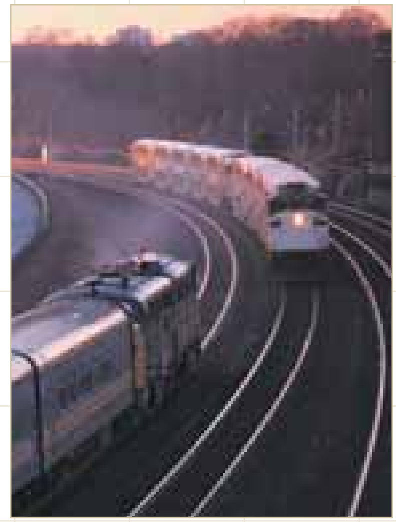
No olvides que...

Si el problema tiene datos con unidades de medida, la respuesta al problema se debe escribir con la unidad de medida correspondiente.

En tu cuaderno

1. Un terreno rectangular se divide en cuatro partes, de manera que tres de sus partes tienen áreas iguales a 40, 160 y 80 hectáreas. Determina el área del rectángulo restante.
2. Un cuadrado se divide en 4 partes, de forma que el área de la parte mayor es la suma de las áreas de los rectángulos restantes. ¿En qué proporción quedaron los lados del cuadrado después de los cortes?

Problema resuelto 2



Un tren va a una rapidez de v km/h. Un pasajero que va en él ve pasar a otro tren en sentido contrario, y el tiempo que tarda este en pasar por su vista es de 2 segundos y medio. Si la rapidez del tren en que va era las dos terceras partes de la del otro tren, y ambos mantienen su rapidez en ese instante, ¿cuál es la longitud del tren que vio el pasajero?

Solución:

Primero se debe determinar la longitud del tren que el pasajero ve pasar por cada segundo. Entonces, su longitud es igual al producto de la longitud que ve pasar cada segundo por el tiempo que lo ve pasar.

Cada segundo que avanza el tren en el que viaja, recorre como distancia $\frac{v}{3,6}$ metros.

Pero, a su vez, el tren que viaja en sentido contrario recorre $\frac{3}{2}$ de la distancia del primer tren, ya que su rapidez es dos tercios la rapidez del primer tren.

Es decir, el otro tren recorre en el sentido contrario $\frac{3}{2} \cdot \frac{v}{3,6}$ metros en un segundo, y como los trenes van en sentido contrario, en realidad el pasajero ve pasar cada segundo la suma de las distancias recorridas por ambos trenes, es decir:

$$\frac{v}{3,6} + \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{3,6} = \frac{5}{2} \cdot \frac{v}{3,6}$$

Como el pasajero ve el segundo tren durante 2 segundos y medio en total, entonces el largo del tren es igual a:

$$\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{v}{3,6}\right) \cdot \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{v}{\frac{18}{5}}\right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5v}{18} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125 \cdot v}{72}$$

Es decir, el largo del tren corresponde a $\frac{125}{72} \cdot v$ metros.

Recuerda que...

1 m/s $= 3,6$ km/h

Luego, v km/h corresponde a $\frac{v}{3,6}$ m/s.

En tu cuaderno

1. Determina la longitud del tren en el caso de que el pasajero viaje a 80 km/h y vea pasar el tren en sentido contrario a 120 km/h.
2. Determina la longitud del tren que ve el pasajero, para el caso en que ambos trenes viajen a la misma rapidez.
3. Encuentra la longitud del tren que ve si el pasajero viaja a 70 km/h, el segundo tren está inmóvil, y lo ve durante 5 segundos.

Ley de enfriamiento de Newton

Newton figura como uno de los más grandes pensadores de la historia, tanto por el impacto de sus teorías como por los giros radicales que significaron en su época. Una de las tantas aplicaciones del cálculo que Newton desarrolló es la llamada ley de enfriamiento, la que dice:

La rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que lo rodea.

El modelo matemático de esta ley se expresa por:

$$T(t) = T_0 + \Delta T \cdot e^{-kt}$$

En este modelo, k es una constante positiva, T_0 es la temperatura del ambiente, ΔT es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio que lo rodea, y el tiempo t está expresado en horas. En algunos casos, sirve para determinar la hora de muerte de las personas. Veamos el siguiente ejemplo:

El doctor llegó al lugar de los hechos a las 10 de la mañana y la temperatura del cadáver a esa hora era de 29 °C. La temperatura de la pieza donde se encontró el cuerpo era de 23 °C. Una hora y media después, la temperatura del cuerpo bajó a 27 °C. El doctor necesitaba saber la hora exacta de la muerte de su paciente para llenar el certificado de defunción. Considerando k = 0,27031007, ¿a qué hora murió el paciente?

En tu cuaderno

1. Con ayuda de una calculadora, y usando la aproximación e = 2,71828, encuentra los valores de T_0 y de ΔT, a fin de determinar el modelo.
2. Luego, encuentra una aproximación para la temperatura del cuerpo humano, si se sabe que murió a las 7 de la mañana.
   - El tiempo está considerado en horas.
   - Observa que para este caso debes considerar un valor negativo de t, dado que la muerte del paciente fue antes de las 10 de la mañana.
3. ¿Qué otros tipos de problemas se pueden resolver mediante este modelo?
4. ¿Qué otras situaciones se pueden modelar usando esta fórmula?
5. ¿De qué manera el valor de k depende de los datos aportados en el problema?

Investiguemos…

Ahora trabajen en grupos de cuatro personas:

1. Comparen las soluciones obtenidas por cada integrante y discutan sobre cuál debería ser la solución correcta en caso de que existan diferencias entre los resultados obtenidos.
2. Discutan en conjunto si existe una manera de determinar el valor de la constante k, ya que para este caso fue dada.
3. El valor de k dado en el ejemplo, ¿depende de las condiciones del problema? Discutan.
4. Cada uno resuelva el siguiente problema:
   Un objeto fue colocado en una habitación que se encuentra a temperatura constante de 15 °C; sin embargo, solamente luego de un instante se toma la temperatura, la cual es en ese momento de 26 °C. ¿Qué temperatura tiene el objeto pasados 10 minutos después de ese instante?, ¿con qué temperatura el objeto ingresó a la habitación, si pasaron 10 minutos antes de que fuese tomada esta?

   Para todos los cálculos, consideren $k = 0{,}031$ y sigan estos pasos:

   - Primero, dado que el tiempo está expresado en minutos, deben considerar la variable t como tiempo transcurrido desde que se toma la temperatura al objeto, en minutos.
   - Luego, se remplazan los valores dados en la fórmula, y con esto encuentra el valor de ΔT.
   - Conocido este valor, se encuentra la temperatura del objeto pasados 10 minutos.
   - Finalmente, dado que se desea saber la temperatura en un instante anterior al primer registro, se debe considerar un valor de t negativo para saber la temperatura con la cual ingresó el objeto a la habitación.

Evaluemos nuestro trabajo

- Comparen sus resultados con los obtenidos por sus compañeros y compañeras. ¿Se obtienen los mismos valores? De no ser así, ¿cuáles son las diferencias?
- ¿Qué sucede si el tiempo se mide ahora en horas o en segundos?
- El valor de k considerado ¿sirve para este caso o debe ser cambiado? De ser así, ¿cómo podría determinarse el nuevo valor de k?
- ¿Se relaciona de alguna manera el valor de la constante k con los parámetros y unidades de medida usados? ¿Existe una dependencia de los datos conocidos?, ¿por qué?

Síntesis de la Unidad

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual, en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.

Expresiones algebraicas fraccionarias

- Análisis
- Ecuaciones
- Simplificación
- Orden
- Problemas
- mcm de expresiones algebraicas
- Restricciones
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división

1 **Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.**

a. Para simplificar una fracción, basta dividir numerador y denominador por un número entero cualquiera.

b. La fracción algebraica $\dfrac{a^3 - 125b^3}{7a^2 + 35ab + 175b^2}$ es irreducible.

c. Una fracción algebraica queda indefinida en $a = 3$ si su denominador se anula para tal valor de a.

d. La fracción $\dfrac{a-1}{7+b^2}$ es mayor que la fracción $\dfrac{2a-1}{14+2b^2}$, para $a > 0$ y $b < 0$.

e. Una fracción algebraica aumenta de valor si el numerador queda fijo y el de su denominador disminuye.

f. Para determinar los valores donde una fracción algebraica queda indefinida, es necesario revisar los valores para los cuales el numerador se anula.

g. El mínimo común múltiplo de $6ab^2$ y $4a^2b\ (a + 1)$ es $12a^2b^2(a + 1)$.

h. Las fracciones $\frac{1}{13}, \frac{2}{21}, \frac{3}{31}$ son generadas por la expresión $\frac{n-2}{n^2+n-1}$.

i. La única solución positiva de la ecuación $x+2=\frac{8}{x}$ es $x=2$.

j. Para dividir dos fracciones algebraicas, es necesario multiplicar la primera, por el inverso multiplicativo de la segunda.

k. En el caso $x>0$, $a>0$, $x<a$, el valor de la fracción $\frac{x-a}{a}$ es menor que -1.

l. La expresión $\frac{2a^3-32}{3\left(a^2+2a-1\right)}$ se anula únicamente para $a=-4$.

m. La única solución de la ecuación $x+2-\frac{8}{x}=0$ es $x=2$.

n. Las fracciones $\frac{3}{7}, \frac{6}{26}, \frac{9}{63}$ son generadas por la expresión $\frac{3n}{(n+1)^3-1}$.

2 **Aplica lo que aprendiste en la unidad para desarrollar las siguientes actividades:**

a. Halla un número positivo tal que, al restarle 63 veces su inverso multiplicativo, se obtenga 2. ¿Es el único número que satisface esta propiedad?, ¿cómo lo sabes?

b. Dos aviones se utilizan para fumigar una parcela. Si uno de ellos se demora la mitad del tiempo que el otro, y juntos se demoran 5 horas, encuentra el tiempo que le toma a cada avión por sí solo cubrir toda la parcela.

c. Resuelve la ecuación $\frac{2x^2-x+5}{10x^2+6x-19}=\frac{1}{5}$.

d. Un grupo de 60 estudiantes de un colegio acordaron poner una cuota para asistir al cine. Pero 10 de ellos se retiran, debiendo el resto poner $ 400 adicionales. Determina el valor original de la cuota.

e. Factoriza las siguientes expresiones y determina los valores de x para los cuales no están definidas.

i. $\frac{x^3(x+1)}{12x^3-12x}$ ii. $\frac{\left(x^2+1\right)(2x+2)}{14x^9-14x}$

Evaluación de la Unidad

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y selecciona la alternativa correcta en cada caso.

1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor para $a > 1$?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{a+1}{2a}$

C. $\frac{a-1}{2a}$

D. $\frac{a}{2a+1}$

E. $\frac{a}{2a-1}$

2. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la menor para $a > 0$?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4a-3}{8a}$

C. $\frac{3a-2}{6a}$

D. $\frac{2a-1}{4a}$

E. $\frac{a-1}{2a}$

3. Si $a > 1$, ¿cuál de las siguientes fracciones es la más cercana a $\frac{1}{2}$?

A. $\frac{a+1}{2a}$

B. $\frac{a-1}{2a}$

C. $\frac{a}{2a+1}$

D. A y B

E. B y C

4. ¿Cuál de las siguientes no es una restricción para la fracción $\frac{(x-2)^2(x-5)}{(x^3-x)(x+5)}$?

A. $x = -5$

B. $x = -1$

C. $x = 0$

D. $x = 1$

E. $x = 2$

5. ¿Qué fracción no está generada por la misma expresión que las restantes?

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{10}{17}$

C. $\frac{8}{14}$

D. $\frac{6}{11}$

E. $\frac{1}{2}$

6. El resultado de $\frac{a^2-1}{2b} \cdot \frac{m^2+4}{a-1} \cdot \frac{6b^3}{m^4-16}$ es:

A. $\frac{a^2+1}{3b(m^2+4)}$

B. $\frac{3b(a+1)}{m^2+4}$

C. $\frac{3b(a+1)}{m^2-4}$

D. $\frac{a+1}{3b(m^2-4)}$

E. $\frac{3b^2(a+1)}{m^2-4}$

7. El resultado de $\frac{a^2+4a+3}{a^2-4} : \frac{a+1}{4a+8}$ es:

A. $\frac{a-3}{4(a-2)}$

B. $\frac{a+3}{4(a-2)}$

C. $\frac{4(a-3)}{a-2}$

D. $\frac{4(a+3)}{a-2}$

E. $\frac{4(a+3)}{a+2}$

8. El resultado de $\frac{10}{a^2-1} : \frac{14}{a^3-1}$ es:

A. $\frac{5(a+1)}{7(a^2+a+1)}$

B. $\frac{7(a+1)}{5(a^2+a+1)}$

C. $\frac{a+1}{a^2+a+1}$

D. $\frac{a^2+a+1}{a+1}$

E. $\frac{5(a^2+a+1)}{7(a+1)}$

9. La expresión $\frac{a+3}{a+1}$ no es equivalente a:

A. $\frac{a^2+4a+3}{(a+1)^2}$

B. $\frac{a^2-9}{a^2-2a-3}$

C. $\frac{a^2+2a-3}{a^2-1}$

D. $\frac{(a+3)^2}{a^2+4a+3}$

E. $\frac{a^2+5a+6}{a^2-3a+2}$

10. El resultado de $\frac{3}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}$ es igual a:

A. $\frac{3a+3}{a^2-1}$

B. $\frac{3(a+3)}{a^2-1}$

C. $\frac{3(2a+3)}{a^2-1}$

D. $\frac{6a+3}{a^2-1}$

E. $\frac{3a-3}{a^2-1}$

11. La solución para x de la ecuación $\frac{3x^2-3x+6}{2x^2+4x-2}=\frac{3}{2}$ es:

A. $x=1$

B. $x=-1$

C. $x=2$

D. $x=-2$

E. $x=0$

12. La operación $\frac{3}{m-2}+\frac{6}{m^2-4}-\frac{1}{m+2}$ da como resultado:

A. $\frac{2(m+5)}{m^2-4}$

B. $\frac{2m+5}{m^2-4}$

C. $\frac{2(m+7)}{m^2-4}$

D. $\frac{2m-7}{m^2-4}$

E. $\frac{2(m-7)}{m^2-4}$

13. Determina un número positivo tal que si se le suma 7, el resultado se divide por 3, y si finalmente se le suma nuevamente 7, se obtiene 20 veces el inverso multiplicativo del número.

A. 2

B. 4

C. 3

D. 5

E. 1

14. Por asistir a cierto lugar, a un grupo de amigos se les cobraba \$ 6 000 en total. Pero dos de ellos no pudieron asistir, de modo que cada uno de ellos debió pagar \$ 150 más, pues el precio por el grupo se mantuvo. ¿Cuántos amigos había al comienzo?

A. 7

B. 8

C. 10

D. 12

E. 15