Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática

CONARE-PROYECTO RAMA

Funciones

José R. Jiménez F.

Temas de pre-cálculo *I ciclo 2007*

Índice

1. Funciones **3**

1.1. Introducción 3

1.2. Definición 4

1.3. Ejemplos 4

1.4. Función constante 5

1.5. Función identidad 5

1.6. Ejercicios 6

1.7. Ámbito de una función 7

1.7.1. Ejemplos 7

1.7.2. Ejercicios 8

1.8. Dominio máximo real de una función 9

1.8.1. Ejemplos 9

1.8.2. Ejercicios 10

1.9. Gráfico de una función 11

1.10. Gráfica de una función 11

1.11. Función inyectiva 12

1.12. Función sobreyectiva 12

1.13. Función biyectiva 13

1.13.1. Ejemplos 13

1.13.2. Ejercicios 13

1.14. La función compuesta(composición de funciones) 14

1.14.1. Ejercicios 15

1.14.2. Ejercicios resueltos 15

1.15. Ejercicios 18

2. Función Lineal **21**

2.1. Definición 21

2.2. Gráfica de una función lineal 21

2.3. La pendiente de una recta 22

2.4. Rectas paralelas 23

2.5. Rectas perpendiculares 24
2.5.1. Ejemplos resueltos 25

3. Función Cuadrática **28**
3.1. Definición: 28
3.2. Gráfica de una función cuadrática 28
3.3. Análisis de la función cuadrática a partir de la gráfica 35
3.3.1. Ejemplos 35
3.3.2. Ejercicios 37

4. Función Inversa **38**
4.1. Definición 38
4.2. Ejemplos 38
4.3. Ejercicios 40

5. Función Exponencial **41**
5.1. Propiedades 41
5.1.1. Comportamiento de la función en los extremos del dominio 42
5.1.2. Ejemplos 44

6. Función Logarítmica **47**
6.1. Propiedades para $g(x) = \log_a x$ 48
6.1.1. Comportamiento de la función en los extremos del dominio 48
6.2. Otras propiedades de los logaritmos 50
6.3. El número real e 51
6.4. ¿Cómo resolver una ecuación logarítmica? 52
6.5. Ejemplos 53
6.6. Ejercicios 60

1. Funciones

1.1. Introducción

El concepto de función es fundamental para cualquier curso de cálculo diferencial e integral. Se requiere el dominio de los conceptos básicos para poder interpretar los modelos aplicados a las diferentes disciplinas.

Para resolver los problemas se debe encontrar la relación entre las diferentes variables.

Ejemplo
El área de un cuadrado y la medida de un lado: Se sabe que el área de un cuadrado es la segunda potencia de la medida del lado. Si se representa con x la medida del lado y con y el área entonces se cumple que

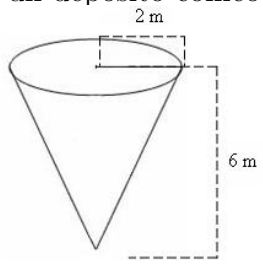
$$y = x^2$$

y depende de x. x: variable independiente
y: variable dependiente

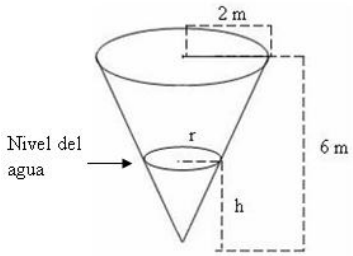
Para cada número real $x \geq 0$ encontramos otro valor $y \geq 0$. Esta relación la podemos representar por el par $(x\,,\,y) = (x\,,\,x^2)$.

Ejemplo
El volumen de un cono y su altura

Suponga que se tiene un depósito cónico de 6 metros de altura y 2 metros de radio.

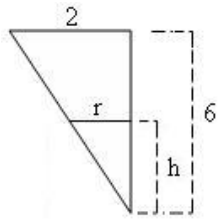


Se deposita agua e interesa saber cuál es el volumen que se tiene si se conoce el nivel h del agua.



La cantidad de agua en m^3 está dada por $V = \dfrac{\pi\, r^2\, h}{3}$

Se puede encontrar una relación entre r y h usando semejanza de triángulos.



$$\frac{r}{h} = \frac{2}{6} \qquad \text{entonces } r = \frac{h}{3}$$

Podemos afirmar que la cantidad de agua es

$$V = \frac{\pi\, r^2\, h}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{\pi\, h^3}{27}\, m^3$$

Entonces la cantidad de agua (volumen) se puede expresar por

$$V = \frac{\pi\, h^3}{27} \qquad \text{con } 0 \leq h \leq 6.$$

Observe que la cantidad de agua (volumen) depende únicamente de h.

1.2. Definición

Una función de variable real establece una relación entre <u>todos</u> los elementos de un conjunto A de números reales, llamado dominio, y los elementos del conjunto B de números reales llamado <u>codominio</u>. Todo elemento de A está asociado a un único elemento de B.

Se denota

$f : A \to B$

Si $x \in A$ está asociado con $y \in B$ se dice que "x es la preimagen de y" o "y es la imagen de x", y se denota $y = f(x)$

1.3. Ejemplos

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(x) = 2\,x$

   Si se quiere calcular la imagen de -3; entonces $f(-3) = 2(-3) = -6$.
   -6 es la imagen de -3 ó -3 es la preimagen de -6
   Dominio:$\mathbb{Z}$ Codominio: $\mathbb{Z}$

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
   $f(x) = \sqrt{|x|}$
   La imagen de -4 es $f(-4) = \sqrt{|-4|} = \sqrt{4} = 2$
   -4 es la preimagen de 2 ó 2 es la imagen de -4 Note que $f(4) = \sqrt{|4|} = 2$
   Entonces 2 es la imagen de -4 y 4.

   El dominio es $\mathbb{Z}$ y el codominio es $\mathbb{R}$

3. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$
   $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$
   La expresión $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ no está definida si $x = 1$.
   El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$ y el codominio $\mathbb{R}$.
   La imagen de 2 es 5. Interesa saber si 5 es únicamente la imagen de 2, para esto se resuelve la ecuación

   $f(x) = 5$
   $$\frac{x^2+1}{x-1} = 5 \Rightarrow \quad x^2+1 = 5\,(x-1)$$
   $$x^2 - 5\,x + 6 = 0$$
   Por inspección se obtiene que $x = 2$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación. Entonces las preimágenes de 5 son 2 y 3.

1.4. Función constante

Sea $c \in \mathbb{R}$. La función constante es

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = c$

Todo número real tiene imagen c.

1.5. Función identidad

Se llama función identidad a

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$

También se puede expresar $y = x$.

1.6. Ejercicios

I) Determine en cada caso si la correspondencia de pares ordenados $(x\,,\,y)$ corresponde a una función. Explique.

1) $\{(0,-3),(1,-3),(2,-3),(4,-3)\}$
2) $\{(-1,5),(1,7),(-7,1),(5,-1)\}$
3) $\{(4,3),(3,4),(-6,8),(8,-6)\}$
4) $\{(\sqrt{3},\pi),(-\sqrt{3},2),(-5,1))\}$

II) Para la función definida por $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2\,x^2+1$ encuentre $g(-2)$; $g(-5)$; $g(8)$; $g(\sqrt{3})$.

III) Si $h:[1,\infty[\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{x-1}$ halle $h(5)$; $h\left(\dfrac{5}{4}\right)$; $h(\sqrt{3})$.

¿Es posible calcular $h\left(\dfrac{3}{4}\right)$? Explique.

IV) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-2\,x^2-x+3$
Encuentre: $g(\sqrt{2}+1)$; $g(a)$; $g(2\,a)$; $g(a+1)$; $g(x+h)$

V) Determine en cada caso si se define una función. Si no es función explique por qué?

1) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x}$
2) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\qquad f(x)=x^2$
3) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ $\qquad f(x)=x^3$
4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$
5) $f:\mathbb{R}-\{-2,-3\}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+5\,x+6}$

VI) Encuentre y simplifique la expresión $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ para cada función.

a) $f(x)=5$
b) $f(x)=\pi\,x+\sqrt{3}$
c) $f(x)=3\,x^2-x-14$
d) $f(x)=\dfrac{4\,x-1}{x+3}$
e) $f(x)=\sqrt{5-2\,x}$

VII) Encuentre y simplifique la expresión $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada función.

a) $f(x) = 1 + \sqrt{3}$

b) $f(x) = -3\,x + \dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = -x^2 + x + 2$

d) $f(x) = \dfrac{1-2\,x}{x+3}$

e) $f(x) = \sqrt{5-2\,x}$

1.7. Ámbito de una función

Sea $f : A \to B$. Se sabe que todo elemento de A es una preimagen, sin embargo puede darse que sólo algunos elementos de B sean imágenes. El conjunto de todos los elementos de B que son imagen de al menos un elemento de A se llama ámbito de la función; y lo representamos por $f(A)$.

$$\boxed{f(A) = \{y \in B \,/\, y = f(x) \wedge x \in A\}}$$

1.7.1. Ejemplos

1. Considere la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, con $f(x) = 2\,x$.
   El ámbito es
   $f(\mathbb{Z}) = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

2. Para la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{|x|}$ se cumple que
   $f(x) = f(-x)$ pues $\sqrt{|x|} = \sqrt{|-x|}$. Entonces el ámbito es
   $\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots\}$

3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = |x-2|$.
   Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $(x-2) \in \mathbb{R}$ y $|x-2| \geq 0$; por tanto $g(x) \geq 0$. Además si $y \geq 0$ entonces $y = |y+2-2| = g(y+2)$ y y es la imagen de $y+2$ por tanto $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$

4. Para la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, g(x) = |x| - 2$.
   Se tiene que $x \in \mathbb{R}$ entonces $|x| \geq 0$. Sumando -2 en la inecuación $|x| \geq 0$ tenemos que

$$|x| - 2 \geq -2$$
$$g(x) \geq -2$$

Por tanto $g(\mathbb{R}) \subset [-2, \infty[$
También si, $y \in [-2, \infty[$ entonces
$y \geq -2 \Rightarrow y + 2 \geq 0 \Rightarrow |y + 2| = y + 2$

Entonces
$g(y + 2) = |y + 2| - 2 = y + 2 - 2 = y$
por tanto $y \in g(\mathbb{R})$

Entonces
$[-2, \infty[\subset g(\mathbb{R})$
Se concluye que el ámbito es
$g(\mathbb{R}) = [-2, \infty[$

5. Sea la función definida por $f : [-5, 7] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -3\,x + 2$.
Si $x \in [-5, 7]$ entonces

$$\begin{aligned} -5 \leq x \leq 7 \quad & \Leftrightarrow (-3)(-5) \geq (-3)(x) \geq (-3)(7) \\ & \Leftrightarrow 15 \geq -3\,x \geq -21 \\ & \Leftrightarrow 15 + 2 \geq -3\,x + 2 \geq -21 + 2 \\ & \Leftrightarrow 17 \geq -3\,x + 2 \geq -19 \\ & \Leftrightarrow -19 \leq -3\,x + 2 \leq 17 \\ & \Leftrightarrow -19 \leq f(x) \leq 17 \end{aligned}$$

El ámbito es $[-19, 17]$

1.7.2. Ejercicios

I) Encuentre el ámbito de las siguientes funciones

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 + 1$
2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = (x + 1)^2$
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 8 - |x - 2|$
4) $g : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 3\,x + 5$
5) $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = -3\,x + 5$
6) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $\quad g(x) = x^2 + 5$

II) Determine en cada caso si las funciones tienen el mismo ámbito.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (-x)^2$
2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$
4) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,x^2 + 3$ $\qquad g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\,x^2 + 3$

1.8. Dominio máximo real de una función

Para la función $f : D_f \to \mathbb{R}$ definida por la expresión $f(x)$; se dice que D_f es el máximo dominio real si para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c)$ es un número real se cumple que $c \in D_f$

Por ejemplo, la expresión $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$ está bien definida para todo real excepto para $x = 1$, entonces el máximo dominio real es $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ o $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.

En otro caso; si $g(x) = \sqrt{2-x}$ entonces se requiere que $2 - x \geq 0$, es decir, $x \leq 2$ y $D_g =]-\infty, 2]$

El <u>máximo dominio real</u> es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que la expresión $f(x)$ está definida.

Se deben de considerar los siguientes casos:

1. Dada la expresión algebraica $P(x)$ si n es un entero par, la expresión $\sqrt[n]{P(x)}$ solo está definida en $\mathbb{R}$ si $P(x) \geq 0$.

2. La expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ está definida en $\mathbb{R}$ si $Q(x) \neq 0$.

En algunos casos deben considerarse los dos anteriores para una misma función.

1.8.1. Ejemplos

1. Si $f(x) = \sqrt{x-9}$ entonces se requiere que $x - 9 \geq 0$ y el dominio máximo es $D_f = [9, \infty[$.

2. Si $f(x) = \dfrac{x^2 + x^3}{x^2 - 6\,x + 8}$ se necesita que $x^2 - 6\,x + 8 \neq 0$. Al resolver $x^2 - 6\,x + 8 = 0$ tenemos $x = 2$ ó $x = 4$ y el dominio máximo es $D_f = \mathbb{R} - \{2, 4\}$.

3. Para $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x-1}}$ la condición necesaria es $x > 1$ y el dominio es $D_g =]1, \infty[$.

4. Hallar el dominio máximo en el que se puede definir la función
   $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+10}}{2 - \sqrt{5-x}}$.
   El dominio máximo de la función es el conjunto de números reales que cumplen:

   i) $x + 10 \geq 0$
   ii) $5 - x \geq 0$
   iii) $2 - \sqrt{5-x} \neq 0$

Entonces

$$\begin{aligned} x+10 \geq 0 &\Rightarrow x \geq -10 \\ 5-x \geq 0 &\Rightarrow 5 \geq x \Rightarrow x \leq 5 \\ 2-\sqrt{5-x} \neq 0 &\Rightarrow \sqrt{5-x} \neq 2 \Rightarrow 5-x \neq 4 \Rightarrow x \neq 1 \end{aligned}$$

Se tienen tres condiciones

$x \geq -10$

$x \leq 5$

$x \neq 1$

y el dominio máximo es
$D = [-10, 1[\cup]1, 5]$

5. Si $h(x) = \sqrt{2\,x^2 + x - 21}$ se requiere $2\,x^2 + x - 21 \geq 0$,
esto es $(2\,x+7)(x-3) \geq 0$.
El conjunto solución de está inecuación es el dominio de la función.

$$D_f =]-\infty, \frac{-7}{2}] \cup [3, \infty[$$

1.8.2. Ejercicios

Determine el máximo dominio real en el que se puede definir una función f mediante.

1) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 30}$

2) $f(x) = \sqrt{16\,x^2 - 24\,x + 25}$

3) $f(x) = \dfrac{16\,x^2 - 24\,x + 9}{16\,x^2 - 24\,x + 25}$

4) $f(x) = \sqrt{4 + |x|}$

5) $f(x) = \sqrt{4 - |x|}$

11) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{(x-4)^2}$

12) $f(x) = \dfrac{x^3}{x - 2\,\pi}$

13) $g(x) = \dfrac{2\,x+1}{1-\sqrt{3}}$

14) $h(x) = \sqrt{3} + 2$

15) $f(x) = \dfrac{3\,x+1}{|x-10| - 2}$

6) $f(x) = \sqrt{2 - |x-4|}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x-7}}$

8) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}}$

9) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)(x-4)}$

10) $f(x) = \sqrt[4]{1-x} + 7\sqrt{1+x}$

16) $f(x) = \dfrac{(x-3)^4}{(x^2-9)}$

17) $f(x) = \dfrac{1}{2\,x^2 + a\,x - 3\,a^2}$

18) $f(x) = \sqrt{|x-1| + 3}$

19) $f(x) = \dfrac{x+4}{|x-2| + 2|x+1|}$

20) $h(x) = \dfrac{2-x}{|x-2| - 2|x+1|}$

1.9. Gráfico de una función

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f : A \to B$

El gráfico de

$$f : A \to B$$

Es el conjunto $G_f = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = f(x) \text{ para algún } x \in A\}$

1.10. Gráfica de una función

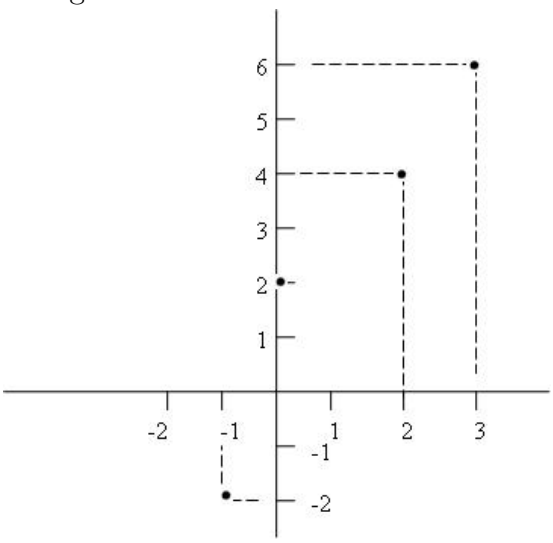
Para la función $f : A \to B$, se llama gráfica de la función al dibujo que se construye en un plano cartesiano asociando un punto (x, y) de ese dibujo con un valor x del dominio y la imagen correspondiente $y = f(x)$

Ejemplo

$f : \{-1, 0, 2, 3\} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2\,x$

El gráfico es
$\{(-1, -2), (0, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

Y su gráfica



1.11. Función inyectiva

Una función $f : A \to B$ es inyectiva si cualquier elemento del ámbito $f(A)$ es imagen de una <u>única</u> preimagen de A. Esto significa que si $v \in f(A)$, entonces solo hay una única preimagen $u \in A$ que satisface $f(u) = v$.

Otra forma de definir la función inyectiva es:
$x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\boxed{\text{Preimágenes diferentes tienen imágenes diferentes.}}$$

Por lo tanto, para determinar si una función es inyectiva debe considerarse cuáles son los números reales que constituyen el dominio.

Ejemplos

1. En la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{|x|}$;
   Se cumple que $f(-2) = f(2) = \sqrt{2}$ y en general $f(x) = f(-x)$; por tanto la función no es inyectiva.

2. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = 2\,x$; sí es inyectiva .
   Note que si $x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2\,x_1 \neq 2\,x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. La expresión $f(x)$ en sí no determina si la función es inyectiva.
   Observe que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 + 1$ no es inyectiva, mientras que $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2 + 1$ sí lo es.

1.12. Función sobreyectiva

La función $f : A \to B$ es sobreyectiva si todo elemento del codominio B es imagen de al menos un elemento del dominio A.

Entonces

$f : A \to B$ es sobreyectiva si$f(A) = B$

$$\boxed{\text{El ámbito es igual al codominio.}}$$

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 + 1$ no es sobreyectiva .
Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 + 1 \geq 1$ y el ámbito es $[1, \infty[$.
Los números reales que pertenecen a $]-\infty, 1]$ no tienen preimágen.
Sin embargo la función

$g : \mathbb{R} \to [1, \infty[$ con $g(x) = x^2 + 1$

sí es sobreyectiva.

1.13. Función biyectiva

La función $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva. Cumple dos condiciones:

1. Si $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. $f(A) = B$

1.13.1. Ejemplos

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2\,x + 1$ es biyectiva.
2) $g : [0, \infty[\to [1, \infty[$ con $g(x) = x^2 + 1$ es biyectiva.
3) $h : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2 + 1$ es inyectiva pero no sobreyectiva.
4) $j : \mathbb{R} \to [1, \infty[$ con $g(x) = x^2 + 1$ no es inyectiva, pero sí es sobreyectiva.
5) La función $h : \mathbb{R} \to B$ con $h(x) = 4 + |x|$ no es inyectiva. Es sobreyectiva únicamente si $B = [4, \infty[$.
6) La función $g : A \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 5 + |x - 2|$ es inyectiva únicamente si $A \subseteq [2, \infty[$ o si $A \subseteq]-\infty, 2]$

1.13.2. Ejercicios

I) Para cada función, determine si la función es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$

2) $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$

3) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{1}{3}$

II) Indique en que conjunto A se puede definir cada función para que sea inyectiva.

1) $f : A \to \{1\}$ $\quad f(x) = x + 3$

2) $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 6 - |x - 2|$

3) $g : A \to [-1, 8]$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

III) Indique el conjunto B para que la función sea sobreyectiva.

1) $f : \mathbb{R} \to B$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

2) $g : \mathbb{R} \to B$ $\quad g(x) = 3 - |2\,x - 1|$

3) $g : \mathbb{R} - \{4\} \to B$ $\quad g(x) = \dfrac{4 - x}{|x - 4|}$

1.14. La función compuesta(composición de funciones)

Supóngase que se tienen dos funciones

$g : A \to B$

$f : B \to C$

tal que $f(g(x))$ está definida.

La función compuesta de f y g se denota por $(f\,o\,g)$ y se define por

$(f\,o\,g)(x) = f(g(x))$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{\quad f\,o\,g \quad} f(g(x))$$

Ejemplos

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 3\,x - 1$ $\qquad g(x) = 2\,x - 1$

Entonces

$(f\,o\,g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 20.$
$(f\,o\,g)(4) = 20$

$(f\,o\,g)(x) = f(g(x)) = f(2\,x - 1) = 3(2\,x - 1) - 1 = 6\,x - 4.$
$(f\,o\,g)(x) = 6\,x - 4$

El dominio de $f\,o\,g$ es $\mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = 2\,x + 1$

$(f\,o\,g)(x) = f(g(x)) = f(2\,x+1) = \dfrac{1}{2\,x+1-1} = \dfrac{1}{2\,x}.$

$(f\,o\,g)(x) = \dfrac{1}{2\,x}$

El dominio de $f\,o\,g$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

1.14.1. Ejercicios

1) Sean las funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2\,x^2 - 1$
$g(x) = 3\,x + 2.$
Determine las funciones $(f\,o\,g)(x)$ y $(g\,o\,f)(x)$.
Indique el dominio de cada una de ellas.

2) Para la función $h(x)$ encuentre funciones $f(x)$ y $g(x)$ tal que
$(f\,o\,g)(x) = h(x)$

   a) $h(x) = \sqrt{x-3}$

   b) $h(x) = \sqrt{x} - 3$

   c) $h(x) = (2\,x+1)^5$

   d) $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1} + 2}$

   e) $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}} + 2$

1.14.2. Ejercicios resueltos

1) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x+1) = 2\,x^2 - x - 6.$
Calcule: $f(3)$; $f(2\,a)$; $f(x+h)$.

Solución

Primero calculamos $f(x)$.

$f(x) = f(x-1+1) = 2(x-1)^2 - (x-1) - 6 = 2\,x^2 - 4\,x + 2 - x + 1 - 6 = 2\,x^2 - 5\,x - 3.$
$f(x) = 2\,x^2 - 5\,x - 3 = (2\,x+1)(x-3)$
$f(3) = (2 \cdot (3) + 1)(3-3) = 0.$
$f(2\,a) = (2(2\,a)+1)(2\,a-3) = (4\,a+1)(2\,a-3).$
$f(x+h) = (2(x+h)+1)(x+h-3) = (2\,x + 2\,h + 1)(x+h-3).$

2) Encuentre el dominio máximo de la función $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - x^3}}{1 - 2\,x}$.

Solución

En el dominio no están aquellos números reales que cumplan con $\begin{cases} 1 - 2\,x = 0 \\ x^4 - x^3 < 0 \end{cases}$

- Condición 1: $1 - 2\,x = 0 \Leftrightarrow 1 = 2\,x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
- Condición 2: $x^4 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$

Luego como $\dfrac{1}{2} \in]0, 1[$ el dominio es $D_g = \mathbb{R} -]0, 1[$

3) Determine los puntos de intersección (si existen) de las funciones:
$f : [-2, 2] \to \mathbb{R} \quad f(x) = (x - 1)(x - 2)$
$g : [-2, 2] \to \mathbb{R} \quad g(x) = -2\,x^2 + 6\,x + 14$

Solución

La intersección está dada para aquellos números reales x tal $f(x) = g(x)$ en el dominio de las funciones
Entonces
$(x - 1)(x - 2) = -2\,x^2 + 6\,x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 3\,x + 2 = -2\,x^2 + 6\,x + 14 \Leftrightarrow 3\,x^2 - 9\,x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 3\,x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3\,x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} (x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \\ (x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$
Note que $x = 4$, no pertenece al dominio de las funciones, por lo que el único punto de intersección es $(-1,\ f(-1)) = (-1,\ g(-1)) = (-1, 6)$.

4) Encuentre el dominio máximo de la función definida por $h(x) = \sqrt[4]{4 - |x^2 - 5|}$.

Solución

Como el índice de la raíz es par se debe cumplir que $4 - |x^2 - 5| \geq 0$

Entonces

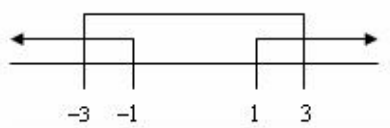
$4 - |x^2 - 5| \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq |x^2 - 5| \Leftrightarrow |x^2 - 5| \leq 4$ que equivale a $-4 \leq x^2 - 5 \leq 4$

Se analizan dos casos.

Caso 1: $-4 \leq x^2 - 5$
$-4 \leq x^2 - 5 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 1 \qquad Sol_1 = x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$
Caso 2:$x^2 - 5 \leq -4$
$x^2 - 5 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \qquad Sol_2 = x \in [-3, 3]$

Luego la solución general es $Sol_1 \cap Sol_2$, donde coinciden las barras.

$Sol_{General} = x \in [-3, -1] \cup [1, 3]$
$D_h = [-3, -1] \cup [1, 3]$



5) Calcule $\dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3}$ si $f(x) = \dfrac{4\,x^2}{x+5}$

Solución

Calculando primero $f(-3) = \dfrac{4(-3)^2}{-3+5} = \dfrac{36}{2} = 18 \qquad f(-3) = 18$

$\dfrac{f(x) - f(-3)}{x+3} =$

$$\frac{\dfrac{4\,x^2}{x+5} - 18}{x+3} = \frac{\dfrac{4\,x^2 - 18\,x - 90}{x+5}}{x+3} = \frac{4\,x^2 - 18\,x - 90}{(x+5)(x+3)} = \frac{2(x+3)(2\,x-15)}{(x+5)(x+3)} = \frac{2(2\,x-15)}{x+5},$$

$x \neq -3$

$$\frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \frac{2(2\,x-15)}{x+5}$$

6) Determine el dominio máximo de la función definida por $f(x) = \dfrac{\pi\,x + 2}{(x^2-7)^4 - 16}$

Solución

Para el caso de esta función, se encuentra definida en todos los números reales salvo en aquellos que anulen el denominador, por lo que se resuelve $(x^2-7)^4 - 16 = 0$

$(x^2-7)^4 - 16 = 0 = (x^2-7)^4 = 16 = (x^2-7)^2 = 4 = (x^2-7)^2 - 4 = 0 = (x^2-7+2)(x^2-7-2) = 0$

$$(x^2-5)(x^2-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-5) = 0 \\ (x^2-9) = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 5 = 0 = x^2 = 5 = |x| = \sqrt{5} = x = \pm\sqrt{5}$
$x^2 - 9 = 0 = x^2 = 9 = |x| = 3 = x = \pm 3$

$Dom_f = \mathbb{R} - \{-3, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, 3\}$

7) Dadas las funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por
$h(x) = x^2 + 5, f(x) = x - 1, g(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ Calcule $(h\,o(g\,o\,f))(x)$

Solución

$(h\,o(g\,o\,f))(x) = h(g(f(x)))$, por lo que para iniciar se calcula $g(f(x))$.

$g(f(x)) = \dfrac{(x-1)}{2} + 1,$

$h\left(\dfrac{(x-1)}{2} + 1\right) = \left[\dfrac{(x-1)}{2} + 1\right]^2 + 5 = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + 5 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + 5$

$Sol : h\,o(g\,o\,f)(x) = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2\,x + 21)$

1.15. Ejercicios

1) Calcule $\dfrac{f(-2+h) - f(2)}{h}$ si

a) $f(x) = \dfrac{-3\,x}{2\,x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{-3\,a}{2\,a - 1}$ con $a \neq \dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\,x - 1}}$

d) $f(x) = (x-2)^3$

2) Encuentre el dominio máximo de la función

a) $g(x) = \sqrt[6]{5 - |3\,x - 2|}$

b) $f(x) = \dfrac{3\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{1 - 2\,x}}{7x - x2}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{9 - x^2}{|x^2 - 6\,x + 5|}}$

3) Calcule $(f\,o\,g)(x)$ si

a) $f(2\,x) = 4\,x + 1$ y $g(x-1) = x^2$

b) $f(x) = -2\,x^2 + x - 5$ y $g(x+2) = -3\,x + 5$

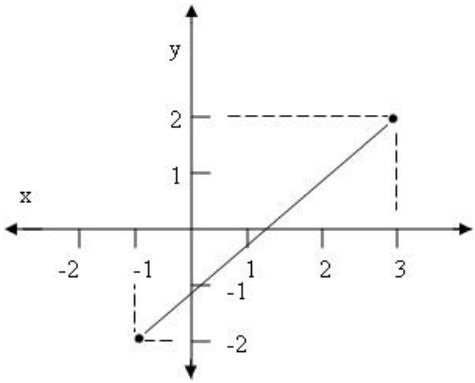
c) $(f\,o\,g)(x)$ si $f(x) = \dfrac{-x + \dfrac{2}{3}}{-3\,x - \dfrac{1}{2}}$ y $g(x-1) = \dfrac{-x+2}{x+3}$

4) Calcule $(f\,o\,g)(7)$ si f y g son funciones que cumplen $f(10)+6=0$ y $g(7)-10=0$.

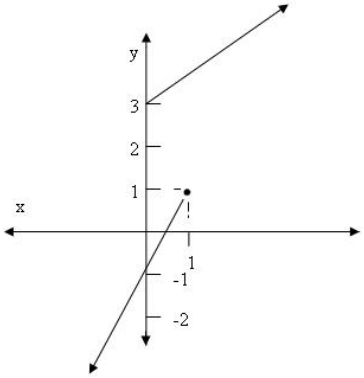
5) Encuentre a y b si $h:[a,8]\to[b,16]$ con $h(x)=\dfrac{-3\,x}{2}+7$ es biyectiva.

6) Analice las siguientes gráficas y determine cuáles son funciones.
Para aquellas que sean funciones, indique el dominio y el ámbito.

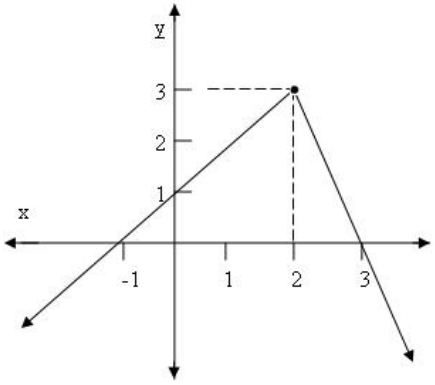
a)



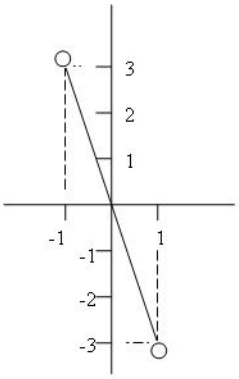
b)



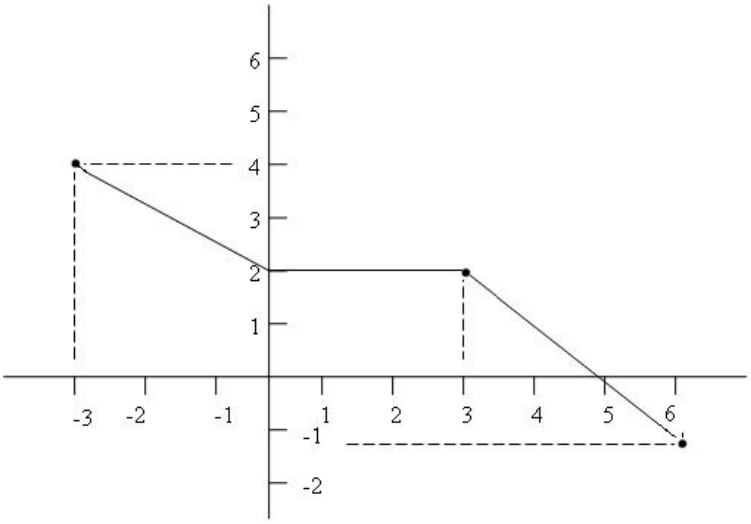
c)



d)



7) De acuerdo con la gráfica de $y = f(x)$, complete.



a) El dominio de la función es: _____.

b) El ámbito de la función es: _____.

c) La imagen de 4 es: _____.

d) La preimagen de 0 es: _____.

e) Si $x \in [0, 3]$ entonces $f(x) \in$: _____.

f) Si $x \in [3, 6]$ entonces $f(x) \in$: _____.

g) Si $f(x) \in [2, 4]$ entonces $x \in$: _____.

h) Si $f(x) \in [-1, 4]$ entonces $x \in$: _____.

2. Función Lineal

2.1. Definición

Sean m, b números reales. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = m\,x + b$ se llama **función lineal**.

Ejemplos

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 4\,x + 8 \quad m = 4\,, b = 8$

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{-1}{2}\,x \quad m = \dfrac{-1}{2}\,, b = 0$

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{3} \quad m = 0\,, b = \dfrac{1}{3}$

2.2. Gráfica de una función lineal

La gráfica de una función lineal es una recta. Es el conjunto de todos los puntos (x, y) con $y = m\,x + b$, esto es $(x, y) = (x, m\,x + b)$

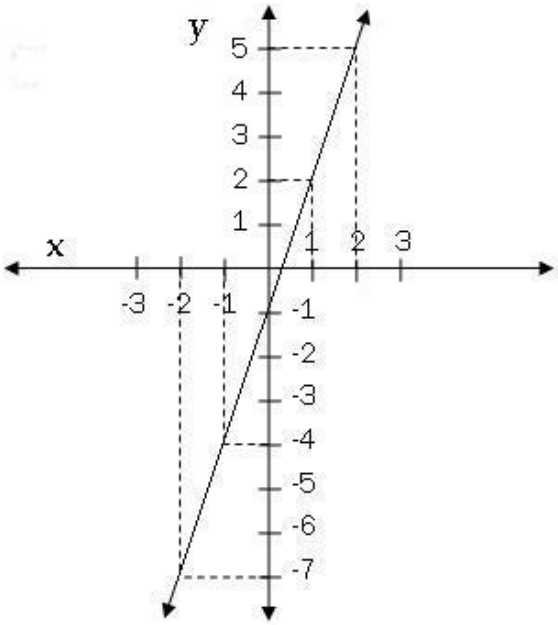
Ejemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3\,x - 1$

$y = 3\,x - 1$

Algunos valores de la función se presentan en la tabla

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-4	-1	2	5



Sin embargo, para representar gráficamente es suficiente analizar dos puntos.

De manera más formal el gráfico de la función lineal es

$$G_f = \{(x,\, m\,x + b) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$$

En el ejemplo anterior $G_f = \{(x,\, 3\,x - 1) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$

2.3. La pendiente de una recta

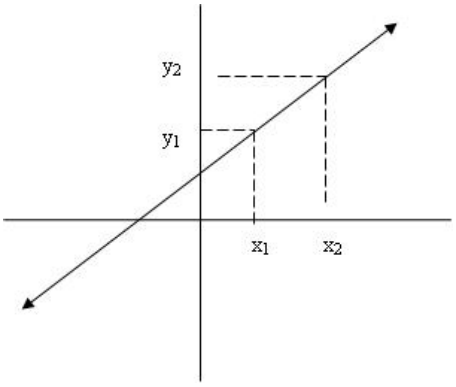
Cuando se conocen dos puntos de una recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ se cumple

$y_1 = m\,x_1 + b \Rightarrow y_1 - m\,x_1 = b$ y $y_2 = m\,x_2 + b \Rightarrow y_2 - m\,x_2 = b$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} y_1 - m\,x_1 &= y_2 - m\,x_2 \\ m\,x_2 - m\,x_1 &= y_2 - y_1 \\ m(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



m es una constante para cualquier par de puntos distintos $(x_1,\, y_1)$ y $(x_2,\, y_2)$ m se llama **pendiente** de la recta.

¿Qué representa m?

Considere la recta de ecuación $y = 5\,x + 1$. La **pendiente** de la recta es $m = 5$. Algunos valores de (x, y) se representan en la tabla

Los valores de x aumentan 1 unidad

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	1	6	11	16

Los valores de y aumentan 5 unidades
el incremento en x es $\Delta\, x = 1$
el incremento en y es $\Delta\, y = 5$

En general:

$$\boxed{\text{por cada unidad de incremento en la variable } x, \text{ la variable } y \text{ aumenta } m}$$

Simbólicamente

$$\boxed{f(x+1) - f(x) = m}$$

$$m = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$$

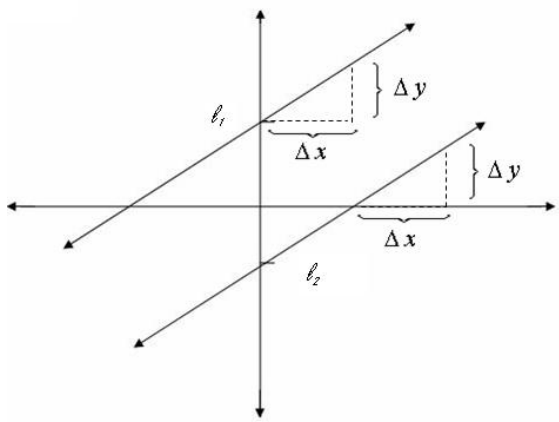
2.4. Rectas paralelas

Dos rectas $\ell_1 : \; y = m_1\, x + b_1$
$\ell_2 : \; y = m_2\, x + b_2$

Son paralelas si tienen igual pendiente

$$\boxed{\ell_1 \text{ y } \ell_2 \text{ paralelas si } m_1 = m_2}$$

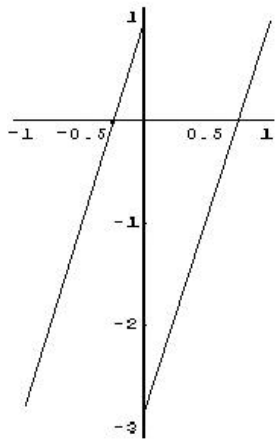
Como ℓ_1 y ℓ_2 tienen igual pendiente entonces las rectas no se intersecan, es decir, son paralelas.



Ejemplo

$\ell_1 :\ y = 4\,x - 3$ y $\ell_2 :\ y = 4\,x + 1$

Son rectas paralelas

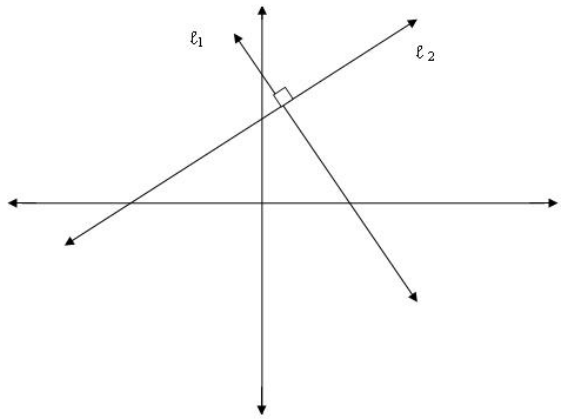


2.5. Rectas perpendiculares

Dos rectas $\ell_1 :\ y = m_1\,x + b_1$
$\ell_2 :\ y = m_2\,x + b_2$

Son perpendiculares si tienen $m_1 \cdot m_2 = -1$. Se escribe $\ell_1 \perp \ell_2$

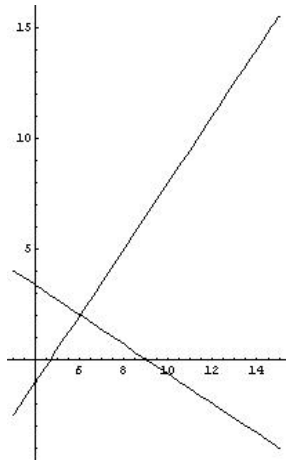
$$\boxed{\ell_1 \perp \ell_2 \text{ si } m_1 \cdot m_2 = -1}$$



Ejemplo

$\ell_1 :\ y = \dfrac{-2}{3}\,x + 6 \quad \text{y} \quad \ell_2 :\ y = \dfrac{3}{2}\,x - 7$

Son rectas perpendiculares



2.5.1. Ejemplos resueltos

1) Sea ℓ la recta que pasa por los puntos $A = (10, -2)$, $B = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{27}{5}\right)$

   a) Determine la ecuación de la recta ℓ.

   b) Determine la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por $D = \left(2, \dfrac{11}{2}\right)$ y es perpendicular a ℓ.

Solución

a) Determine la ecuación de la recta ℓ.
Calculamos primero la pendiente.
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\frac{27}{5} + 2}{\frac{3}{4} - 10} = \dfrac{\frac{37}{5}}{\frac{-37}{4}} = \dfrac{-4}{5}$, luego calculamos la intersección,
$b = y - m\,x$.
$b = -2 - \left(\dfrac{-4}{5} \cdot 10\right) = 6$, luego escribiendo la ecuación de la recta es $y = m\,x + b$,
obtenemos, $\ell :\ y = \dfrac{-4}{5}\,x + 6$

b) Determine la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por $D = \left(2, \dfrac{11}{2}\right)$ y es perpendicular a ℓ.
Como ℓ_2 perpendicular a ℓ, la pendiente de ℓ_2 será $m = \dfrac{5}{4}$, pues $\dfrac{-4}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = -1$, luego calculamos la intersección $b = y - m\,x$, $b = \dfrac{11}{2} - \left(\dfrac{5}{4} \cdot 2\right) = 3$ luego escribiendo la ecuación de la recta en su forma canónica $ya = m\,x + b$ obtenemos $\ell_2 :\ y = \dfrac{5}{4}\,x + 3$.

2) Sean $A = \left(\dfrac{10}{3}, 6\right)$ y $B = \left(\dfrac{2}{15}, -6\right)$. Encuentre las ecuaciones de las rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2 si se intersecan en A y ℓ_2 pasa por B.

Solución

Nótese que la recta ℓ_2 pasa por los puntos A y B, por lo que su pendiente será:

$$m_{\ell_2} = \frac{-6 - 6}{\frac{2}{15} - \frac{10}{3}} = \frac{-12}{\frac{-16}{5}} = \frac{15}{4}\ ; \quad m_2 = \frac{15}{4}$$

$$b = -6 - \left(\frac{15}{4}\right)\left(\frac{2}{15}\right) = -6 - \frac{1}{2} = \frac{-13}{2}\ ; \quad b = \frac{-13}{2}$$

Por lo que la ecuación de la recta ℓ_2 es $y = \dfrac{15}{4}\,x - \dfrac{13}{2}$, luego como $\ell_1 \perp \ell_2$, el producto de sus pendientes es -1, entonces $m_1 = -\dfrac{4}{15}$.

Como ℓ_1 pasa por A, entonces $b = 6 - \left(\dfrac{-4}{15}\right)\left(\dfrac{10}{3}\right) = 6 + \dfrac{8}{9} = \dfrac{62}{9}$.

Por lo que la ecuación de la recta ℓ_1 es $y = \dfrac{-4}{15}\,x + \dfrac{62}{9}$

3) Determine el valor de k para que las rectas ℓ_1 y ℓ_2 sean paralelas si $\ell_1 :\ y = 20\,k^2\,x + k\,x - 5\,x + k - 1 \quad \ell_2 :\ y = -15\,k^2\,x + 9\,k\,x - 2\,x - k + 1$

Solución

$\ell_1 :\ y = 20\,k^2\,x + k\,x - 5\,x + k - 1 = (20\,k^2 + k - 5)x + (k - 1)$

$\ell_2 :\ y = -15\,k^2\,x + 9\,k\,x - 2\,x - k + 1 = (-15\,k^2 + 9\,k2)x - (k + 1)$

Para que las rectas sean paralelas, sus pendientes deben de ser iguales.

$20\,k^2 + k - 5 = -15\,k^2 + 9\,k - 2 \Rightarrow 35\,k^2 - 8\,k - 3 = 0 \Rightarrow (5\,k + 1)(7\,k - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (5\,k + 1) = 0 \\ (7\,k - 3) = 0 \end{cases}$

$5\,k + 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-1}{5},\ 7\,k - 3 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{3}{7}$

Por lo que si $k = \dfrac{-1}{5} \vee k = \dfrac{3}{7}$, las pendientes de las rectas será iguales y las rectas serán paralelas.

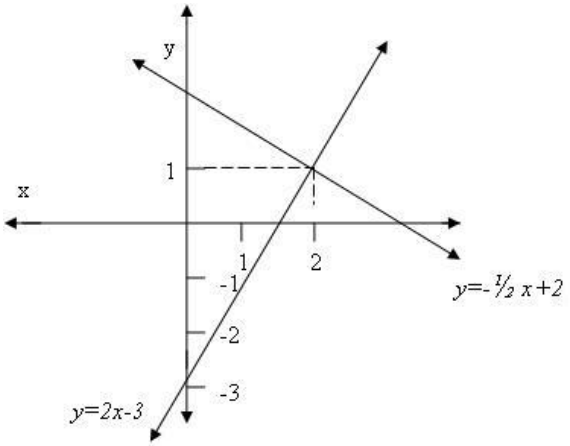
4) Grafique la recta de ecuación $y = 2\,x - 3$ y la recta de ecuación $y = \dfrac{-1}{2}\,x + 2$

$y = 2\,x - 3$

x	-1	0
y	-5	-3

$y = \dfrac{-1}{2}\,x + 2$

x	-2	0
y	3	2



3. Función Cuadrática

3.1. Definición:

Se llama función cuadrática a la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{con } f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donde a, b, c representan números reales y $a \neq 0$.

Ejemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 27$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = -3\,x^2 + 4$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{-1}{2}x^2 + 3\,x$

Otra forma de expresar la función cuadrática

La expresión $y = a\,x^2 + b\,x + c$ también se puede expresar en la forma

$$y = a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}\right)$$

Algunas características de la función cuadrática se pueden estudiar más fácilmente usando esta expresión.

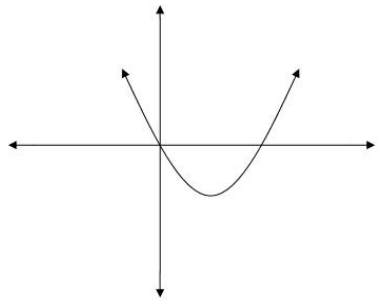
3.2. Gráfica de una función cuadrática

La gráfica de una función cuadrática se llama **parábola**. Es el conjunto de puntos del plano (x, y) donde $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

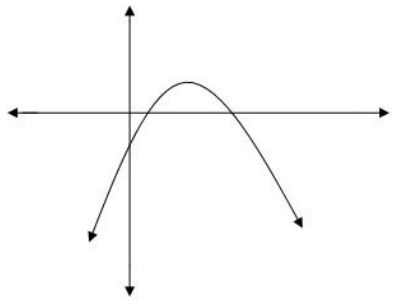
Para representar la función cuadrática se tienen que considerar las siguientes características de la parábola:

1) **Concavidad**. Una manera sencilla de referirnos a la concavidad es hacia donde "abre" la parábola.

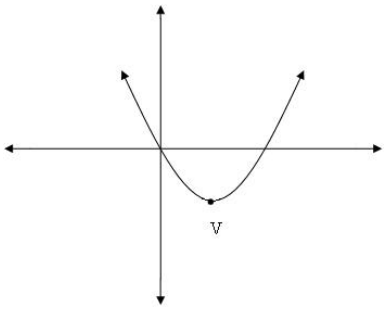
   - Hacia arriba si $a > 0$

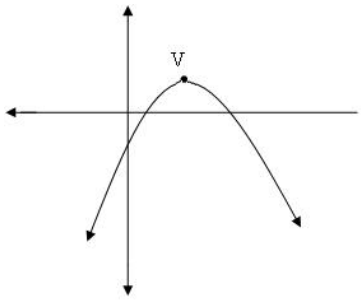


- Hacia abajo si $a < 0$



2) **<u>Vértice</u>** Es el punto extremo de la gráfica. Puede decirse que es el punto más alto o más bajo de la grafica.





Note que el signo de la expresión $a\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2$ depende únicamente del signo de a. Así:

- $a < 0 \Rightarrow a\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 < 0$
  $\Rightarrow a\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\right) < -\left(\dfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\right)$

- $a > 0 \Rightarrow a\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 > 0$
  $\Rightarrow a\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\right) > -\left(\dfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\right)$

Las coordenadas del vértice están dadas por el punto

$$\boxed{\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-b^2+4\,a\,c}{4\,a}\right)}$$

Además si la parábola es cóncava hacia arriba ($a > 0$) el vértice es un punto mínimo de esta curva, mientras que si la parábola es cóncava hacia abajo ($a < 0$) el vértice es un punto máximo.

Se llama discriminante de la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ a la expresión $b^2 - 4\,a\,c$ y se representa por Δ, así $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ por tanto el vértice está dado por el punto

$$\boxed{\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right)}$$

En resumen

$a < 0$	cóncava hacia abajo	$\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right)$ es un punto máximo
$a > 0$	cóncava hacia arriba	$\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right)$ es un punto minimo

Ejemplo

El vértice de la parábola que corresponde a la función

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 27$ está dado por

$$\mathbf{V} = \left(\frac{-3}{2\,\cdot\,2}, \frac{-(3^2 - 4\,\cdot\,2\,\cdot\,-27)}{4\,\cdot\,2}\right) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{-225}{8}\right)$$

Como la parábola es cóncava hacia arriba pues $a = 2 > 0$ entonces el punto $\mathbf{V} = \left(\frac{-3}{4}, \frac{-225}{8}\right)$ es un punto mínimo de la parábola.

Ejemplo

El vértice de la parábola que corresponde a la función

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 3\,x$ está dado por

$$\mathbf{V} = \left(\frac{-3}{2\,\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}, \frac{-\left(3^2 - 4\,\cdot\,\frac{-1}{2}\,\cdot\,0\right)}{4\,\cdot\,\frac{-1}{2}}\right) = \left(3, \frac{9}{2}\right)$$

La parábola es cóncava hacia abajo pues $a = \frac{-1}{2} < 0$ entonces el punto $\mathbf{V} = \left(3, \frac{9}{2}\right)$ es un punto máximo de la parábola.

3) **Eje de simetría**

Si se calcula la imagen de $\dfrac{-b}{2\,a}+t$ se tiene

$$f\left(\frac{-b}{2\,a}+t\right)=a\left(\frac{-b}{2\,a}+t\right)^2+b\left(\frac{-b}{2\,a}+t\right)+c=$$

$$a\left[\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2+2\left(\frac{-b}{2\,a}\right)\cdot t+t^2\right]+b\left(\frac{-b}{2\,a}+t\right)+c=$$

$$a\left[\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2+t^2\right]+a\left[2\left(\frac{-b}{2\,a}\right)\cdot t\right]+b\left(\frac{-b}{2\,a}\right)+b\,t+c=$$

$$a\left[\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2+t^2\right]-b\cdot t+b\left(\frac{-b}{2\,a}\right)+b\,t+c=$$

$$a\left[\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2+t^2\right]+b\cdot t+b\left(\frac{-b}{2\,a}\right)-b\,t+c=$$

$$a\left[\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2+\frac{b\cdot t}{a}+t^2\right]+b\left(\frac{-b}{2\,a}\right)-b\,t+c=$$

$$a\left[\left(\frac{-b}{2\,a}\right)^2+2\left(\frac{-b}{2\,a}\right).(-t)+(-t)^2\right]+b\left(\frac{-b}{2\,a}-t\right)+c=$$

$$a\left(\frac{-b}{2\,a}-t\right)^2+b\left(\frac{-b}{2\,a}-t\right)+c=f\left(\frac{-b}{2\,a}-t\right)$$

Se puede verificar que $f\left(\dfrac{-b}{2\,a}+t\right)=f\left(\dfrac{-b}{2\,a}-t\right)$

Esto se puede interpretar como que aquellas preimágenes que equidistan de $\dfrac{-b}{2\,a}$ tienen igual imagen, esto es

$$\boxed{\text{Si } \left|x_1-\left(\frac{-b}{2\,a}\right)\right|=\left|x_2-\left(\frac{-b}{2\,a}\right)\right| \text{ entonces } f(x_1)=f(x_2)}$$

Se dice entonces que la recta $x=\dfrac{-b}{2\,a}$ es un eje que divide a la parábola en dos partes simétricas.

$$\boxed{\text{Eje de simetría } x=\frac{-b}{2\,a}}$$

Ejemplo

Considere la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = -x^2 + 6\,x - 5$

El vértice $\mathbf{V} = \left(\dfrac{-6}{2\,\cdot\,-1}, \dfrac{-(6^2 - 4\,\cdot\,-1\,\cdot\,-5}{4\,\cdot\,-1}\right) = (3, 4)$ y el eje de simetría es $x = 3$.

Los números reales 2.5 y 3.5 equidistan de $x = 3$. Si se calculan las imágenes de $x = 2.5$ y de $x = 3.5$ se tiene

$f(2.5) = -2.5^2 + 6\,\cdot\,2.5 - 5 = -6.25 + 15 - 5 = 3.75 \quad f(2.5) = 3.75$
$f(3.5) = -3.5^2 + 6\,\cdot\,3.5 - 5 = -12.25 + 21 - 5 = 3.75 \quad f(3.5) = 3.75$

Se cumple que $\quad f(2.5) = f(3.5)$

En la siguiente tabla se puede apreciar que aquellas preimágenes que equidistan de 3 tienen igual imagen.

x	-3	0	2	2.5	3	3.5	4	6	9
$y = -x^2 + 6\,x - 5$	-32	-5	3	3.75	4	3.75	3	-5	-32

4) **Intersección con el eje Y**

El punto de intersección de la gráfica de una función con el eje Y es $(0, y)$.
Dado que $f(0) = c$ entonces el punto de intersección es $0, c$

$$\boxed{\text{La parábola corta al eje Y en } (0, c)}$$

Ejemplos

- La parábola de ecuación $y = 2\,x^2 + 3\,x - 27$ corta al eje Y en el punto $(0, -27)$.
- La parábola de ecuación $y = -3\,x^2 + 4$ corta al eje Y en el punto $(0, 4)$.
- La parábola de ecuación $y = \dfrac{-1}{2}\,x^2 + 3\,x$ corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.
- La parábola de ecuación $y = -x^2 + 6\,x - 5$ corta al eje Y en el punto $(0, -5)$.

5) **<u>Intersección con el eje X</u>**

La grafica de una función interseca al eje X en un punto donde $y = 0$ por tanto hay que resolver la ecuación

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Esta ecuación es de grado 2 y puede tener en los números reales 2 soluciones, 1 solución o ninguna solución.

Las ecuaciones $a\,x^2+b\,x+c = 0$ y $a\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\right) = 0$ son equivalentes, por lo tanto $\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(\dfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right)$. Como $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$. Se debe resolver la ecuación $\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4\,a^2}$ cuya solución depende de Δ.

a) Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene solución y la parábola no corta al eje X.

b) Si $\Delta = 0$ hay que resolver $\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 = 0$ y la única solución es $x = \dfrac{-b}{2\,a}$. Por tanto el punto de intersección es $\left(\dfrac{-b}{2\,a}, 0\right)$ que también es el vértice de la parábola.

c) Si $\Delta > 0$ la ecuación $\left(x+\dfrac{b}{2\,a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4\,a^2}$ tiene 2 soluciones $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ y $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$. Entonces la parábola corta al eje X en dos puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

$\Delta < 0$	no corta al eje X
$\Delta = 0$	corta al eje X en $\left(\dfrac{-b}{2\,a}, 0\right)$
$\Delta > 0$	corta al eje X en $\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}, 0\right)$ y en $\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}, 0\right)$

Ejemplos

Función cuadrática	ecuación	Δ	intersecciones con el eje X
$f(x) = -3\,x^2 + 2\,x + 2$	$-9\,x^2 + 6\,x - 5 = 0$	-144	no hay
$f(x) = 4\,x^2 + 6\,x + 9$	$4\,x^2 + 12\,x + 9 = 0$	0	$\mathbf{V} = \left(\frac{-3}{2}, 0\right)$
$f(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 27$	$2\,x^2 + 3\,x - 27 = 0$	225	$\left(\frac{-9}{2}, 0\right)$ y $(3, 0)$

6) **<u>Ámbito de una función cuadrática</u>**

Como se analizó antes el vértice es un punto máximo o mínimo según la parábola sea cóncava hacia arriba o hacia abajo. Por esto cualquier imagen se compara con $\frac{-\Delta}{4\,a}$ que es el valor de la ordenada en $\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right)$

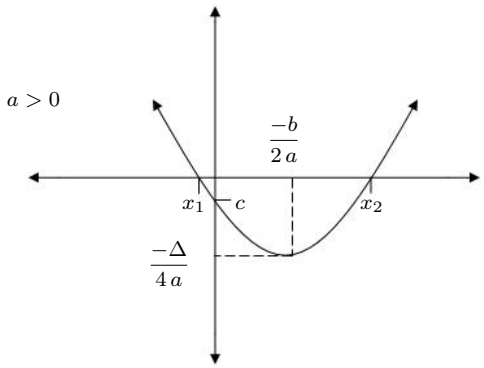
Entonces

	Concavidad	Vértice	Ámbito
$a < 0$	hacia abajo	$\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right)$ máximo	$\left\{y \in \mathbb{R}/y \leq \frac{-\Delta}{4\,a}\right\} = \left]-\infty, \frac{-\Delta}{4\,a}\right]$
$a > 0$	hacia arriba	$\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right)$ mínimo	$\left\{y \in \mathbb{R}/y \geq \frac{-\Delta}{4\,a}\right\} = \left[\frac{-\Delta}{4\,a}, \infty\right[$

Ejemplos

Función cuadrática	Vértice	Ámbito
$f(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 27$	$\mathbf{V} = \left(\frac{-3}{4}, \frac{-225}{8}\right)$	$\left\{y \in \mathbb{R}/y \geq \frac{-225}{8}\right\} = \left[\frac{-225}{8}, \infty\right[$
$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 3\,x$	$\mathbf{V} = \left(3, \frac{9}{2}\right)$	$\left\{y \in \mathbb{R}/y \leq \frac{9}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{9}{2}\right]$

3.3. Análisis de la función cuadrática a partir de la gráfica

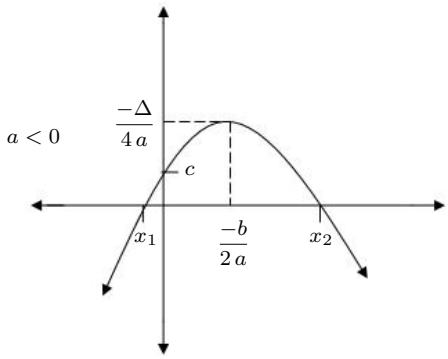


Ámbito: $\left[\dfrac{-\Delta}{4\,a}, \infty\right[$

Creciente: $\left]\dfrac{-b}{2\,a}, \infty\right[$

Decreciente: $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2\,a}\right[$

V: punto mínimo.
$f(x) > 0$ si $x \in]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_2, \infty[$
$f(x) < 0$ si $x \in]x_1, x_2[$
$f(x) = 0$ si $x \in \{x_1, x_2\}$



Ámbito: $\left[-\infty, \dfrac{-\Delta}{4\,a}\right[$

Creciente: $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2\,a}\right[$

Decreciente: $\left]\dfrac{-b}{2\,a}, \infty\right[$

V: punto máximo.
$f(x) > 0$ si $x \in]x_1, x_2[$
$f(x) < 0$ si$x \in]-\infty, x_1[\, \cup\,]x_2, \infty[$
$f(x) = 0$ si $x \in \{x_1, x_2\}$

3.3.1. Ejemplos

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -4(x-1)^2 + 9$
   a) Determine el ámbito de la función $f(x)$.
   b) Indique el conjunto donde la función es creciente.
   c) Usando intervalos exprese el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \leq 0\}$

   Solución

   a) Determine el ámbito de la función $f(x)$.
   $f(x) = 9 - 4(x-1)^2 = (3 - 2(x-1))(3 + 2(x-1)) = (-2\,x + 5)(2\,x + 1)$, por lo que
   $f(x) = -4\,x^2 + 8\,x + 5$. La gráfica es una parábola cóncava hacia abajo.
   Hay que obtener el vértice:
   $x = \dfrac{-b}{2\,a}\,,\ x = \dfrac{-8}{2\,(-4)} = 1\ \ y = f(1) = 9$
   El vértice es $\mathbf{V} = (1, 9)$ y el ámbito es $Amb_f =]-\infty, 9]$

b) Indique el conjunto donde la función es creciente.
Al ser la parábola cóncava hacia abajo y tener vértice en $\mathbf{V} = (1, 9)$, la función será creciente en $]-\infty, 1[$.

c) Usando intervalos exprese el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \leq 0\}$
La parábola es cóncava hacia abajo y corta el eje X en $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ por lo que $f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right] \cup \left]\frac{5}{2}, \infty\right]$ y $S = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right] \cup \left]\frac{5}{2}, \infty\right]$.

2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 + b\,x + c$ y $\ell : y = 5\,x - 3$ la recta que pasa por los puntos $(-1,\ f(-1))$ y $(2,\ f(2))$. Encuentre el ámbito de $f(x)$.

Hallando la función $f(x)$.
$y(-1) = 5(-1) - 3 = -8$, $y(2) = 5(2) - 3 = 7$ entonces los puntos $(-1, -8)$ y $(2, 7) \in \ell$, se deduce que

$$f(-1) = -8,\ f(2) = 7 \Rightarrow f(-1) = 1 - b + c = -8, \quad f(2) = 4 + 2\,b + c = 7$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:
$$\left\{\begin{array}{l} 1 - b + c = -8 \\ 4 + 2\,b + c = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -b + c = -9 \\ 2\,b + c = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\,b + 2\,c = -18 \\ 2\,b + c = 3 \end{array}\right.$$
$\Leftrightarrow 3\,c = -15 \Leftrightarrow c = -5$

$1 - b - 5 = -8 \Leftrightarrow b = 4$, por lo que $f(x) = x^2 + 4\,x - 5$.

Hallando el ámbito de $f(x)$:
$f(x)$ cuadrática y cóncava hacia arriba.

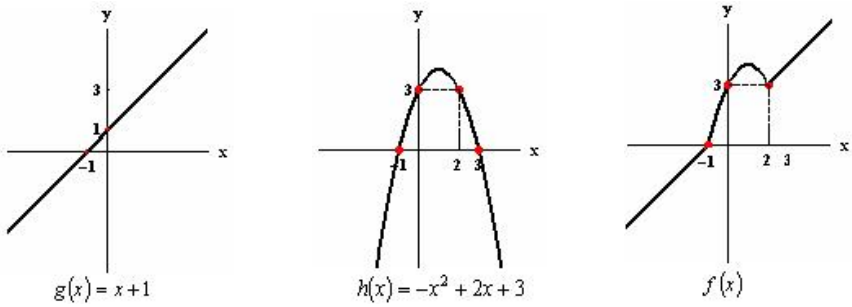
$$\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2\,a}, f\left(\frac{-b}{2\,a}\right)\right), \frac{-b}{2\,a} = \frac{-4}{2} = -2, \text{ y } f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 5 = -9$$

$Amb_f = [-9, \infty[$

3) Represente gráficamente $y = f(x)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x^2 + 2\,x + 3 & si\ x \in [-1, 2] \\ x + 1 & si \notin [-1, 2] \end{array}\right.$$

Primero grafiquemos cada una de las funciones que determinan $f(x)$, en todo su dominio, y luego lo restringimos de acuerdo con la definición de $f(x)$



3.3.2. Ejercicios

I) Para cada función indique

a) Vértice y concavidad.

b) Ámbito.

c) Intervalo donde $f(x)$ es creciente.

d) Intervalo donde $f(x)$ es decreciente.

e) Intersecciones con los ejes.

f) Intervalo donde se cumple $f(x) > 0$

g) Intervalo donde se cumple $f(x) < 0$

1) $f(x) = 3\,x^2 + 5\,x - 2$
2) $f(x) = -3\,x^2 - 5\,x + 2$
3) $f(x) = -x^2 + 2\,x - 5$
4) $f(x) = -x^2 + 6\,x - 9$
5) $f(x) = 4\,x^2 - 12\,x + 13$
6) $f(x) = 9\,x^2 - 42\,x + 49$

II) Exprese para cada función $f(x)$ del ejercicio anterior en la forma $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\,a}$

III) Se el vértice de la parábola es $V = (-3, -5)$ complete la tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	-3			$\dfrac{-9}{2}$	

4. Función Inversa

4.1. Definición

Dada la función $f : A \to B$ biyectiva. Se define la función inversa de f, denotada $f^{-1}(x)$ por

$$f^{-1} : B \to A$$
$$f^{-1}(u) = v \qquad \textit{si y solo si } f(v) = u$$

En general fof^{-1} cumple que:

$$(f\, o\, f^{-1})(x) = x, \text{ para } x \in B$$
$$(f^{-1}\, o\, f)(x) = x, \text{ para } x \in A$$

4.2. Ejemplos

1) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{-2}{3}\, x + 1$ es biyectiva (comprobar). Entonces la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface

$$f^{-1}(u) = v \qquad \textit{si y solo si } f(v) = u$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{-2}{3}\, v + 1 &= u \\ -2\, v + 3 &= 3\, u \\ 2\, v - 3 &= -3\, u \\ 2\, v &= -3\, u + 3 \\ v &= \frac{-3}{2}\, u + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Entonces la función inversa cumple $f^{-1}(u) = \dfrac{-3}{2}\, u + \dfrac{3}{2}$

Entonces

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{-3}{2}\, x + \frac{3}{2}$$

En este caso se puede verificar que

$$(f^{-1}\, o\, f)(x) = x \qquad \text{y} \qquad (f\, o\, f^{-1})(x) = x$$

2) Considere la función

$$g : [2, \infty[\to [-16, \infty[$$
$$g(x) = x^2 - 4\,x - 12$$

La función $g(x)$ se puede expresar por

$$g(x) = (x-2)^2 - 16$$
$$y = (x-2)^2 - 16$$

Para encontrar la función inversa hay que encontrar x en la expresión.

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2 - 16 \\ (x-2)^2 &= y + 16 \\ \sqrt{(x-2)^2} &= \sqrt{y+16} \\ |x-2| &= \sqrt{y+16} \qquad \text{como } x \geq 2,\ |x-2| = x-2 \\ x-2 &= \sqrt{y+16} \\ x &= 2 + \sqrt{y+16} \end{aligned}$$

La función inversa es

$$g^{-1} : [-16, \infty[\to [2, \infty[$$
$$g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+16}$$

3) $h :]-\infty, -3] \to]-\infty, 16]$

$$h(x) = -x^2 - 6\,x + 7$$

Para encontrar la inversa entonces se escribe

$$h(x) = -(x+3)^2 + 16$$

Se puede comprobar que es biyectiva (ejercicio).
Para encontrar la inversa se despeja x en

$$\begin{aligned} y &= -(x+3)^2 + 16 \\ (x+3)^2 &= 16 - y \\ \sqrt{(x+3)^2} &= \sqrt{16-y} \\ |x+3| &= \sqrt{16-y} \end{aligned}$$

Dado que $x \leq -3$ entonces $x + 3 < 0$ y $|x+3| = -x-3$

Entonces

$$\begin{aligned} -x-3 &= \sqrt{16-y} \\ -x &= 3 + \sqrt{16-y} \\ x &= -3 - \sqrt{16-y} \end{aligned}$$

La función inversa es

$h^{-1} :]-\infty, 16] \to]-\infty, -3]$

$h^{-1}(x) = -3 - \sqrt{16 - x}$

4.3. Ejercicios

1) Encuentre la función inversa de

   a) $h : [-1, 4] \to [-3, -7]$ con $h(x) = -2\,x + 5$

   b) $h :]-\infty, 5] \to [-16, \infty[$ con $h(x) = x^2 - 10\,x + 9$

   c) $h : [-3, \infty[\to]-\infty, 16]$ con $h(x) = -x^2 - 6\,x + 7$

2) Represente gráficamente

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = -2\,x^2 + x + 3$

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\,x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5. Función Exponencial

Sea a un número real positivo. Se define la función exponencial de base a por:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = a^x$$

Ejemplo La función exponencial de base $\frac{3}{2}$ es:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Podemos calcular algunas imágenes

$$f(-2) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$$
$$f(-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}$$
$$f(0) = \left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$$
$$f(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$$
$$f(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$f(\pi) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}$$

$$f(-2) = \frac{4}{9}$$
$$f(-1) = \frac{2}{3}$$
$$f(0) = 1$$
$$f(1) = \frac{3}{2}$$
$$f(2) = \frac{9}{4}$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$f(\pi) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}$$

5.1. Propiedades

1) $f(0) = a^0 = 1$ La gráfica pasa por $(0, 1)$

2) $f(1) = a^1 = a$ La gráfica pasa por $(1, a)$

3) $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
   Ámbito: $]0, \infty[$

4) Si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función creciente.

5) Si $0 < a < 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente.

5.1.1. Comportamiento de la función en los extremos del dominio

Primer caso Si $a > 1$

1) Cuando x toma valores cada vez mayores y tiende a ∞, entonces a^x tiende a ∞. Esto se puede expresar por:

   $x \to \infty \;\Rightarrow a^x \to \infty$

2) Cuando x toma valores cada vez más pequeños y tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a 0. Esto se puede expresar por:

   $x \to -\infty \;\Rightarrow a^x \to 0$

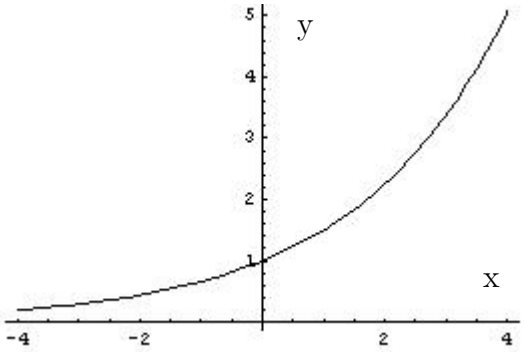
   En este caso la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva. $y = a^x$

Ejemplo Para la función $f(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ se cumple:

Si $x \to \infty$ entonces $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x \to \infty$

Si $x \to -\infty$ entonces $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x \to 0$

Gráfica



Segundo caso Si $0 < a < 1$

1) Cuando x toma valores cada vez mayores y tiende a ∞ entonces a^x tiende a 0. Esto se puede expresar por:

   $x \to \infty \;\Rightarrow a^x \to 0$

   En este caso la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva. $y = a^x$

2) Cuando x toma valores cada vez más pequeños y tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a infinito. Esto se puede expresar por:

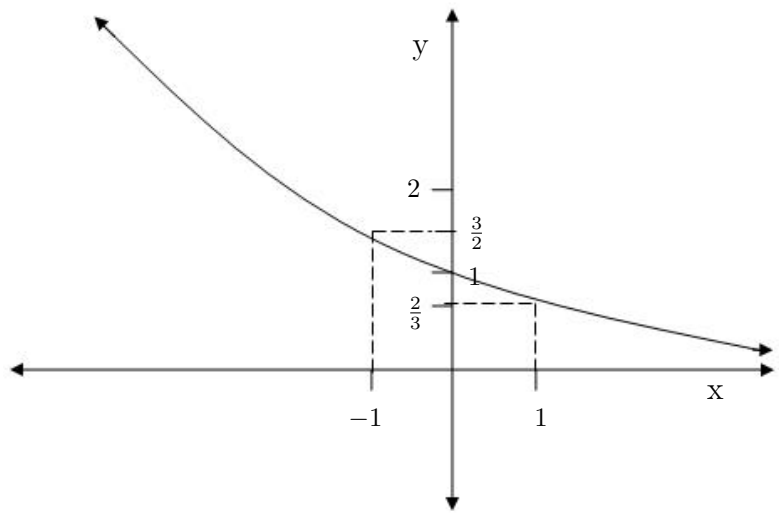
$x \to -\infty \ \Rightarrow a^x \to \infty$

Ejemplo Para la función $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ se cumple:

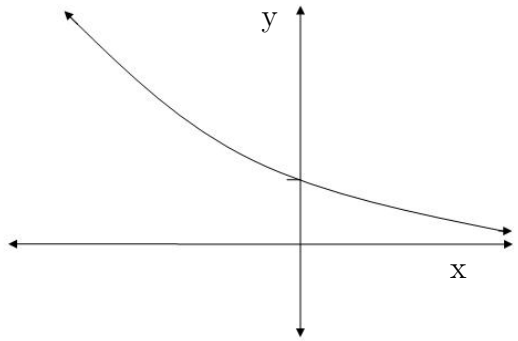
Si $x \to \infty$ entonces $\left(\frac{2}{3}\right)^x \to 0$

Si $x \to -\infty$ entonces $\left(\frac{2}{3}\right)^x \to \infty$

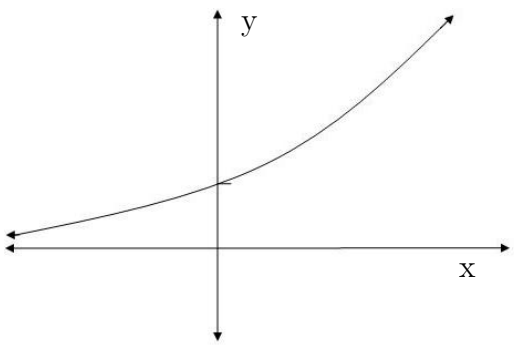
Gráfica



Cuadro resumen $0 < a < 1$

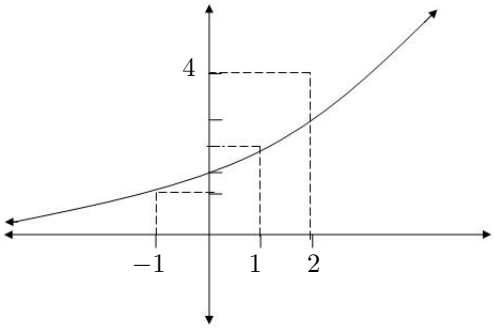
	Ámbito: $]0, \infty[$ Corta al eje Y en $(0, 1)$ No corta al eje X, pues es una asíntota horizontal. Decreciente $x \to -\infty \Rightarrow a^x \to \infty$ $x \to \infty \Rightarrow a^x \to \infty$

Cuadro resumen $a > 1$

	Ámbito: $]0, \infty[$ Corta al eje Y en $(0, 1)$ No corta al eje X, pues es una asíntota horizontal. Creciente $x \to -\infty \Rightarrow a^x \to 0$ $x \to \infty \Rightarrow a^x \to \infty$

5.1.2. Ejemplos

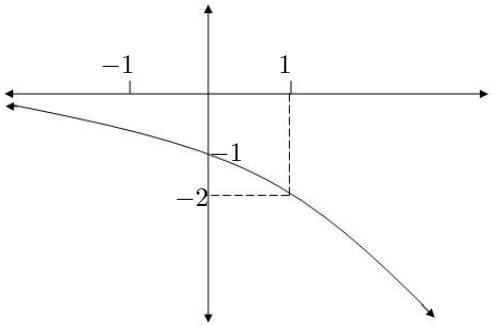
1) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2^x$ tiene ámbito $]0, \infty[$. Es creciente y el eje X es una asíntota horizontal.



2) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -2^x$.
Sabemos que $2^x > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $-2^x < 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$
Ámbito : $] - \infty, 0[$

$x \to \infty \Rightarrow 2^x \to \infty$ entonces $x \to \infty \Rightarrow -2^x \to -\infty$
$x \to -\infty \Rightarrow 2^x \to 0$ entonces $x \to -\infty \Rightarrow -2^x \to 0$

La función $y = 2^x$ es creciente, entonces $y = -2^x$ es decreciente.



x	-1	0	1
-2^x	$\frac{-1}{2}$	-1	-2

3) Determine el ámbito de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 3 - 4 \cdot 3^x$

Solución

$$\begin{aligned} 3^x &> 0 \\ -4 \cdot 3^x &< 0 \\ 3 - 4 \cdot 3^x &< 3 \\ g(x) &< 3 \qquad \text{Ámbito }]-\infty, 3[\end{aligned}$$

4) Calcule la preimagen de $\frac{23}{9}$ en la función $g(x) = 3 - 4 \cdot 3^x$.

Solución

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cdot 3^x &= \frac{23}{9} \\ -4 \cdot 3^x &= \frac{23}{9} - 3 \\ -4 \cdot 3^x &= \frac{-4}{9} \\ 3^x &= \frac{1}{9} \\ 3^x &= 3^{-2} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

La preimagen de $\frac{23}{9}$ es -2

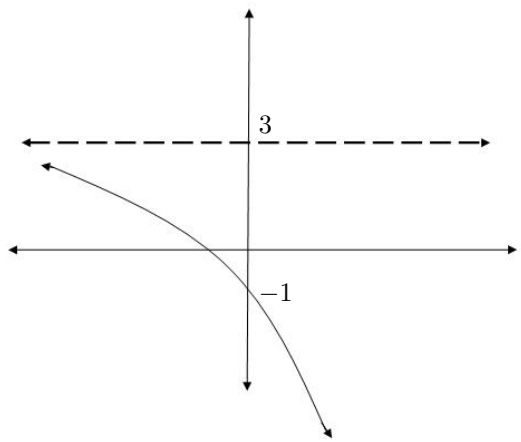
$g(-2) = \frac{23}{9}$

5) Cuál es la asíntota de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 3 - 4 \cdot 3^x$

Solución

Se sabe que $3^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces
$3^x > 0 \Rightarrow -4 \cdot 3^x < 0 \Rightarrow 3 - 4 \cdot 3^x < 3$
La asíntota es la recta horizontal $y = 3$.

6) Gráfica de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 3 - 4 \cdot 3^x$



6. Función Logarítmica

La función $f : \mathbb{R} \to]\,0, \infty[$ con $f(x) = a^x$, $a > 0$ es una función biyectiva y tiene inversa.

La función inversa se llama **función logarítmica de base** a y se define por

$$g :]\,0, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \log_a x$$

Se cumple entonces que $y = \log_a x$ es equivalente a $x = a^y$.

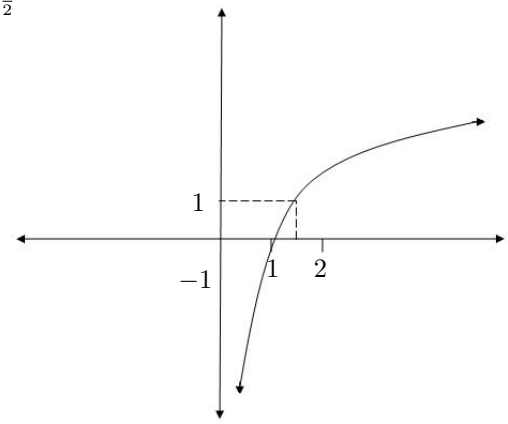
Ejemplo $g :]\,0, \infty[\to \mathbb{R}$
$g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$

Se pueden obtener algunos pares (x, y) del gráfico de $g(x)$ si se obtienen antes algunos de su inversa.

x	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$
-2	$\frac{4}{9}$
-1	$\frac{2}{3}$
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$

x	$\log_{\frac{3}{2}} x$
$\frac{4}{9}$	-2
$\frac{2}{3}$	-1
1	0
$\frac{3}{2}$	1
$\frac{9}{4}$	2

Gráfica de $y = log_{\frac{3}{2}} x$



6.1. Propiedades para $g(x) = \log_a x$

1) $g(1) = \log_a 1 = 0$ La gráfica pasa por $(1, 0)$

2) $g(a) = \log_a a = 1$ La gráfica pasa por $(a, 1)$

3) El ámbito de la función es $\mathbb{R}$.

4) Si $a > 1$ entonces $g(x) = \log_a x$ es creciente.

5) Si $0 < a < 1$ entonces $g(x) = \log_a x$ es decreciente.

6.1.1. Comportamiento de la función en los extremos del dominio

Primer caso Si $a > 1$

1) Cuando x toma valores cercanos a 0, pero mayores que 0, decimos que x tiende a 0 por la derecha y $\log_a x$ tiende a ∞.

   $x \to 0^+ \Rightarrow \log_a x \to -\infty$

   En este caso la recta $x = 0$ (eje y) es una asíntota vertical de la curva $y = log_a x$

2) Cuando x toma valores cada vez mayores y tiende a ∞ entonces $\log_a x$ tiende a ∞.

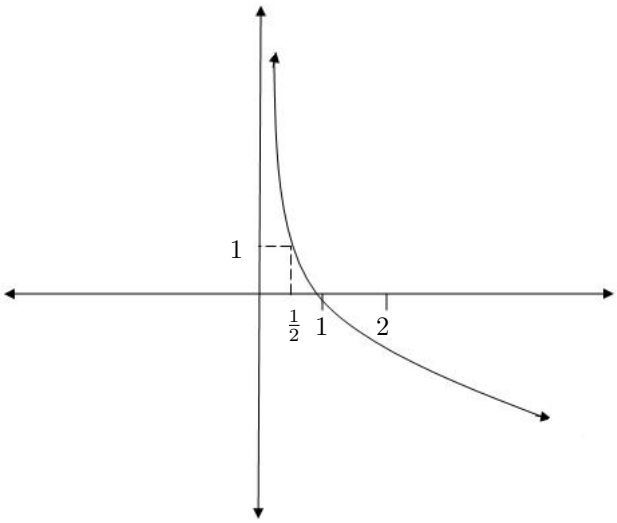
   $x \to \infty \Rightarrow \log_a x \to \infty$

   Estas condiciones están ilustradas en la gráfica anterior de $y = \log_{\frac{3}{2}} x$

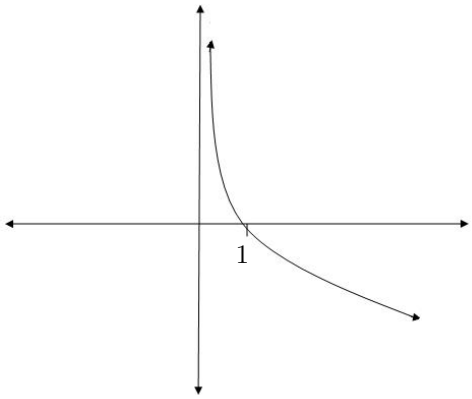
Segundo caso Si $0 < a < 1$

1) Cuando x toma valores cercanos a 0, pero mayores que 0 entonces $\log_a x$ tiende a ∞.
   $x \to 0^+ \Rightarrow \log_a x \to \infty$
   En este caso la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical de la curva. $y = \log_a x$
2) Cuando x toma valores cada vez mayores y tiende a ∞ entonces $\log_a x$ tiende a $-\infty$.
   $x \to \infty \Rightarrow \log_a x \to -\infty$

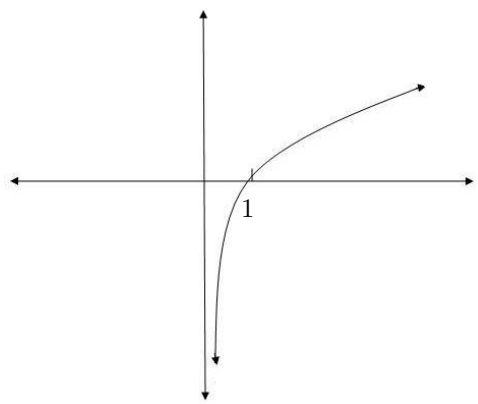
Ejemplo $y = log_{\frac{1}{2}} x$



Cuadro resumen $0 < a < 1$ $\quad g(x) = \log_a x$

	Ámbito: $\mathbb{R}$ Corta al eje X en $(1, 0)$ No corta al eje Y, pues es una asíntota vertical. $\log_a a = 1$ Decreciente y cóncava hacia arriba $x \to 0^+ \Rightarrow \log_a x \to \infty$ $x \to \infty \Rightarrow \log_a x \to -\infty$ Si $x \in]0, 1[$ entonces $\log_a x > 0$ Si $x \in]1, \infty[$ entonces $\log_a x < 0$

Cuadro resumen $a > 1$

	Ámbito: $\mathbb{R}$ Corta al eje X en $(1, 0)$ No corta al eje Y, pues es una asíntota vertical. $\log_a a = 1$ Creciente y cóncava hacia abajo. $x \to 0^+ \Rightarrow \log_a x \to -\infty$ $x \to \infty \Rightarrow \log_a x \to \infty$ Si $x \in]0, 1[$ entonces $\log_a x < 0$ Si $x \in]1, \infty[$ entonces $\log_a x > 0$

6.2. Otras propiedades de los logaritmos

A partir de las propiedades de la función exponencial se pueden obtener otras propiedades para los logaritmos
Si tenemos que

$a^{m+n} = u \ ; \ a^m = v \ ; \ a^n = w$

y se sabe que $\quad a^{m+n} = a^m a^n$ y $u = v \cdot w$

Además

$$\begin{aligned} a^{m+n} = u &\Rightarrow \log_a u = m + n \\ a^m = v &\Rightarrow \log_a v = m \\ a^n = w &\Rightarrow \log_a w = n \end{aligned}$$

Se puede escribir entonces

$$\log_a u = \log_a v + \log_a w$$

$$\boxed{\log_a(v \cdot w) = \log_a v + \log_a w}$$

De igual manera obtenemos las otras propiedades.

1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = log_a M - \log_a N$

3) $\log_a M^n = n \log_a M$

4) $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n} \log_a M$

5) $\log_a 1 = 0$

6) $\log_a a = 1$

Estas propiedades están definidas para M , N , a números reales positivos. Sin embargo, no siempre se pueden hacer las equivalencias pues tienen dominios diferentes.

Por ejemplo la función definida por $h(x) = \log_a(x^2 - 1)$ tiene dominio $D_h =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

Sin embargo la función definida por $g(x) = \log_a(x - 1) + \log_a(x + 1)$ tiene dominio máximo $D_g =]1, \infty[$

Esta situación hace necesario verificar las soluciones que se obtienen al resolver ecuaciones e inecuaciones logarítmicas.

6.3. El número real e

Complete la tabla siguiente

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.5937
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	
0.000001	

Cuando x toma valores positivos muy cercanos a 0 la expresión $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ toma cercanos a 2. 71828...

El número real que se tiene como límite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ se denota por e.

Se define entonces

$f : \mathbb{R} \to]\,0, \infty[\quad f(x) = e^x$

$g :]\,0, \infty[\to \mathbb{R} \quad g(x) = \log_e x$

Dado que $e > 1$, las funciones definidas por $y = e^x$ y $y = \log_e x$ tienen las características enunciadas para $a > 1$.

El $\log_e x$ se llama logaritmo natural de x y se denota:

$$\log_e x = \ln x$$

6.4. ¿Cómo resolver una ecuación logarítmica?

Ejemplo

La solución de la ecuación $\log_3(x+5) - \log_3(x-3) = 2$ es $x = 4$. El procedimiento es el siguiente:

$$\log_3(x+5) - \log_3(x-3) = 2$$
$$\Rightarrow \log_3\left(\frac{x+5}{x-3}\right) = 2 \Rightarrow \left(\frac{x+5}{x-3}\right) = 3^2 \Rightarrow \frac{x+5}{x-3} = 9 \Rightarrow x+5 = 9(x-3)$$
$$\Rightarrow x+5 = 9\,x - 27 \Rightarrow x - 9x = -27 - 5 \Rightarrow -8\,x = -32 \Rightarrow x = \frac{-32}{-8} \Rightarrow x = 4.$$

En las ecuaciones logarítmicas se debe verificar la solución probando la ecuación inicial.

Prueba

$\log_3(x+5) - \log_3(x-3) = 2$

$\log_3(4+5) - \log_3(4-3) = 2$

$\log_3 9 - \log_3 1 = 2$

$\log_3 3^2 - \log_3 1 = 2$

$2\log_3 3 - 0 = 2$

$2 \cdot 1 - 0 = 2$

$2 = 2$ **Verdadero**

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{4\}$

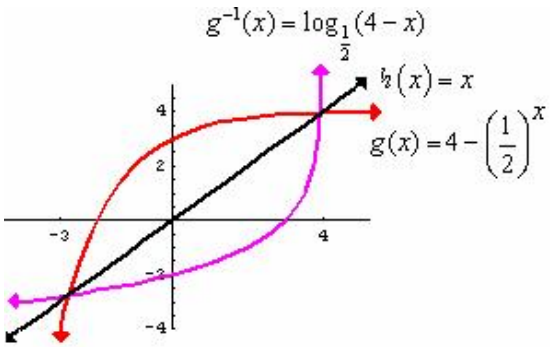
6.5. Ejemplos

1) Considere la función $g : \mathbb{R} \to]-\infty, 4[$ definida por $g(x) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

   Defina en forma completa la función $g^{-1}(x)$. Represente en un mismo sistema de ejes las funciones $g(x)$, $g^{-1}(x)$ y $h(x)$ si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $h(x) = x$.

   Solución

   $g(x) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow y = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 - y \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{2}}(4-y)$
   $\Rightarrow y = \log_{\frac{1}{2}}(4-x) \Rightarrow g^{-1} :]-\infty, 4[\to \mathbb{R}$ con $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4-x)$



2) Determine el ámbito de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 5 - 3 \cdot 4^{-x+1}$

   Solución

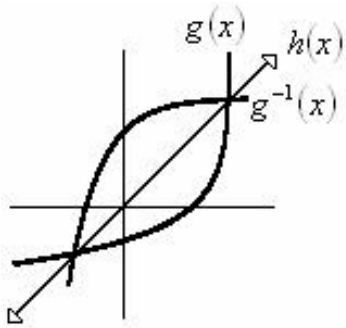
   $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad 4^{-x+1} > 0 \Rightarrow -3 \cdot 4^{-x+1} < 0 \Rightarrow 5 - 3 \cdot 4^{-x+1} < 5 \Rightarrow f(x) < 5$ entonces el ámbito es $]-\infty, 5[$.

3) Considere la función $g : \mathbb{R} \to]-\infty, 3[$ definida por $g(x) = 3 - 3^{-x}$. Defina en forma completa la función g^{-1}. Represente en un mismo sistema de ejes las funciones $g(x)$, $g^{-1}(x)$ y $h(x)$ si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $h(x) = x$.

Solución

Encontrar la inversa $y = 3 - 3^{-x} \Leftrightarrow y - 3 = -3^{-x} \Leftrightarrow 3 - y = 3^{-x}$
$\Leftrightarrow \log_3(3-y) = -x \Leftrightarrow x = -\log 3(3-y) \Rightarrow g^{-1}(x) = -\log_3(3-x)$
$\Rightarrow g^{-1} :]-\infty, 3[\rightarrow \mathbb{R}$.

$g^{-1}(x) = -\log_3(3-x)$



4) Considere la función definida por $g(x) = -\log_{0,5}(x+2)$.

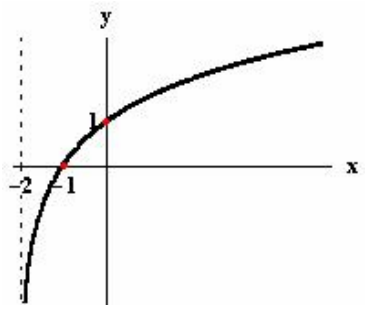
a) Calcule el máximo dominio de $g(x)$.

b) Represente gráficamente $y = g(x)$ en su dominio máximo.

Solución

a) Calcule el máximo dominio de $g(x)$.
$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2, \qquad Dom_g :]-2, \infty[$

b) Represente gráficamente $y = g(x)$ en su dominio máximo.



$$g(x) = -\log_{0,5}(x+2)$$

5) Determine el dominio máximo de la función $h(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+3}{e^x-2}\right)$.

Solución

Se debe cumplir $\dfrac{e^x+3}{e^x-2} > 0$

Se tiene $e^x + 3 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, por lo que es suficiente y necesario resolver $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

$D_h :]\ln 2, \infty[$

6) Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $8^{2x+\frac{2}{3}} + 7 \cdot 8^x = 30$

Solución

Sea $u = 8^x$, $\quad 8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{2\,x} + 7 \cdot 8^x - 30 = 0 \Rightarrow 8^{\frac{2}{3}}\ u^2 + 7\,u - 30 = 0 \Rightarrow u = -\dfrac{15}{4};\ u = 2$

Se deben resolver las ecuaciones $8^x = \dfrac{-15}{4}$ y $8^x = 2$.

La ecuación $8^x = \dfrac{-15}{4}$ no tiene solución pues $8^x > 0$.

Además, $8^x = 2 \Rightarrow 3\,x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

El conjunto solución es $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

7) Encuentre el conjunto solución de la ecuación $6^{4-3\,x} - 6^{1-3\,x} = 46440$.

Solución

Sea $u = 6^{-3\,x}$, $\quad 6^{4-3\,x} - 6^{1-3\,x} = 46440$, $u \cdot 6^4 - 6\,u = 46440 = u(6^4 - 6) = 46440$

$u = \dfrac{46440}{(6^4-6)} = 36, \qquad 6^{-3\,x} = 6^2 \Rightarrow -3\,x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{-2}{3}$

$6^{4+3\frac{2}{3}} - 6^{1+3\frac{2}{3}} = 6^{4+2} - 6^{1+2} = 6^6 - 6^3 = 46440$

El conjunto solución es $S = \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$

8) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 2 - 4^{|x-1|}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - 4^{x-1} & , x \geq 1 \\ 2 - 4^{x-1} & , x < 1 \end{cases}$

a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

b) Calcule $g\left(\frac{5}{2}\right)$ y $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

d) Encuentre el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / \ -2 \leq g(x) \leq 1\}$

Solución

a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.
$Int_y = 2 - 4^{|0-1|} = 2 - 4 = -2$
$Int_x = 2 - 4^{|x-1|} = 0$

Si $x \geq 1$, $2 - 4^{x-1} = 0 \Rightarrow 2 = 4^{x-1} = 2 = 2^{2\,x-2} = 1 = 2\,x - 2 = x = \frac{3}{2}$
Si $x < 1$, $2 - 4^{1-x} = 0 = 2 = 4^{1-x} = 2 = 2^{2-2\,x} = 1 = 2 - 2\,x = x = \frac{1}{2}$

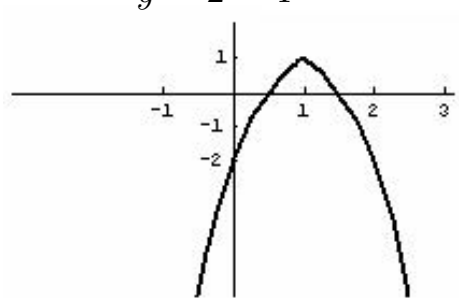
b) Calcule $g\left(\frac{5}{2}\right)$ y $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

$g\left(\frac{5}{2}\right) = 2 - 4^{|\frac{5}{2}|-1} = 2 - 4^{\frac{3}{2}} = 2 - \sqrt[3]{64} = 2 - 8 = -6$

$g\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 - 4^{|\frac{-1}{2}|-1} = 2 - 4^{|\frac{-3}{2}|} = 2 - 4^{\frac{3}{2}} = 2 - \sqrt[3]{64} = 2 - 8 = -6.$

c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

$y = 2 - 4^{|x-1|}$ $Amb_g = [1, +\infty[$



d) Encuentre el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / \ -2 \leq g(x) \leq 1\}$

$-2 \leq 2 - 4^{|x-1|} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 - 4^{|x-1|}$
$4^{|x-1|} \leq 4$
$|x-1| \leq 1$
$-1 \leq x - 1 \leq 1$
$0 \leq x \leq 2$
$x \in [0, 2]$

$2 - 4^{|x-1|} \leq 1$
$1 \leq 4^{|x-1|} \Rightarrow 0 \leq |x-1| \Rightarrow x \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R} \cap [0, 2] = [0, 2]$

$S = [0, 2]$

9) Considere la función definida por $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

a) Calcule el máximo dominio de $g(x)$.
b) Represente gráficamente $y = g(x)$ en su dominio máximo.

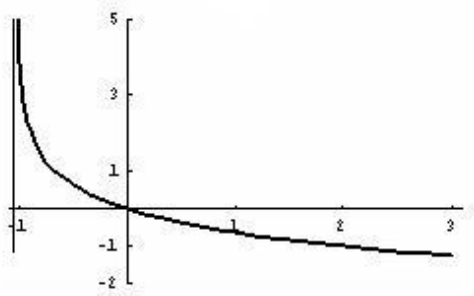
Solución

a) Calcule el máximo dominio de $g(x)$.
$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$Dom_g =]-1, +\infty[$

b) Represente gráficamente $y = g(x)$ en su dominio máximo.

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$$



10) Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación $\log_5(7-12\,x)+\log_5(2\,x+8)=3$

Solución

$\log_5(7-12\,x)+\log_5(2\,x+8)=3 \Rightarrow \log_5[(7-12\,x)\cdot(2\,x+8)]=3$
$\Rightarrow (7-12\,x)\cdot(2\,x+8)=5^3 \Rightarrow 14\,x+56-24\,x^2-69\,x=5^3 \Rightarrow -24\,x^2-82\,x-69=0$
$\Rightarrow x_1=\dfrac{-23}{12} \quad \vee \quad x_2=\dfrac{-3}{2}$. Los dos números pertenecen al dominio $\left]-4,\dfrac{7}{12}\right[$.

$S=\left\{\dfrac{-3}{2},\dfrac{-23}{12}\right\}$

11) Encuentre el dominio máximo de la función $h(x)=\sqrt{1-\log_{0.\,5}\left(\dfrac{2-7\,x}{5}\right)}$

Solución

Se deben cumplir:

i) $\dfrac{2-7\,x}{5}>0$

ii) $1-\log_{0.\,5}\left(\dfrac{2-7\,x}{5}\right)>0$

Entonces:

i) $\dfrac{2-7\,x}{5}>0 \Rightarrow -7\,x>-2 \Rightarrow x<\dfrac{2}{7}$

ii) $1-\log_{0.\,5}\left(\dfrac{2-7\,x}{5}\right)>0 \Rightarrow \log_{0.\,5}\left(\dfrac{2-7\,x}{5}\right)<1 \Rightarrow \dfrac{2-7\,x}{5}>0.\,5^1 \Rightarrow x<\dfrac{-1}{14}$

Se debe cumplir que $x<\dfrac{2}{7}$ y $x<\dfrac{-1}{14}$ entonces Dominio $=\left]-\infty,\dfrac{-1}{14}\right[$

12) Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación $e^{-8\,x}+2\cdot e^{-5\,x}-35\cdot e^{-2\,x}=0$

Solución

$e^{-8\,x}+2\cdot e^{-5\,x}-35\cdot e^{-2\,x}=0 \Rightarrow e^{-2\,x}\left(e^{-6\,x}+2\cdot e^{-3\,x}-35\right)=0$
$\Rightarrow e^{-6\,x}+2\cdot e^{-3\,x}-35=0$

Sea $u=e^{-3\,x} \Rightarrow u^2+2\,u-35=0 \Rightarrow u=-7 \quad \vee \quad u=5$

$e^{-3\,x}=-7$ no tiene solución.

$e^{-3\,x}=5$ entonces $-3\,x=\ln\,5 \Rightarrow x=\dfrac{-\ln\,5}{3}$

$S=\left\{\dfrac{-\ln,5}{3}\right\}$

13) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 3 - 9^{|x-1|}$ encuentre los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

Solución

<u>Con el eje y</u> $x = 0 \quad g(0))3 - 9^{|0-1|} = -6$

Corta el eje y en el punto $(0, -6)$

<u>Con el eje x</u> $y = 0 \quad g(x) = 0 \Rightarrow 3 - 9^{|x-1|} = 0 \Rightarrow 9^{|x-1|} = 3 \Rightarrow 3^{2|x-1|} = 3$

$\Rightarrow 2|x-1| = 1 \Rightarrow |x-1| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x_2 = \dfrac{3}{2}.$

Corta el eje y en los puntos $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

14) Considere la función $g :]-\infty, \dfrac{1}{3}[\to \mathbb{R}$ definida por

$g(x) = 1 + \log_3\left(\dfrac{1}{3} - x\right).$

Defina en forma completa la función $g^{-1}(x)$.

Solución

$g^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\quad g^{-1}(x) = \dfrac{1}{3} - 3^{x-1}.$

15) Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $0.2^{-x+1} > 0.2^{2x-3}$

Solución

$$\begin{aligned} 0.2^{-x+1} &> 0.2^{2x-3} \\ -x+1 &< 2x-3 \quad \text{(La función } y = 0.2^x \text{ es decreciente)} \\ -x-2x &< -1-3 \\ -3x &< -4 \\ x &> \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$S = \left]\dfrac{4}{3}, \infty\right[$

16) Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $\log_{0.2}(5-x) > -1$

Solución

Note que el dominio de $y = \log_{0.2}(5-x)$ es $]-\infty, 5[$

Entonces $\log_{0.2}(5-x) > -1 \Rightarrow \log_{0.2}(5-x) > \log_{0.2} 0.2^{-1}$

$\Rightarrow 5 - x < 0.2^{-1} \Rightarrow 5 - x < 5 \Rightarrow x > 0$

$S =]0, 5[$

6.6. Ejercicios

1) Si $g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \log_3 |x-3|$ encuentre los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

2) Considere la función $g : \mathbb{R} \to]-\infty, 2[$ definida por $g(x) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

   Defina en forma completa la función $g^{-1}(x)$. Represente en un mismo sistema de ejes las funciones $g(x)$, $g^{-1}(x)$ y $h(x)$ si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$.

3) Considere la función definida por $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

   a) Calcule el máximo dominio de $g(x)$.

   b) Represente gráficamente $y = g(x)$ en su dominio máximo.

4) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 2^{|x-1|-1}$

   a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

   b) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

5) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 2 - 4^{|x-1|}$

   a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

   b) Calcule $g\left(\frac{5}{2}\right)$ y $g\left(\frac{-1}{2}\right)$.

   c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

   d) Encuentre el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq g(x) \leq 1\}$

6) Sea $h :]-\infty, 2[\to \mathbb{R}$ y $h(x) = 1 + \log_2(2-x)$. Defina en forma completa la función $h^{-1}(x)$. Represente en un mismo gráfico $y = h(x)$ y $y = h^{-1}(x)$.

7) Encuentre el conjunto de números reales que son solución de:

   a) $6^{3x-1} > 216^{-1+x}$

   b) $0.5^{x^2+x} > 0.5^2$

   c) $\log_2(x-2) > -1$

   d) $\log_{0.5}(3x-2) > -2$

8) Considere la función $g(x) = \log_{0.5}(-2\,x + 1)$

   a) Indique el máximo dominio y el ámbito de la función.
   b) Defina en forma completa la función $g^{-1}(x)$.

9) Sea $h : \mathbb{R} \to]2, \infty[$ y $h(x) = 2 + 0.5^{x-2}$.

   a) Defina en forma completa la función $h^{-1}(x)$
   b) Represente en un mismo gráfico $y = h(x)$ y $y = h^{-1}(x)$.
   c) Encuentre el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ h^{-1}(x) \geq 2\}$.

10) Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación.

   a) $2^{3\,x+1} + 5 \cdot 2^{2\,x} = 83 \cdot 2^x - 40$.
   b) $\dfrac{3\,e^{-4\,x} + 10}{e^{-8\,x}} = 1$.
   c) $2^{-2,x} - 2^{-x} = 6$.
   d) $3^{1-2\,x} - 3^{3-2\,x} = -648$.
   e) $\log_2(x-1) + \log_2(x+3) - \log_2(2\,x+1) = 2$.
   f) $\dfrac{0.125^{x-0.5}}{2\sqrt{2}} = 8 \cdot 0.25^{x+1}$.
   g) $3^{2\,x+1} = 5 \cdot 2^{x+1}$.
   h) $\log_{\frac{1}{2}}(3\,x+4) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{12}\right) = -1$.
   i) $\dfrac{3\,e^{-4\,x} + 10}{e^{-8\,x}} = 1$.
   j) $7 \cdot 3^{x-1} = 5 \cdot 2^{x+1}$.

11) Considere la función definida por $f(x) = 2 + 3^{-x}$.

   1) Calcule el máximo dominio de $f(x)$ y el ámbito.
   2) Represente gráficamente $y = f(x)$ en su dominio máximo.

12) Considere la función definida por $f(x) = -2 + 3^{-x}$.

   1) Calcule el máximo dominio de $f(x)$ y el ámbito.
   2) Represente gráficamente $y = f(x)$ en su dominio máximo.

13) Considere la función definida por $f(x) = 5 - 4^{-x}$.

    1) Calcule el máximo dominio de $f(x)$ y el ámbito.
    2) Represente gráficamente $y = f(x)$ en su dominio máximo.

14) Determine el dominio máximo de la función

    a) $h(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}\right)$
    b) $h(x) = \dfrac{\log_2(x^2 - 4)}{2 - \log_4(25 - x^2)}$
    c) $h(x) = \dfrac{e^x}{\log_3(16 - x^2)}$
    d) $h(x) = \dfrac{\sqrt{2 + 3^x}}{-2 - \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)}$
    e) $h(x) = \sqrt{125 - 0.\,2^x}$
    f) $h(x) = \dfrac{\log_2(x^2 - 4)}{2 - \log_4(25 - x^2)}$
    g) $h(x) = \sqrt{4 - 2^{2\,x}}$

15) Determine el ámbito de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $f(x) = \log(x^2 + 2\,x + 101)$.

16) Sea $g :]3, \infty[\to \mathbb{R}$ con $g(x) = \log_3(x - 3)$

    a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.
    b) Resuelva la ecuación $g(x) = 2$.
    c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

17) Sea $g :]3, \infty[\to \mathbb{R}$ con $g(x) = \log_3(3 - x)$

    a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.
    b) Resuelva la ecuación $g(x) = 2$.
    c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

18) Sea $g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \log_3 |x - 3|$

   a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

   b) Resuelva la ecuación $g(x) = 2$.

   c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

19) Considere la función $g :]-\infty, 8[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_3(8 - x)$.
Defina en forma completa la función $g^{-1}(x)$.

Represente en un mismo sistema de ejes las funciones $g(x)$, $g^{-1}(x)$ y $h(x)$ si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $h(x) = x$.