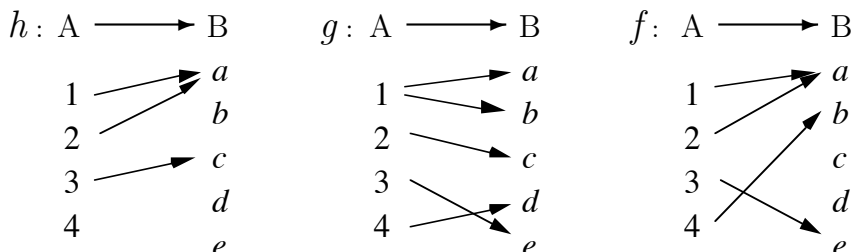


Aplicación: Una correspondencia f entre dos conjuntos A y B recibe el nombre de *aplicación*, si a todo elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B .

1.- Razonar cuáles de las siguientes correspondencias entre los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b, c, d, e\}$$

son aplicaciones y cuáles no:



Para las correspondencias que sean aplicaciones justificar cuál o cuáles son inyectivas, suprayectivas y/o biyectivas.

Solución Una correspondencia f entre dos conjuntos A y B recibe el nombre de *aplicación*, si a todo elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B .

Es decir, de cada uno de los elemento del conjunto A ha de salir una única flecha hacia B para que alguna de estas correspondencias sea aplicación.

Por lo tanto:

- h no es aplicación pues al elemento 4 de A no le corresponde ningún elemento de B .
- g no es aplicación pues al elemento 1 de A le corresponden dos elementos de B .
- f sí es aplicación pues a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B .

Vamos a estudiar si la aplicación f es inyectiva, suprayectiva y/o biyectiva.

- Para que f sea inyectiva a cada elemento de B ha de llegar como mucho una flecha,; es decir los elementos de B tienen como mucho una antimagen. Por tanto f no es inyectiva pues el elemento a de B tiene dos antimagenes. Es decir:

$$f(1) = f(2) \quad \text{pero} \quad 1 \neq 2$$

- Para que f sea suprayectiva a cada elemento de A ha de llegar al menos una flecha; es decir, todos los elementos de B deben de tener al menos una antimagen. Por tanto f no es suprayectiva pues el elemento c de B no tiene antimagen. es decir:

$$\nexists x \in A / f(x) = c$$

- Para que f sea biyectiva a todos y cada uno de los elementos de B ha de llegar exactamente una flecha. O lo que es lo mismo, una aplicación es biyectiva si y sólo si es inyectiva y suprayectiva. Por lo tanto f no es biyectiva.

Composición de aplicaciones: Sean f una aplicación de A en B y g una aplicación de B en C . Construimos una tercera aplicación, $h = g \circ f$, de A en C del modo siguiente:

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$

Esta construcción se suele representar esquemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) = h(x) \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & h = g \circ f
 \end{array}$$

2.- Consideremos las aplicaciones:

$$f(x) = 3x^2 + 4 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 5$$

Construir las aplicaciones $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$

Solución

Como para todo elemento x del dominio de la aplicación f que es \mathbb{R} se cumple que $f(x) \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, tenemos que $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$. Además:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 4) = 2(3x^2 + 4) - 5 = 6x^2 + 3$$

Inversa de una aplicación inyectiva: Si $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación biyectiva, existe una aplicación que denotaremos f^{-1} definida del modo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1} : B & \longrightarrow & A \\
 y & \longrightarrow & x / f(x) = y
 \end{array}$$

que cumple:

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in B \quad ; \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A,$$

es decir:

$$f \circ f^{-1} = I_B \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = I_A$$

Esta aplicación, que es única y existe si y sólo si la aplicación f es biyectiva, se denomina la *aplicación inversa* de f .

Si f es una aplicación inyectiva en A y denotamos por B el conjunto imagen de f , es decir, $B = \text{Im } f$, como para cada elemento $y \in B$ existe un único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$, podemos definir la aplicación inversa de f de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1} : B & \longrightarrow & A \\
 y & \longrightarrow & x / f(x) = y
 \end{array}$$

3.- Calcular la aplicación inversa de $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{3x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

Solución Para calcular la inversa de una aplicación inyectiva procedemos del modo siguiente.

Si $y \in \text{Im } f$ entonces existe un único $x \in \text{Dom } f$ tal que $y = f(x)$ o, lo que es lo mismo, con $x = f^{-1}(y)$. Por lo tanto, podemos encontrar $f^{-1}(y)$ en dos pasos:

- Primero despejando x de la ecuación $f(x) = y$, para obtener $x = f^{-1}(y)$.
- Luego obtenemos $y = f^{-1}(x)$ con sólo cambiar y por x .

Aplicamos este método al ejercicio propuesto:

$$f(x) = \frac{1}{3x-1} = y$$

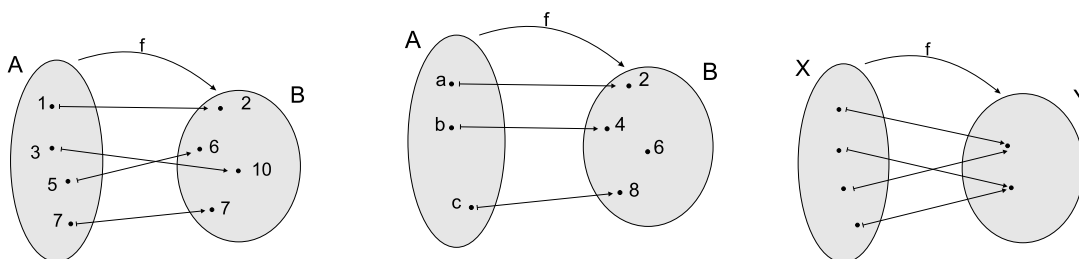
Por lo tanto,

$$3x - 1 = \frac{1}{y} \implies 3x = \frac{1+y}{y}.$$

De aquí que:

$$x = \frac{1+y}{3y}, \text{ es decir: } f^{-1}(x) = \frac{1+x}{3x}$$

4.- Para cada una de las aplicaciones cuyas gráficas aparecen en las figuras adjuntas, hallar su dominio e imagen. Justificar si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.



5.- Sean las funciones reales de variable real siguientes:

$$f(x) = 1 - x \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad h(x) = \frac{x}{1-x}$$

Hallar los campos de existencia o dominios de las funciones $h \circ (f \circ g)$, $g \circ (f \circ h)$ así como sus fórmulas.

6.- Construir las inversas, si es posible, de las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad g(x) = \frac{2x+2}{x-3} \quad h(x) = \frac{x}{1-x}$$

Dominio de una función: el dominio de una función es el conjunto de los valores para los cuales la función está definida.

Recorrido de una función: el recorrido de una función, también denominado conjunto imagen o rango de la función, es el conjunto de los valores que puede tomar la función.

7.- Para cada una de las siguientes funciones reales de variable real, hallar el dominio, el conjunto imagen y justificar si son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = \frac{x}{x-1} \quad h(x) = \sqrt{2}$$

Solución

- Como la función f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, podemos calcular x^2 para cualquier número real, el dominio de f es todo \mathbb{R} y podemos escribir:

$$\text{Dom}_f = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

- Como los valores que toma la función f son no negativos pues $x^2 \geq 0$, su recorrido es el intervalo $[0, \infty)$. Escribimos:

$$\text{Im}_f = \text{Im}(f) = [0, \infty)$$

- Como la función g está definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, es decir, podemos calcular $\frac{x}{x-1}$ para cualquier número real distinto de 1, el dominio de g es $\mathbb{R} - \{1\}$ y escribimos:

$$\text{Dom}_g = \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$$

- Calcular el recorrido de g es un poco más delicado. Observamos que el numerador siempre es mayor que el denominador, es decir:

$$x > x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Recordemos que al multiplicar o dividir una desigualdad (o cadena de desigualdades) por un número positivo la desigualdad mantiene el sentido. Sin embargo, si multiplicamos o dividimos la desigualdad (o cadena de desigualdades) por un número negativo la desigualdad cambia el sentido. Es decir:

$$x > x - 1 \wedge x - 1 > 0 \quad \implies \quad \frac{x}{x-1} > 1$$

$$x > x - 1 \wedge x - 1 < 0 \quad \implies \quad \frac{x}{x-1} < 1$$

Por lo tanto:

$$\text{Im}_g = \text{Im}(g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

Al representar gráficamente una función se ven reflejados su dominio, su recorrido y muchas otras cuestiones de interés.

¿Cómo estudiar si una aplicación es inyectiva?

Si pensamos que la aplicación puede ser inyectiva el razonamiento a seguir es el siguiente:

partimos de $f(x) = f(t)$ e intentamos llegar a la identidad $x = t$

Si, por el contrario, creemos que no es inyectiva, tendremos que buscar como en el ejemplo anterior dos elementos $x \neq t$ de A tales que $f(x) = f(t)$.

8.- Comprobar que la función:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{x-3}{1+2x} \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva y calcular su inversa.

Solución Para demostrar que f es inyectiva partimos de $f(x) = f(y)$ y demostraremos que necesariamente se ha de cumplir $x = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies \frac{x-3}{1+2x} = \frac{y-3}{1+2y} \implies (x-3)(1+2y) = (y-3)(1+2x) \implies \\ &\implies x + 2xy - 3 - 6y = y + 2xy - 3 - 6x \implies x - 6y = y - 6x \implies \\ &\implies 7x = 7y \implies x = y \end{aligned}$$