Ejercicios Espacios Vectoriales

1. Determine si los subconjuntos indicados son subespacios vectoriales del espacio vectorial V con las operaciones usuales de suma y producto por escalar sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

   a) $V = \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$
      (i) $M = \{(x, y, z) : xyz \geq 0\}$
      (ii) $N = \{(x, y, z) : y = x\}$
      (iii) $S = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0\}$
      (iv) $T = \{(x, y, z : x - yz = 0\}$

   b) $V = \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$
      (i) $R = \{(x, y) : x + \overline{y} = 0\}$
      (ii) $P = \{(x, y) : Re(x) = Re(y)\}$

   c) $V = \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$
      (i) $R = \{(x, y) : x + \overline{y} = 0\}$
      (ii) $P = \{(x, y) : Re(x) = Re(y)\}$

   d) $V = M_2(\mathbb{Q}), \quad \mathbb{K} = \mathbb{Q}$
      (i) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$
      (ii) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$
      (iii) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a + b = 0 \wedge a, b \in \mathbb{R} \right\}$
      (iv) $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a + 2b - 1 = 0 \wedge a, b \in \mathbb{R} \right\}$

2. Justificar adecuadamente si el conjunto V con operación suma $\oplus$ y multiplicación por escalar $\odot$ definidos en cada caso es espacio vectorial.

   a) $V = \mathbb{R}_+, \mathbb{K} = \mathbb{R}, x \oplus y = xy, \alpha \odot x = x^\alpha$
   b) $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}, (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 - y_2), \alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1)$
   c) $V = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{R}, x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha \odot x = \sqrt{\alpha}x$

3. Demuestre que si U es subespacio vectorial de V sobre $\mathbb{K}$ y E es subespacio vectorial de U sobre $\mathbb{K}$, entonces E es subespacio vectorial de V.

4. Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \neq 0$.
   a) Sea el conjunto $S = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{b} = 0\}$
      (i) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Pruebe que $S = \{\overrightarrow{x} = \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

b) Sea el conjunto $T = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = 0\}$.

(i) Demuestre que T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Pruebe que $T = \{\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

5. Considere los siguientes subespacios del espacio vectorial real $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$

❖ $U = \{p \in \mathbf{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$

❖ $V = \{p \in U : p(-1) = 0\}$

❖ $W = \{ax + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$

a) Demuestre que efectivamente son subespacios vectoriales de $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Si $U' = \{p \in \mathbf{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 1\}$, ¿es subespacio vectorial de $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$?

c) Encuentre al menos un vector no nulo en cada espacio y represéntelo gráficamente.

d) Determine $V \cap W$ y $U + W$, y determine si U y W están o no en suma directa.

6. Sean

$$N_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$
$$N_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y - z + 4t = 0\}$$
$$N_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 4y + 5t = 0\}$$

Determine $N_1 \cap N_2 \cap N_3$.

7. Sean

$$S = < \left\{x^2 - 1, x^2 + 1\right\} >$$
$$T = \{p \in \mathbf{P}_2(\mathbb{R}), p(x) = ax^2 + bx + c : a + b = 0,\ c = 0\}$$

a) Encuentre $S + T$.

b) Escriba $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$ como suma de un polinomio $s(x) \in S$ y un polinomio $t(x) \in T$.

c) ¿Es $S \oplus T = \mathbf{P}_2(\mathbb{R})$?