Matemática 2° Medio

UNIDAD 1. Potencias y raíces

En esta Unidad se profundizan los conocimientos acerca de potencias y raíces.

Luego de un repaso de las principales ideas relativas a las potencias de exponente natural y entero, se estudia la raíz cuadrada como un primer ejemplo de raíz enésima.

En relación con la raíz cuadrada, se introduce y analiza la definición en su relación con las potencias de exponente 2, se subraya la necesidad de que la cantidad subradical sea positiva, se presentan algunas alternativas para el cálculo de raíz cuadrada, con uso de una calculadora o mediante aproximaciones sucesivas, se presentan algunas aplicaciones extraídas de contextos geométricos o de ciencias y se discuten los casos en que la raíz cuadrada de un número natural es un número natural o un número irracional.

Luego, como generalización de la raíz cuadrada, se presenta la raíz enésima y su interpretación en relación con las potencias de exponente natural. Sobre la base de la definición y de lo que los estudiantes ya saben acerca de las potencias, se analizan algunas de sus propiedades. En especial, se mencionan los casos en que la raíz es un número irracional y los casos en que la raíz no tiene solución en el conjunto de los reales, y se presentan y demuestran procedimientos de multiplicación y división de raíces de igual índice.

Por último, la Unidad expone una interpretación para las potencias de exponente racional ampliando el rango de existencia de potencias que hasta ahora se limitaban a potencias de exponente natural y entero.

Contenidos	Aprendizajes esperados	Actividades sugeridas
Revisión de conocimientos acerca de las potencias	• Interpretan potencias de base racional y exponente entero.	Se sugiere trabajar las siguientes guías: **Guía nº 1** (Las potencias)
Raíces	• Interpretan la raíz cuadrada de un número y aplican el concepto en diversos contextos. • Reconocen el carácter irracional de algunas raíces. • Interpretan la raíz enésima de un número y conocen algunas de sus propiedades. • Establecen relaciones entre las raíces y las potencias de exponente racional.	**Guía nº 2** (La raíz cuadrada) **Guía nº 3** (La raíz enésima de un número) **Guía nº 4** (Potencias de exponente natural)

GUÍA N° 1
LAS POTENCIAS

Potencias de exponente natural

En la Educación Básica conocimos las potencias, empezando por las potencias cuyo exponente es un número natural. Si el exponente es mayor que 1, la potencia a^n corresponde a una multiplicación de factores iguales en que la base de la potencia indica el factor que se repite y el exponente indica la cantidad de veces que ese factor aparece.

Así:

$3^2 = 3 \cdot 3$ $\qquad$ $0,8^4 = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8$ $\qquad$ $(1/4)^3 = (1/4) \cdot (1/4) \cdot (1/4)$

Y en general:

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots$ (n veces)

en que n es un número natural y a es un número racional.

En especial, se considera que $a^1 = a$.

Si el exponente de la potencia es un número natural, se puede demostrar que el producto de dos potencias de igual base es una potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores. Y el cuociente de dos potencias de igual base (distinta de 0) es una potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

En lenguaje algebraico:

$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$ $\qquad$ $a^n : a^m = a^{(n-m)}$

Por su parte, el producto de dos potencias de igual exponente es una potencia cuya base es el producto de las bases de los factores y cuyo exponente es el mismo de los factores.

Y el cuociente de dos potencias de igual exponente es una potencia cuya base es el cuociente entre la base del dividendo y la base del divisor y cuyo exponente es el mismo del dividendo y del divisor. Por supuesto, la base del divisor debe ser distinta de 0.

En lenguaje algebraico:

$a^n \cdot b^n = ab^n$ $\qquad$ $a^n : b^n = (a/b)^n$

Para que el exponente del cuociente sea un número natural, el exponente del dividendo debe ser mayor que el del divisor.

También podemos deducir una relación para una potencia elevada a potencia.

$(a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot a^n \ldots$ (m veces)

$= a^{nm}$

Es decir, para elevar una potencia a potencia, conservamos la base y multiplicamos los exponentes.

ACTIVIDADES

1. (a) Encuentra mentalmente, por escrito o con calculadora el valor numérico de cada una de las siguientes potencias.

5^5 $\quad 11^3$ $\quad 2^5$ $\quad 25^4$ $\quad 4^4$

$0{,}2^3$ $\quad 0{,}01^3$ $\quad 0{,}5^2$ $\quad (1/3)^2$

2. (a) Encuentra el valor numérico de $(-1)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

   (b) ¿Qué se puede decir acerca del signo del valor numérico de una potencia si la base es negativa?

3. (a) Expresa como potencia de exponente 2 los siguientes números.

4 81 100 64 10.000

   (b) Expresa como potencia de exponente 3 los siguientes números.

1 1.000 27 8 64

4. (a) Muestra que $1^n = 1$ para todo número natural n distinto de 0.

   (b) Muestra que $0^n = 0$ para todo número natural n distinto de 0.

   (c) ¿Es lo mismo a^b que b^a ? Explica tu respuesta.

   (d) ¿Es lo mismo $(a^b)^c$ que $a^{(b^c)}$? Explica tu respuesta.

5. (a) Alicia afirma que $2^2 \cdot 4 = 2^4$. ¿Tiene razón? Explica tu respuesta.

   (b) Jorge afirma que $a^2 \cdot a^3 \cdot b^5 = (ab)^5$. ¿Tiene razón? Explica tu respuesta.

6. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

$(x^2y/z^3) \cdot (xz^2/y^3)$ $\qquad x(xy)^2 : 1/y^3$

Potencias de exponente entero

La definición de potencia de exponente natural puede extenderse fácilmente a las potencias de exponente entero bajo la condición que los procedimientos de multiplicación y división de potencias sigan siendo válidos.

Consideremos, en primer lugar, una división de una potencia de exponente natural por sí misma.

$a^n : a^n$ con a distinto de 0

Por una parte, sabemos que si se divide un número por sí mismo el resultado siempre es 1.

$a^n : a^n = 1$

Por otra parte, si aplicamos la regla de división de potencias de igual base, tendremos:

$a^n : a^n = a^{(n-n)} = a^0$

De modo que si no queremos que haya contradicciones con las operaciones con potencias de base natural, tendremos que establecer que para cualquier número a distinto de 0 se cumple que:

$a^0 = 1$ con a distinto de 0

Consideremos ahora la división $1/a^n$ en que a es un número racional distinto de 0 y n es un número natural distinto de 0.

Acabamos de ver que cualquier potencia de exponente 0 es igual a 1, de modo que podemos reemplazar el 1 por la potencia a^0.

$1/a^n = a^0 : a^n$

Y si aplicamos la regla de división de potencias de igual base, tendremos:

$1/a^n = a^0 : a^n = a^{(0-n)} = a^{-n}$

Como n es un número natural distinto de 0, $-n$ debe ser un entero negativo.

Una vez más, si no queremos que haya contradicciones con las operaciones con potencias de base natural, tendremos que establecer que una potencia a^{-n} cuyo exponente es un entero negativo es igual al inverso multiplicativo de a^n. Es decir:

$a^{-n} = 1/a^n$

En resumen, tenemos las siguientes relaciones, en que a es un número racional y n es un número natural distinto de 0.

$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots$ (n veces)

$a^1 = a$.

$a^0 = 1$

$a^{-n} = 1/a^n$

ACTIVIDADES

1. ¿Qué interpretación darías a las siguientes potencias?

   2^{-3} $0,5^{-2}$ $(1/3)^{-4}$ $(-1)^{-1}$ $(-0,1)^{-2}$

2. Escribe el valor numérico de las siguientes potencias de 10.

   10^{-3} 10^{-5} 10^{-1} 10^{1} 10^{0}

3. ¿Qué características tienen todas las potencias de 10 de exponente entero negativo?

GUÍA N° 2
LA RAÍZ CUADRADA

La raíz cuadrada de un número positivo

Aplicando la definición de potencias para los distintos casos podemos determinar el valor de cualquier potencia si conocemos su base y su exponente. Es decir, en una ecuación del tipo:

$$a^n = x$$

encontramos el valor de x formando el producto de n veces el factor a.

Para el caso que $n = 2$, el valor de x será igual al cuadrado de a.

Supongamos que se conoce el valor numérico de la potencia a^2, pero no se conoce su base. Es decir, se tiene una ecuación del tipo:

$$x^2 = b$$

En este caso, se trata de encontrar un número x cuyo cuadrado sea igual al valor conocido b.

Esta ecuación tiene 2 soluciones, en que una de ellas es el inverso aditivo de la otra. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 25$ tiene como soluciones $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$.

Ahora podemos definir la *raíz cuadrada* de un número positivo b como el número positivo cuyo cuadrado es b. Para designar la raíz cuadrada de b se emplea el símbolo:

$$x = \sqrt{b}$$

Es necesario subrayar que b debe ser un número positivo, pues no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo.

Y, como acabamos de decir, de las dos soluciones de la ecuación $x^2 = b$, la raíz cuadrada de b es la solución positiva.

ACTIVIDADES

1. Con ayuda de una calculadora, Fernando ha determinado que el cuadrado de 286 es 81.796.

   (a) ¿Es posible con esta información saber cuánto es la raíz cuadrada de 286? Explica tu respuesta.

   (b) ¿Es posible saber cuánto es la raíz cuadrada de 81.796? Explica tu respuesta.

   (c) Además del número 286, ¿qué otro número elevado al cuadrado es igual a 81.796?

2. Encuentra el número cuya raíz cuadrada es 50. Explica tu respuesta.

3. Supongamos que se sabe que $p = q^2$, en que p es un número natural. ¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones son necesariamente verdaderas?

   $p = \sqrt{q}$ $\qquad$ $q = \sqrt{p}$ $\qquad$ $\sqrt{p} > 0$ $\qquad$ $(-q)^2 = p$

Cálculo de raíces cuadradas

Tú conoces procedimientos de cálculo para el caso de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. El procedimiento de cálculo de potencias es también relativamente simple.

En relación con el cálculo de la raíz cuadrada, la situación no es tan sencilla. Felizmente la tecnología viene en nuestra ayuda. Muchas calculadoras tienen una tecla especial para el cálculo de raíz cuadrada. Asimismo, en el computador las planillas de cálculo también permiten la determinación directa de raíces cuadradas. En tales casos, el problema estaría resuelto.

Pero supongamos que no disponemos de un computador y nuestra calculadora no tiene posibilidad de cálculo de raíz cuadrada. Aún así la batalla no está perdida. Veamos qué se puede hacer.

Existe un procedimiento de cálculo escrito de raíz cuadrada. Es bastante complicado y no se justifica tratar de aprenderlo. En todo caso, si tienes interés puedes encontrar numerosos sitios en internet en que se explican procedimientos. Por ejemplo, puedes ir al sitio de Wikipedia (http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_de_la_ra%C3%ADz_cuadrada).

En las actividades que siguen se analizan algunas alternativas más sencillas.

ACTIVIDADES

1. Si necesitamos encontrar la raíz cuadrada de un número que es un cuadrado perfecto, la situación se puede resolver fácilmente.

   (a) Encuentra mentalmente la raíz cuadrada de los siguientes números.

   49 25 81 1 100

   (b) ¿Cómo podemos encontrar la raíz cuadrada de una potencia de 10 de exponente par?

2. (a) Carla piensa así: "El número 12 está entre 9 y 16. Por lo tanto, su raíz cuadrada debería estar entre 3 y 4". ¿Tiene razón?

   (b) ¿Entre qué números naturales debe estar la raíz cuadrada de 40?

   (c) ¿ Entre qué números naturales debe estar la raíz cuadrada de 90?

3. Si el resultado no es evidente a simple vista, podemos ir aproximándonos paulatinamente con ayuda de una calculadora.

   (a) Supongamos que queremos determinar la raíz cuadrada de 580. Este número está entre 10^2 y 10^4. Por lo tanto su raíz cuadrada debe estar entre 10 y 100. Explica cómo se llega a esta conclusión.

   (b) Determina mentalmente el cuadrado de 50. De acuerdo con el resultado, ¿la raíz de 580 es mayor o menor que 50?

(c) Ya sabemos que la raíz de 580 está entre 10 y 50. Determina mentalmente el cuadrado de 20. De acuerdo con el resultado, ¿la raíz de 580 es mayor o menor que 20?

(c) Ya sabemos que la raíz de 580 está entre 20 y 50. Probemos ahora con el cuadrado de 30. ¿Qué podemos concluir acerca de la raíz de 580?

(d) Ya estamos cerca. Con ayuda de una calculadora anda delimitando cada vez más el intervalo en el que debe estar la raíz de 580 hasta encontrar el número natural más cercano.

(e) Por supuesto, si lo deseas, puedes continuar la búsqueda agregando cifras decimales al resultado.

4. Francisco afirma que la raíz cuadrada de 2 está entre 1,41 y 1,42. ¿Cómo podríamos saber si tiene razón?

Raíz cuadrada en diferentes contextos

La raíz cuadrada suele aparecer en contextos geométricos y en varios campos de las ciencias. A continuación se mencionan algunos ejemplos.

ACTIVIDADES

1. Sabemos que el área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lados.

   Si llamamos S a área y a a la longitud de lado, podemos escribir:

   $$S = a^2$$

   De acuerdo con esto, tendremos:

   $$a = \sqrt{S}$$

   (a) Una hectárea equivale a 10.000 m^2. ¿Cuánto debería medir cada lado de una parcela de forma cuadrada para que su superficie sea de una hectárea?

   (b) ¿Aproximadamente cuánto debería medir cada lado de una parcela de forma cuadrada para que su superficie sea de media hectárea?

2. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, en todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa debe ser igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

   (a) Aplica este teorema para determinar la longitud aproximada de la diagonal de un cuadrado que mide 10 cm de lado.

   (b) Explica con ayuda de un ejemplo cómo se podría calcular la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo si se conociera la longitud de su hipotenusa y la del otro cateto.

3. Si se deja caer un objeto, la altura h desde la cual cae y el tiempo t que demora en llegar al suelo están relacionados mediante la ecuación:

   $$h = gt^2/2$$

   Esta ecuación es válida si el roce del aire es despreciable y en ella g representa la aceleración de gravedad. Si la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos, g tiene un valor muy cercano a 10 m/s^2.

   Con ayuda de esta ecuación, determina cuánto demora en llegar al suelo una moneda que se suelta desde una altura de 1 m.

Carácter irracional de algunas raíces cuadradas

Ya hemos dicho que la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución en el conjunto de los reales pues no hay ningún número real cuyo cuadrado sea negativo.

Pero aún la raíz cuadrada de un número positivo tiene limitaciones en el conjunto de los números racionales.

Consideremos, a modo de ejemplo, la raíz cuadrada de un número natural n.

El caso más simple se da si n es un cuadrado perfecto. Es decir, si existe un número natural p tal que $p^2 = n$. En estas condiciones, tendremos simplemente que:

$$\sqrt{n} = p$$

Pero si n es un número natural pero no es un cuadrado perfecto, entonces la raíz cuadrada de n será un número irracional. El siguiente razonamiento demuestra esta afirmación.

Supongamos que la raíz de n es un número racional q. Si q es racional, entonces se puede expresar como el cuociente de dos números naturales a y b:

$$q = \frac{a}{b}$$

Supondremos que la fracción a/b es una fracción irreductible, es decir, se ha simplificado tanto como sea posible de modo que no es posible seguir simplificándola porque los números naturales a y b no tienen ningún factor en común.

Ahora bien, para que q sea la raíz cuadrada de n, debe cumplirse que:

$$q^2 = n$$

Es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = n$$

Y aplicando la regla de elevación a potencia de un cuociente, tendremos:

$$\frac{a^2}{b^2} = n$$

Si la fracción a/b es una fracción irreductible, la fracción a^2/b^2 también lo es, pues al elevar a y b al cuadrado no aparecen nuevos factores que pudieran permitir una simplificación.

Pero cualquier número natural puede escribirse como una fracción de denominador 1. De modo que:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{n}{1}$$

Analicemos este resultado. Esta ecuación nos dice que las fracciones a^2/b^2 y $n/1$ son iguales. Pero también sabemos que ambas fracciones son irreductibles, de modo que una no puede ser una amplificación de la otra. Eso deja una sola posibilidad: ambas fracciones son exactamente iguales, o sea, sus numeradores son iguales entre sí y sus denominadores son iguales entre sí.

Por lo tanto, podemos afirmar que:

$b^2 = 1$ (y por lo tanto, $b = 1$)

$a^2 = n$

Veamos qué nos dice esta última igualdad. Recordemos que a y n son números naturales. Si n es un cuadrado perfecto, entonces:

$\sqrt{n} = a$

Pero si n no es un cuadrado perfecto, entonces no hay ningún número natural a que cumpla con la condición $a^2 = n$, y todo nuestro razonamiento queda invalidado. Esto nos obliga a desechar la suposición inicial de que la raíz cuadrada de n es un número racional.

De modo que no hemos encontrado la raíz cuadrada de n, pero hemos llegado a una conclusión muy interesante:

> Si el número natural n es un cuadrado perfecto, entonces su raíz cuadrada es también un número natural. Pero si n no es un cuadrado perfecto, entonces su raíz cuadrada es un número irracional.

ACTIVIDADES

1. Repite para el caso que $n = 64$ el razonamiento que acabamos de hacer.
2. Repite para el caso que $n = 2$ el razonamiento que acabamos de hacer.
3. El número 10 no es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, de acuerdo con lo que henos visto, su raíz cuadrada debe ser un número irracional.
   (a) ¿Qué significa que la raíz cuadrada de 10 sea un número irracional?
   (b) Un sitio de internet afirma que la raíz cuadrada de 10 es 3,162. Con ayuda de una calculadora encuentra el cuadrado de ese número. ¿Qué opinas acerca del resultado obtenido?

GUÍA N° 3
LA RAÍZ ENÉSIMA DE UN NÚMERO

Interpretación de la raíz enésima de un número

A lo largo de esta guía solo trabajaremos con números dentro del conjunto de los reales positivos.

Hemos hablado acerca de la raíz cuadrada de un número. Como vimos, si a es un número positivo, llamamos raíz cuadrada de a al número positivo x que cumple la condición $x^2 = a$.

En este sentido, la operación de extracción de raíz es una operación inversa a la operación de elevación a potencia. Las 2 igualdades que siguen son equivalentes para el caso que tanto p como q sean positivos. Son dos formas de expresar la relación que existe entre los números p y q.

$$p = q^2 \longleftrightarrow q = \sqrt{p}$$

La raíz cuadrada está relacionada directamente con las potencias de exponente 2. Esta no es la única posibilidad. También podemos definir raíces asociadas a potencias de otros exponentes.

Así, una potencia de exponente n se asocia a la *raíz enésima* en la siguiente forma.

$$p = q^n \longleftrightarrow q = \sqrt[n]{p} \qquad \text{con } q \geq 0$$

Es decir, la *raíz enésima* de un número p es el número positivo q que elevado a n es igual a p.

De aquí se desprende un par de relaciones que no conviene olvidar:

$$\left[\sqrt[n]{p}\right]^n = p \qquad \sqrt[n]{p^n} = p \qquad \text{con } p \geq 0$$

En el símbolo que representa una raíz distinguimos el *índice* y la *cantidad subradical*, tal como muestra el siguiente diagrama.

índice → $\sqrt[n]{p}$ ← cantidad subradical

En el caso de la raíz cuadrada se suele omitir el índice. Es decir, si en una raíz no se indica el índice se subentiende que se trata de una raíz cuadrada.

La raíz de índice 3 se suele llamar *raíz cúbica*, la de índice 4 se suele llamar *raíz cuarta*, la de índice 5 se suela llamar *raíz quinta*, y así sucesivamente.

ACTIVIDADES

1. Mirta afirma que la raíz cuarta de 625 es 5. ¿Cómo podrías saber si tiene razón?

2. ¿Cómo podríamos encontrar el número cuya raíz quinta es 2?

3. (a) Reescribe cada una de las siguientes relaciones utilizando el lenguaje de raíces.

   $3^5 = 243$ $\qquad$ $x^3 = 216$ $\qquad$ $a^b = c$

   (b) Reescribe cada una de las siguientes relaciones utilizando el lenguaje de potencias.

   $121 = \sqrt{11}$ $\qquad$ $y = \sqrt[4]{256}$

4. Más arriba se afirma que son válidas las siguienes relaciones:

   $\left[\sqrt[n]{p}\right]^n = p$ $\qquad$ $\sqrt[n]{p^n} = p$ $\qquad$ con $p \geq 0$

   ¿Qué argumentos darías tú para mostrar que efectivamente son verdaderas?

5. ¿Se podría afirma que $\sqrt[n]{1}$ para cualquier número natural n distinto de 0?

Propiedades de las raíces

Daremos un rápido vistazo a algunas propiedades de las raíces.

1) <u>Existencia de soluciones racionales para las raíces</u>
Muchas de las raíces no tienen solución en el conjunto de los racionales.

Ya habíamos visto, por ejemplo, que las raíces cuadradas de un número natural solo tienen solución racional si la cantidad subradical es un cuadrado perfecto. En caso contrario, la solución será irracional.

Esto no solo es válido para la raíz cuadrada de números naturales. Una raíz enésima de un número natural tiene solución natural si la cantidad subradical es una potencia enésima exacta. Si no se cumple esa condición, el valor numérico de la raíz será un número irracional.

En general, es mucho más frecuente encontrar raíces irracionales que raíces racionales.

2) <u>Existencia de soluciones reales para las raíces</u>
Si la cantidad subradical es negativa, no hay solución real para raíces de índice par, ya que no existe ningún número real, positivo o negativo que elevado a un exponente par sea negativo.

Sin embargo, si el índice es impar, la raíz tiene soluciones reales y estas tienen el mismo signo que la cantidad subradical. Esto es consecuencia de que una potencia impar de un número negativo es también negativo.

3) <u>Producto y cuociente de raíces de igual índice</u>
Podemos multiplicar y dividir raíces de igual índice. Se cumplen en estos casos las relaciones:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

La demostración es simple y se basa en la propia definición de raíz enésima y en los procedimientos de multiplicación y división de potencias de igual exponente.

Daremos aquí la demostración para el caso de multiplicación de raíces de igual índice.

Designemos por x e y las raíces que se van a multiplicar:

$$\sqrt[n]{a} = x \qquad\qquad \sqrt[n]{b} = y$$

Por lo tanto, tendremos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = xy \qquad\qquad a = x^n \qquad\qquad b = y^n$$

Formemos el producto ab:

$$ab = x^n \cdot y^n = (xy)^n$$

De modo que tenemos que:

$$ab = (xy)^n$$

Y aplicando la definición de raíz enésima, tendremos que:

$$xy = \sqrt[n]{ab}$$

Pero sabíamos que:

$$xy = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

4) <u>Elevación a potencia de una raíz</u>
Para elevar a potencia una raíz basta elevar a potencia la cantidad subradical, como queda claro con la siguiente demostración.

Si p es un número natural, se tiene que:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ \ldots \ (p \text{ veces})$$

Y aplicando la regla de multiplicación de raíces, tendremos:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \ \ldots \ (p \text{ veces})}$$

Pero

$$a \cdot a \cdot a \ \ldots \ (p \text{ veces}) = a^p$$

Por lo tanto, tenemos finalmente

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

ACTIVIDADES

1. ¿Cuál o cuáles de las siguientes raíces tienen solución racional?

$$\sqrt[2]{16} \qquad \sqrt[3]{16} \qquad \sqrt[4]{16} \qquad \sqrt[5]{16}$$

2. (a) ¿Qué signo tendrá el valor numérico de cada una de estas potencias si x es un número positivo?

$$x^2 \qquad x^3 \qquad x^4 \qquad x^5 \qquad x^6 \qquad x^7$$

   (b) ¿Y si x es un número negativo?

3. (a) ¿ Cuál o cuáles de las siguientes raíces no tienen solución en el conjunto de los números reales si a es un número positivo?

$$\sqrt[2]{a} \qquad \sqrt[3]{a} \qquad \sqrt[4]{a} \qquad \sqrt[5]{a}$$

   (b) ¿Y si a es un número negativo?

4. Tanto la raíz cuadrada de 2 como la raíz cuadrada de 8 son irracionales. ¿Pero qué sucede con el producto de estas dos raíces? Explica tu respuesta.

5. Demuestra que:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Puedes basarte en el procedimiento de multiplicación de raíces de igual índice y en el hecho que $8 = 4 \cdot 2$.

6. (a) Tomando como ejemplo la demostración dada para la multiplicación de raíces de igual índice, demuestra que para la división de raíces de igual índice se cumple la relación

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

   (b) Propón algunos ejemplos que ilustren esta relación.

7. Demuestra que:

$$(\sqrt{5})^3 = \sqrt{125}$$

GUÍA N° 4
POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

En busca de una interpretación

En nuestros estudios acerca de las potencias en años anteriores hemos dado interpretaciones bien definidas para las potencias de exponente natural y para las potencias de exponente entero.

Ya sabemos que si p es un número natural mayor que 1, entonces se cumple que:

$$a^p = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \; (p \text{ veces})$$

Además sabemos que $a^1 = a$ y que $a^0 = 1$.

Estas relaciones valen para cualquier número natural, entero o racional a. La única excepción es la potencia a^0 que no está definida para $a = 0$.

Si p es un número entero, entonces a^{-p} es el inverso multiplicativo de a^p. Es decir,

$$a^{-p} = 1/a^p$$

También esta relación vale para cualquier número natural, entero o racional a. Y nuevamente la única excepción es el caso en que tanto a como p valen simultáneamente 0.

Ahora estamos en condiciones de seguir ampliando la definición de potencia para abarcar los casos en que el exponente es un número racional, es decir, potencias del tipo $a^{p/q}$, en que p y q son números enteros.

Consideremos, en primer lugar, la potencia $a^{1/q}$. Si designamos esta potencia por x, tendremos:

$$a^{1/q} = x$$

Si elevamos a la potencia q, tenemos:

$$(a^{1/q})^q = x^q$$

Pero

$$(a^{1/q})^q = a^1 = a$$

Por lo tanto,

$$x^q = a$$

Es decir,

$$x = \sqrt[q]{a}$$

Tenemos, finalmente:

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$$

O sea, una potencia del tipo $a^{1/q}$ tiene una interpretación muy simple en términos de raíz enésima.

Y para obtener una interpretación para las potencias del tipo $a^{p/q}$ basta elevar a potencia p ambos lados de esta última igualdad.

$$(a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

Y aplicando lo que conocemos acerca de la elevación a potencia de una potencia o de una raíz, tendremos:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

ACTIVIDADES

1. Determina el valor numérico de las siguientes potencias.

   $27^{1/3}$ $\quad 27^{2/3}$ $\quad 16^{3/4}$ $\quad 25^{3/2}$

2. Si $a^3 = x$, ¿cuál o cuáles de las siguienes igualdades son verdaderas?

   $a = \sqrt[3]{x}$ $\quad x = \sqrt[3]{a}$ $\quad x^2 = a^6$

   $x^{1/3} = a$ $\quad x^{2/3} = a^2$ $\quad x^{3/2} = a^3$

3. Encuentra la expresión más simple para cada una de las siguentes expresiones.

   $p^{1/3} \cdot p^{2/3}$ $\quad \sqrt[5]{p^{10}}$ $\quad p\sqrt{p}$

4. Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones. (Tal vez te convenga expresar las raíces en forma de potencias de exponente racional).

   $\sqrt[2]{z} \cdot \sqrt[5]{z}$ $\quad \sqrt[2]{z} : \sqrt[5]{z}$ $\quad \sqrt[4]{z} \cdot \sqrt[4]{z^2} \cdot \sqrt[4]{z^3}$