FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una función f se llama cuadrática si puede ser escrita de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a,b y *c* números reales con $a \neq 0$.

El dominio de esta función son todos los reales y su representación gráfica es una parábola. Son innumerable la cantidad de ejemplos prácticos donde está involucrada la función cuadrática, es por ello que merece especial atención.

La idea para graficar cualquier función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es llevarla a la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ completando cuadrados. La gráfica de esta última sabemos que es una dilatación, posible reflexión con el ejes x y traslaciones de la gráfica de $y = x^2$.

Ejemplo 1.- Expresar la función $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Graficar.

Solución: Primero sacamos el coeficiente de x^2 en los dos primeros términos de factor común:

$f(x) = 2(x^2 + 2x) + 5$. La idea es sumar y restar un número para que junto con la expresión $x^2 + 2x$ sean el desarrollo de $(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$

Observe que el término $2x$ corresponde a $-2hx$. Así que $2x = -2hx$, de donde $h = -1$. El término que falta para completar el desarrollo del cuadrado es $(-1)^2 = 1$

$f(x) = 2(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1) + 5$ Sustituimos el trinomio por el cuadrado perfecto.

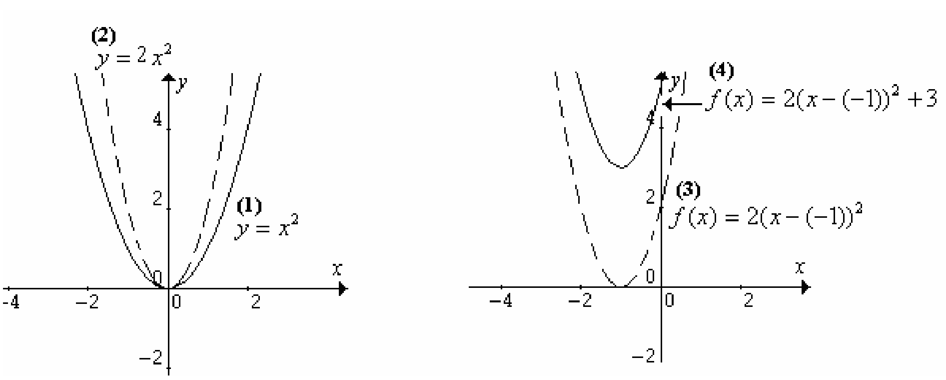
$f(x) = 2\left((x-(-1))^2 - 1\right) + 5$

Se aplica la propiedad distributiva.

$f(x) = 2(x-(-1))^2 - 2 + 5$

$f(x) = 2(x-(-1))^2 + 3$

La gráfica de está función la podemos obtener por a un estiramiento vertical de $y = x^2$, luego una traslación horizontal hacia la izquierda de una unidad y por último una traslación vertical de tres unidades.



Ejemplo 2.- Expresar la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Graficar.

Solución: Primero sacamos el coeficiente de x^2 en los dos primeros términos de factor común:

$f(x) = -(x^2 - 6x + h^2 - h^2) - 5$

El término $-6x$ corresponde a $-2hx$. Así que $-6x = -2hx$, de donde $h = 3$.

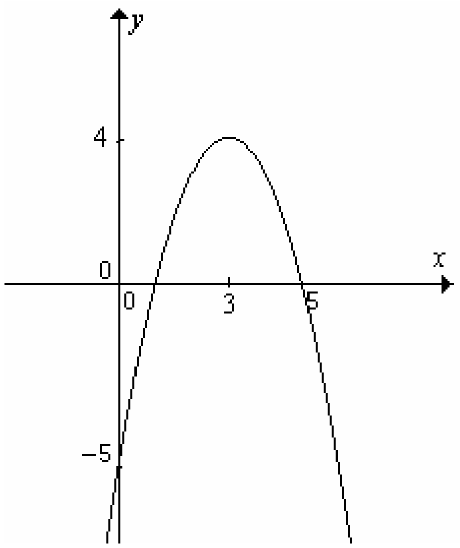
El término que falta para completar cuadrados es $(3)^2 = 9$

$$f(x) = -(\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - 9) - 5$$

$$f(x) = -\left((x-3)^2 - 9\right) - 5$$

Se aplica la ley distributiva

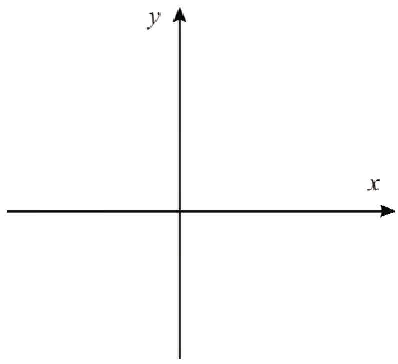
$$f(x) = -(x-3)^2 + 9 - 5$$
$$f(x) = -(x-3)^2 + 4$$



La gráfica de está función puede ser obtenida por una reflexión de la gráfica de $y = x^2$ en torno al eje *x*, luego una traslación horizontal hacia la derecha de tres unidades y por último una traslación vertical de cuatro unidades hacia arriba.

Comentario: Una vez que sacamos *a* de factor común en los dos primeros términos, resulto en ambos casos que h es la mitad del coeficiente en x con signo cambiado. Efectivamente en el primer ejemplo se tenía $f(x) = 2(x^2 + 2x) + 5$ y $h = -1$, en el segundo ejemplo $f(x) = -(x^2 - 6x) - 5$ y $h = 3$.

Ejercicio de desarrollo: Expresar la función $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Graficar.



A continuación se hacen varias observaciones, algunas de las cuales el lector habrá podido darse cuenta a lo largo de estos ejemplos y que se pudiese establecer como resultados a fin de ahorrar trabajo. Se puntualizan

Observaciones:

1) Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.
2) $(0, c)$ es el corte con el eje y
3) En la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, h es la coordenada x del vértice y k es la coordenada y del vértice.

A partir de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede hacer un desarrollo teórico a fin de obtener una fórmula para *h*. Primero se saca *a* de factor común de los dos primeros términos.

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

El término $\frac{b}{a}x$ corresponde a $-2hx$. Así que $\frac{b}{a}x = -2hx$, de donde $h = -\frac{b}{2a}$. El término que falta para completar cuadrados es $(\frac{b}{2a})^2$

$$f(x) = a(\underbrace{x^2 + \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x-(-\frac{b}{a})\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2) + c$$

$$f(x) = a\left[\left(x - (-\frac{b}{2a})\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

Se aplica la ley distributiva

$$f(x) = a\left(x - (-\frac{b}{2a})\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c.$$

Así la coordenada *x* del vértice es $h = -\frac{b}{2a}$. En vez de identificar *k* en el desarrollo anterior, es preferible en la práctica evaluar *f* en $h = -\frac{b}{2a}$.

Estas observaciones nos permiten hacer las siguientes recomendaciones

Recomendaciones para graficar una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1.- Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba.
Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

2.- Calcular la coordenada *x* del vértice por medio de $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Para calcular la coordenada *y* evaluar f en $-\frac{b}{2a}$. Esto es $y_v = f(x_v)$

3. Para la intersección con el eje *x* plantear la ecuación $f(x) = 0$ y resolver esta ecuación en *x*.

La intersección con el eje *y* es el punto (0,*c*).

4.- Llevar estos puntos al plano: vértice y cortes y tomar en cuenta **1** para bosquejar la gráfica. También recuerde que la parábola es simétrica en torno a la recta $x = -\frac{b}{2a}$.

Ejemplo 3.- Graficar $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

Solución: Tomamos en cuenta las recomendaciones.

1.- Como $a = 2 > 0$ la parábola abre hacia arriba.

2.- Calculamos ahora la coordenada *x* del vértice, observe que en este caso $b = -8$

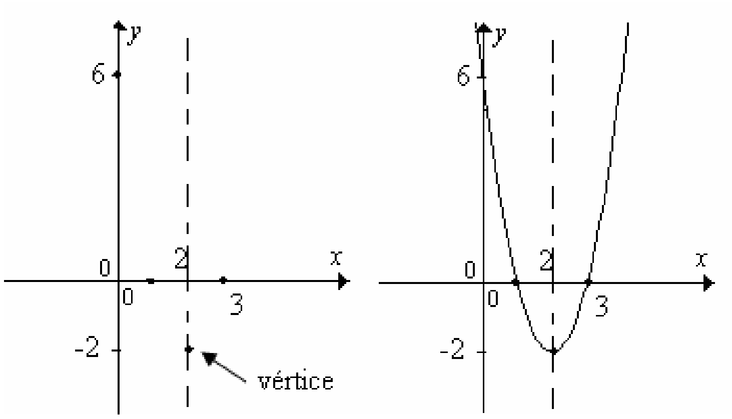
$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \cdot 2} = 2$. Pasamos ahora a calcular la coordenada *y* del vértice.

$y_v = f(x_v) = 2(2)^2 - 8(2) + 6 = -2$. En conclusión el vértice es $(x_v, y_v) = (2,-2)$

3. Para las intersecciones con el eje *x* planteamos: $2x^2 - 8x + 6 = 0$, esta ecuación cuadrática tiene como solución *x*=1 y *x*=3. Así los puntos de cortes con el eje *x* son (1,0) y (3,0).

(0,6) es el corte con el eje *y*.

4.- Se llevan estos puntos a un plano cartesiano, se traza el eje de simetría de la parábola, tomando en cuenta que la parábola abre hacia arriba, hacemos el bosquejo recordando la simetría de la curva y haciéndola pasar por los puntos marcados.



Ejercicio de desarrollo: Graficar $f(x) = -3x^2 - 12x + 4$. Consiga vértice y puntos de intersecciones con los ejes.

Ejemplo 4.- Resolver gráficamente la desigualdad $x^2 + 5x + 6 \geq 0$.

Solución: La idea para resolver este tipo de ejercicio es definir primero la función $y = x^2 + 5x + 6$, Observe que la cuestión ahora es conseguir los *x´*s para los cuales $y \geq 0$, esto se puede revolver graficando pues el conjunto solución son los *x´*s donde la gráfica está por encima del eje *x* (tienen la coordenada *y* positiva).

A continuación se graficara $y = x^2 + 5x + 6$. Como *a*>0 la parábola abre hacia arriba. Para localizar el vértice planteamos:

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-5}{2} = -2.5$. $y_v = f(x_v) = (-2.5)^2 + 5(-2.5) + 6 = -0.25$

Para los cortes con el eje *x*, planteamos

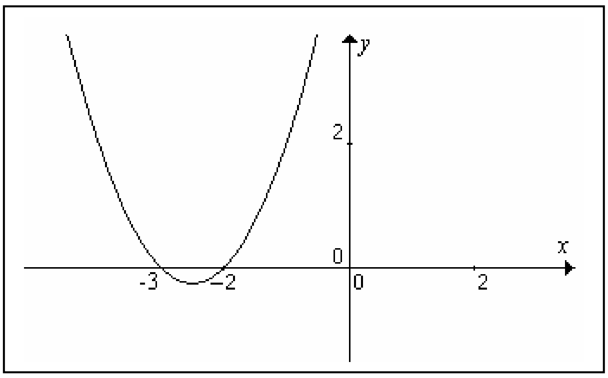
$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+3)(x+2) = 0$

$x = -2$ ó $x = -3$

El corte con el eje *y* es (0,6)

En la figura se puede apreciar que los *x´s* tales que $y = x^2 + 5x + 6 \geq 0$, es el conjunto $(-\infty,-3] \cup [-2,\infty)$



Ejercicio de desarrollo.- Resolver gráficamente la desigualdad $-3x^2 + 5x + 2 < 0$.

MAXIMOS Y MINIMOS EN FUNCIONES CUADRÁTICAS

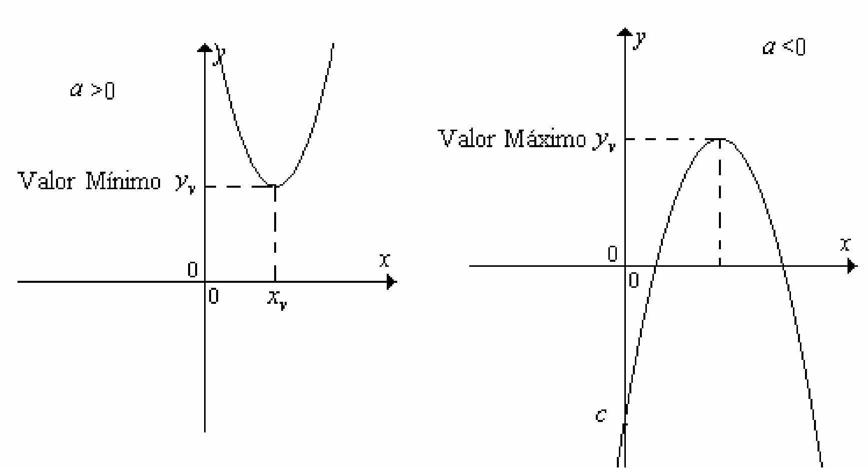
En muchas ocasiones es de interés localizar el valor máximo de una función. En una función cuadrática cuya gráfica abre hacia abajo este máximo se alcanza en el vértice de la parábola.

Alternativamente también se puede estar interesado en el valor mínimo de una función cuadrática cuya gráfica abre hacia arriba.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ la coordenada *x* del vértice

-Si $a < 0$ entonces *f* alcanza un valor máximo en x_v. Este valor máximo de f es $y_v = f(x_v)$

-Si $a > 0$ entonces *f* alcanza un valor mínimo en x_v. Este valor mínimo de f es $y_v = f(x_v)$



Comentario: Es claro que si $a > 0$ no hay un valor máximo de f pues la función toma valores arbitrariamente altos.

Ejemplo 1.- Encontrar el valor máximo o mínimo según corresponda de las siguientes funciones
a) $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$; **b)** $f(x) = 3x^2 + 12x + 4$

Solución: **a**) Como $a = -2 < 0$ la parábola abre hacia abajo, por lo tanto la función alcanza un máximo. Para conseguir el valor máximo primero calculamos la coordenada *x* del vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot(-2)} = \frac{3}{2}$$

el valor máximo es $f(\frac{3}{2}) = -2(\frac{3}{2})^2 + 6(\frac{3}{2}) + 1 = \frac{11}{2}$ y remarcamos que se alcanza en $x_v = \frac{3}{2}$.

b) Como $a = 3 > 0$ la parábola abre hacia arriba, por lo tanto la función alcanza un mínimo. Para conseguir el valor mínimo primero calculamos la coordenada *x* del vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2\cdot(3)} = -2$$

Ahora el valor máximo de *f* es $y = f(-2)$

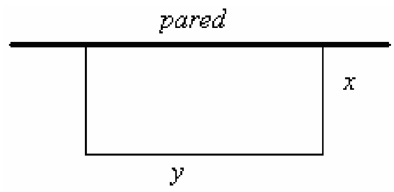
$$f(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 4 = -8$$

En conclusión: -8 es el valor máximo de la función y se alcanza en $x = -2$.

Ejercicio de desarrollo: Encontrar el valor máximo o mínimo de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$.

APLICACIONES

Ejemplo 1.- Una persona tiene 25 metros de malla para construir un corral rectangular. La persona piensa usar una pared existente para delimitar el corral. **a)** Exprese el área como función de x **b)** Calcule las dimensiones del corral que tiene área máxima



Solución:

a) Observe que el área esta dada por

$$A = x \cdot y$$

En este caso viene expresada en términos de las dos variable x y y. Sin embargo podemos sustituir y por una expresión que depende de x, debido a la relación entre x, y y la cantidad de malla a utilizar. Esta relación viene dada por

$$x + x + y = 25$$

Esto es

$$2x + y = 25$$

De aquí podemos expresar y en función de x, despejando

$$y = 25 - 2x$$

Sustituyendo y en el área, tenemos finalmente A como función de x

$$A(x) = x \cdot (25 - 2x).$$

Conviene observa que el Dom $A = (0,12.5)$

b) En **a**) se obtuvo que el área es una función cuadrática de x. La llevamos a la forma canónica.

$$A(x) = 25x - 2x^2$$

Como a<0, entonces $A(x)$ alcanza un máximo en x_v, él cual está dado por

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2 \cdot (-2)} = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Pasamos ahora a calcular la dimensión y, la cual puede ser obtenida de la relación $y = 25 - 2x$.

Al sustituir x por 6,25 obtenemos y= 12,5.

Concluyendo las dimensiones que hacen máxima el área son 6,25x12,5.

Adicionalmente podemos decir que el área máxima es 78,125m^2, la cual se obtuvo evaluando la función Área en 6,25.

Ejemplo 2.- Un distribuidor adquiere balones a un costo de 4UM la unidad. Cuando el precio de venta es de 10UM se venden 4000 unidades en un mes. Se quiere subir los precios y se estima que por cada aumento de 1UM en el precio se venderán 200 balones menos. **a)**¿Qué precio se deberá fijar con el fin de obtener la utilidad máxima? **b)** ¿Cuál es la utilidad máxima?

Solución:

Una variable muy frecuente para modelar este problema es

x= Número de incrementos de 1UM.

Así

q=número de balones vendidos por mes

puede ser expresado en términos de x como:

$$q = 4000 - 200x.$$

Observe que si x=0 no hay incrementos y las ventas son 4000, si x=1 entonces se dejan de vender 200 balones, esto es 3800, así puede continuar.

En términos de x, el precio está dado por

$$p = 10 + 1 \cdot x$$

Alternativa 1: En este caso obtendremos la utilidad total en base a la utilidad por balón

$$\textit{Utilidad por cada balón=precio-costo unitario}$$

Así

$$\textit{Utilidad por cada balón} = p - c_u = 10 + 1 \cdot x - 4 = 6 + x$$

y la utilidad total en términos de x está dada por

$$\textit{Utilidad total} = q \cdot (\textit{utilidad por balón}) = (4000 - 200x)(6 + x) = 200(20 - x)(6 + x)$$

Como la utilidad total es una función cuadrática con $a< 0$ existe un máximo y se localiza en el vértice. Escribimos la utilidad en la forma canónica para así emplear la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$

$$U(x) = 200(1200 - 6x + 20x - x^2) = 200(1200 + 14x - x^2)$$

$$= 240000 + 2800x - 200x^2.$$

Entonces el máximo se alcanza en

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2800}{2 \cdot (-200)} = 7.$$

a) Recordemos que x representa incrementos de 1 UM, no el precio. El precio donde se alcanza la máxima utilidad es: $p = 10 + 1 \cdot 7 = 17$

b) El valor máximo de la utilidad es :

$$y_v = U(x_v) = 200(20 - 7)(6 + 7) = 200 \cdot 13^2 = 33.800UM$$

Alternativa 2: Se basa en obtener utilidad total

$$\textit{Utilidad total} = \textit{Ingreso total} - \textit{costo total}$$

$$\textit{Ingreso total} = p \cdot q = (10 + x)(4000 - 200x)$$

$$\textit{Costo total} = 4 \cdot q = 4(4000 - 200x).$$

Así

$$\textit{Utilidad total} = (10 + x)(4000 - 200x) - 4(4000 - 200x)$$

$$= 200(20 - x)(6 + x).$$

El punto donde esta función alcanza su máximo es el mismo que el de la función $f(x) = (20 - x)(6 + x) = 120 + 14x - x^2$ y es:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2\cdot(-2)} = 7.$$

Así la utilidad máxima es

$$y_v = U(x_v) = 200(20-7)(6+7) = 200\cdot 13^2 = 33.800UM$$

Ejemplo 3.- El costo total por producir q unidades de un artículo está dado por

$c(q) = 70q - \frac{1}{5}q^2 + \frac{1}{200}q^3$

a) ¿Cuál es el nivel de producción en que el costo promedio por unidad es mínimo?
b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?
Solución:
El costo promedio $\bar{c}$, está definido por

$$\bar{c}(q) = \frac{c(q)}{q}$$

Primero se debe obtener esta función de costo promedio:

$$\bar{c}(q) = \frac{70q - \frac{1}{5}q^2 + \frac{1}{200}q^3}{q} = 70\frac{q}{q} - \frac{1}{5}\frac{q^2}{q} + \frac{1}{200}\frac{q^3}{q}$$

$$\bar{c}(q) = 70 - \frac{1}{5}q + \frac{1}{200}q^2$$

a) Esta función es cuadrática con $a>0$, así alcanza un mínimo en

$$q_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{1}{5}}{2\cdot(\frac{1}{200})} = \frac{100}{5} = 20.$$

b) El valor del costo promedio mínimo es

$$\bar{c}_{\min} = \bar{c}(q_v) = 70 - \frac{1}{5}20 + \frac{1}{200}(20)^2 = 32$$

Ejemplo 4.- Se estima que en un terreno si se plantan 200 matas de naranjas, la producción promedio será de 300 naranjas por árbol y que por cada árbol menos que se siembre la producción aumentará en 3 naranjas por árbol. **a)¿**Cuál es el número de árboles que debe plantarse en el terreno a fin de obtener la máxima cosecha posible del terreno? **b)** ¿Cuál es la producción máxima posible?
Solución:
La variable que puede ser usada para modelar este problema es
x= Número de árboles que se dejan de plantar
Así que

$$\textit{números de árboles a plantar} = 200 - x \quad \text{y}$$

La producción promedio por árbol es

$$\textit{Producción por árbol} = 300 + 3x$$

De esta manera

la producción total=(número de árboles a plantar) x (*producción por árbol)*

$$= (200-x)\cdot(300+3x)$$

$$\textit{la producción total} = 60000 + 300x - 3x^2$$

a) La función producción es una función cuadrática que alcanza un máximo, para ver donde se alcanza planteamos

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{300}{2\cdot(-3)} = 50$$

Entonces hay que sembrar $200-50=150$ árboles en ese terreno para alcanzar la máxima cosecha por árbol.

b) Para conseguir el valor máximo simplemente evaluamos la función producción en x=50 *la producción total* $= 60000+300(50)-3(50)^2$

la producción total $= 67.500$ naranjas es la máxima producción posible

EJERCICIOS

1) Graficar las siguientes funciones utilizando la técnica de completación de cuadrados:

1.1) $f(x)=-x^2-10x-24$; **1.2)** $f(x)=4x^2-4x-1$; **1.3)** $f(x)=-3x^2-6x$

2) Graficar las siguientes funciones utilizando la fórmula del vértice y cortes con los ejes.

2.1) $f(x)=-x^2+2x-2$; **2.2)** $f(x)=1-3x+2x^2$; **2.3)** $f(x)=x(2x+1)$;

2.4) $f(x)=(x+4)(x-1)$; **2.5)** $f(x)=5x-6-(x+2)(x-1)$

2.6) $f(x)=2(x+2)^2+x$

3) Encuentre los máximos o mínimos de las siguientes funciones cuadráticas según corresponda.

3.1) $f(x)=-2x^2+3$; **3.2)** $f(x)=(x+3)(x+1)+8x$;

3.3) $f(x)=3-10x-5x^2$; **3.4)** $f(x)=2x^2-3x$; **3.5)** $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+3/2$

4) Resolver gráficamente las siguientes desigualdades:

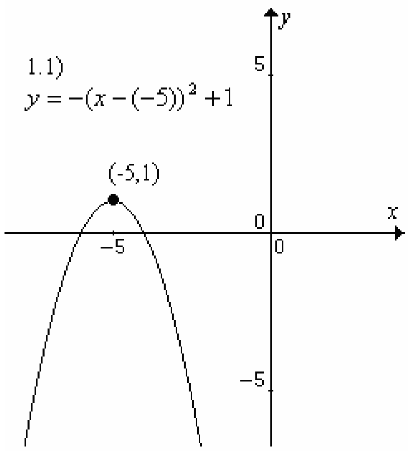
4.1) $2x^2+3x+1<0$; **4.2)** $x^2+3x-10>0$ **4.3)** $x^2+3x+3>0$

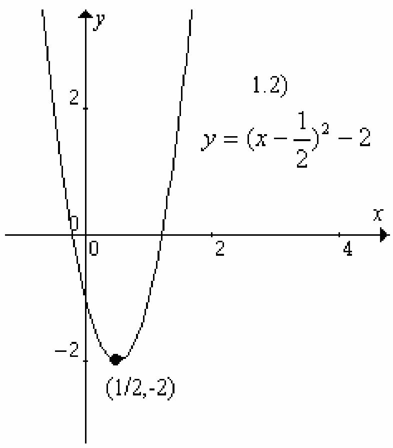
4.4) $2x^2+3x+2\le 0$; **4.5)** $x^2-5x+4\le 0$

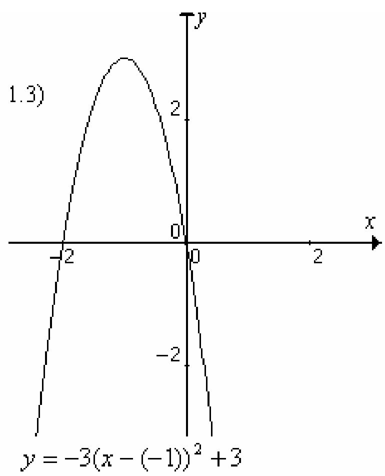
5) Expresar las siguientes funciones en la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$.

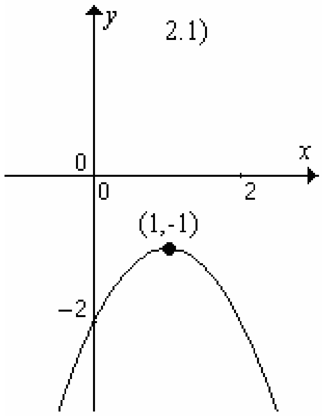
5.1) $f(x)=-4x^2-2x+1$; **5.2)** $f(x)=3x^2-3x+2$; **5.3)** $f(x)=2x^2+5x+2$

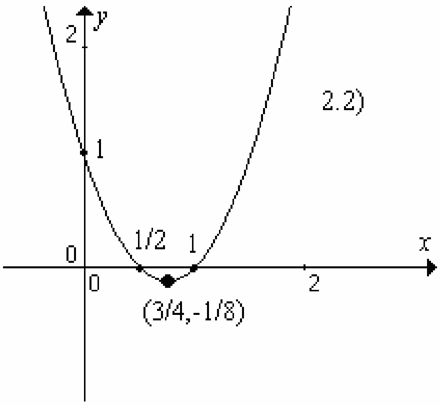
Respuestas:

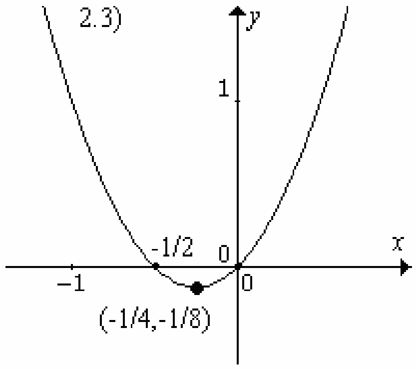


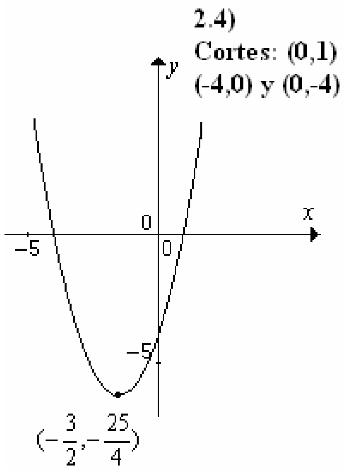


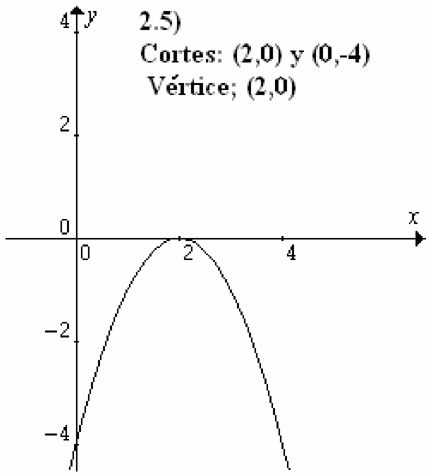


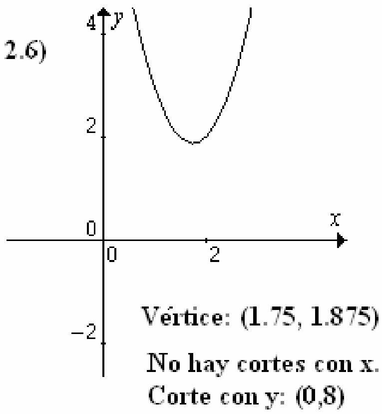












Respuestas:

3.1) max 3 en *x*=0; **3.2)** min -33 en *x*=-6; **3.3)** max 8 en *x*=-1; **3.4)**min-1.125 en *x*=3/4
3.5)max 1.5 en *x*=1; **4.1)** (-1,-1/2); **4.2)** $(-\infty,-5)\cup(2,\infty)$ **4.3)R; 4.4)** $\varnothing$; **4.5)** [1,4];

5.1) $f(x)=-4\left(x-(-\frac{1}{4})\right)^2+\frac{5}{4}$; **5.2)** $f(x)=3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$; **5.3)** $f(x)=2\left(x-(-\frac{5}{4})\right)^2-\frac{18}{16}$

PROBLEMAS DE ECONOMIA

1) El costo promedio por unidad al producir *q* unidades de un artículo es $\bar{c}(q)=30-0.1q+0.005q^2$ ¿Cuál es el nivel de producción en que el costo promedio por unidad es mínimo? (**Resp.** 10 unidades)

2) Un museo admite grupos grandes de 30 hasta 60 personas con la siguiente política de rebajas: Para grupos menores o iguales a 30 personas la tarifa es de 160UM, pero por cada persona adicional la tarifa por persona se reduce en 2UM. ¿Cuál es el tamaño del grupo para el cuál el ingreso del museo es máximo?(Observe que si el grupo es de 31 la tarifa por persona es 158, pero si el grupo es de 32 la tarifa es de 156) (**Resp.** 55 personas)

3) El costo total por producir *q* unidades de un artículo está dado por

$$c(q)=30q-0.3q^2+0.01q^3$$

a) ¿Cuál es el nivel de producción en que el costo promedio por unidad es mínimo?

b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo? (**Resp**. 15, 27.75)

4) Una disquera puede reproducir un CD a un costo de 10UM cada uno y estima que si vende pUM cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente 90-*p* CD cada mes. **a)** Expresar la utilidad mensual como una función del precio. **b)** Determinar el precio para el cual la utilidad de la casa discográfica es máxima? **c)** ¿Cuál será esa utilidad?(**Resp. a)** (p-10)(90-p) ; **b)**50; **c)**2000)

5) La función de demanda para el fabricante de un producto es $p=f(q)=200-2q$, donde p es el precio por unidad cuando q unidades son demandadas. Determine el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante. (**Resp.** $q=40$)

6) Un kiosko de comida rápida prepara hamburguesas a un costo de 2UM cada una. Las hamburguesas se han vendido a 5UM cada uno y a ese precio, los consumidores han comprado 4000 al mes. El dueño planea incrementar el precio de las hamburguesas y estima que por cada UM de aumento en el precio se venderán 200 hamburguesas menos. **a)** Exprese la utilidad mensual como función del precio. **b)** Dibuje la gráfica de la función utilidad. ¿Qué precio corresponde a la utilidad máxima? (**Resp.** $U(p)=(p-2)(5000-200p)$; b) p=13.5)

7) Una tienda de deporte puede obtener un balón de fútbol a un costo de 20UM por pelota y estima que si se fija el precio de venta en p UM la unidad entonces la demanda será de 40(22-*p)* balones al mes. ¿Qué precio deberá fijarse al consumidor a fin de obtener la máxima utilidad? (**Resp.** p=21)

8) Los costos fijos mensuales de una fábrica de morrales son 4000UM y el costo variable por unidad es de 14UM. La fabrica puede vender q unidades a un precio de p por unidad, en donde $p=50-\frac{q}{10}$. ¿Cuántos morrales deberán producirse y venderse al mes de modo de obtener **a)**Ingresos máximos. **b)** Utilidad máxima (Resp. 180, 250)

9) Una fábrica de lavadoras vende 5000 lavadoras al mes si el precio es de 40UM cada una y estima que por cada incremento de 1UM las ventas bajarán en 400 lavadoras. Si la fábrica tiene costos fijos mensuales de 40.000UM y el costo por lavadora es 20. **a)¿**Qué precio deberá fijarse a cada lavadora de modo que la utilidad sea máxima? **b)** ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima? (**Resp.** 42.5, 62.500)

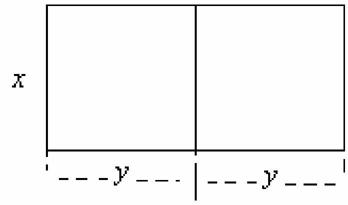
10) En ciertos terrenos se estima que si se plantan 100 matas de mangos por hectárea se obtendrá un valor de la cosecha por árbol de 500 UM en su edad adulta. Se estima que por cada árbol que se siembre de más hará que el valor promedio por árbol disminuya en 4 UM. **a)** Exprese el valor total de la cosecha de una hectárea en edad adulta en función del número de árboles adicionales sembrados. **b)** ¿Cuál es el número de árboles que debe plantarse por hectárea a fin de obtener el valor máximo posible de la cosecha por hectárea? **c)**¿Cuál es este valor máximo? (**Resp.** $V=50.000+200x-4x^2$; 112,5; 50.625)

11) Un productor puede vender 200 unidades de un artículo al mes a un precio de 15UM y 300 unidades a un precio de 10UM **a)** Exprese la demanda q mensual como función del precio asumiendo que existe una relación lineal entre ellas a partir de una producción de 100UM. **b)** Exprese los ingresos como función de q. **c)** Si el costo de producir un artículo es 5UM, Exprese la utilidad como función de q. **d)** ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? **e)** ¿Cuál es la utilidad máxima? (**Resp. a)** $q=-20p+500$; **b)** $I=-20p^2+500p$; **c)** $u=-20p^2+600p-2500$; **d)** $p=15$ **e)** 7000UM)

12) Un agricultor puede vender el saco de apio a 30UM el primero de septiembre, el precio del apio empieza a disminuir a una tasa aproximada de 0.5 UM por semana. Para la fecha del 1 de septiembre él tiene 120 sacos y estima que su cosecha aumentará en tres sacos por semana. ¿Cuándo le convendrá vender su cosecha? (**Resp.** dentro de 10 semanas)

PROBLEMAS GENERALES

1) Con 200 metros se quiere cercar 2 corrales idénticos como muestra la figura. **a**) Exprese el área total como función de x **b)** Calcule las dimensiones de los corrales que tiene área máxima
(**Resp**. 100/3m.x25m.)



2) El número de kilómetros K, que puede viajar un automóvil con un litro de gasolina depende de la velocidad. Para una cierta marca de automóvil se estima que la cantidad de kilómetros está dada por el siguiente modelo: $K(v)=\dfrac{-v^2+190v}{1400}$, donde v es la velocidad y el modelo se ha demostrado apropiado para velocidades menores de 180km/seg. Calcule la velocidad más rendidora.

3) La tasa de crecimiento de una población está dada por: $y=1.3x(130.000-x)$ individuos por año, donde x es el tamaño actual de la población. Estime el tamaño de la población donde la tasa de crecimiento es más alta.

(En el modelo $y=1.3x(130.000-x)$ 130.000 representa el tamaño tope de la población. Este modelo está sustentado en que la tasa de crecimiento es directamente proporcional al tamaño de la población y a la diferencia entre el tope de crecimiento de la población y el tamaño existente)

4) El porcentaje de sobrevivencia de un cierto tipo de larvas a una temperatura constante T(grados Celsius) al cabo de una semana es modelado por la fórmula

$$P(T)=-1.6T^2+80.32T-953.016 \quad \text{para } 20 \le T \le 30$$

Halle las temperaturas a las cuales sobrevive el mayor y el menor porcentaje de larvas. (en 25.1ºC sobrevive el mayor porcentaje y en 30º el menor)

5) La velocidad de la sangre que está a r centímetros del eje central de una arteria de radio R es $S(r)=c(R^2-r^2)$, donde c es una constante positiva. ¿Dónde es mayor la velocidad de la sangre?

(**Resp.** En el centro)