UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN

ESPACIOS VECTORIALES

HERNÁN CALDERÓN ROMERO Y ALBERTO MARDONES GONZALEZ

Definición 1

*Sea Kun conjunto y sean + y * dos operaciones binarias internas definidas sobre K, llamada SUMA y Producto respectivamente. diremos que K, con estas operaciones, es un CUERPO si se satisfacen los siguientes axiomas:*
A_1.- *La suma es una operación asociativa, esto es,* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x + (y + z) = (x + y) + z$.
A_2.- *La suma es conmutativa, esto es,* $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x$
A_3.- *Existe en Kun elemento neutropara la operacion +, esto es, existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $\forall x \in K, x + 0 = x$
A_4.- *Para cada* $x \in \mathbb{K}$*, existe* $-x \in \mathbb{K}$*, llamado simetrico de x, tal que* $x + (-x) = 0$
A_5.- *El producto es una operación asociativa, esto es,* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x * (y * z) = (x * y) * z$
A_6.- *Existe en Kun elemento neutro para la operacion producto, esto es, existe 1* $\in \mathbb{K}, 1 \neq 0, tal que \forall x \in \mathbb{K}, x * 1 = 1 * x = x$. *Usualmente, 1 se dice el elemento unidad de K.*
$A-7$.- *Para todo elemento* $x \in \mathbb{K}, x \neq 0, existe x^{-1} \in \mathbb{K}$*, llamado inverso de x, tal que* $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$.
A_8.- *La operacion producto es distributiva con respecto a a la suma, esto es,* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x*(y+z) = x*y+x*z$
Diremos que Kes un CUERPO CONMUTATIVO, si ademas se satisface:
A_9.- $\forall x, y \in \mathbb{K}, x * y = y * x$
Observaciones

(1) *Escribiremos la terna (K,+,*) para indicar que el conjunto Kcon las operaciones + y * es un cuerpo.*

(2) *Los conjuntos Q, R, y Cde los numeros racionales, reales y complejos respectivamente, constituyen cuerpos conmutativos con las operaciones de suma y producto usuales.*

Definición 2

Sean V un conjunto, Kun cuerpo y
+: VxV $\longrightarrow V$
(x,y) $\longrightarrow x + y$*, una operacion binaria interna llamada suma.*
y
**:KxV:* $\longrightarrow V$
$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$*, una operación binaria externa llamada producto por escalar.*
*Diremos que V con las operaciones + y * es un ESPACIO VECTORIAL sobre Ko un K-ESPACIO VECTORIAL, si se satisfacen los siguientes axiomas:*
V_1.- $\forall x, y, z \in V, (x + y) + z = x + (y + z)$.
V_2.- $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x$.
V_3.- *Existe un elemento* $\theta_V \in V$*, llamado VECTOR NULO de V tal que* $\forall x \in V, x + \theta_V = x$
V_4.- *Dado* $x \in V, existe - x \in V, llamado SIMETRICO O INVERSO de x, tal que v + (-x) = \theta_V$.
V_5.- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
V_6.- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
V_7.- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
V_8.-$\forall x \in V$, *1*x=x, donde 1 es el elemento unidad del cuerpo K.*

Observaciones

(1) *Los elementos de V se denominan VECTORES y los elementos de KESCALARES.*
(2) *Del axioma* V_3 *se concluye que* $V \neq \emptyset . Si \mathbb{K} = \mathbb{R}, diremosque V esunespaciovectorialreal. Si \mathbb{K} = \mathbb{C}, diremosque V esunespaciovectorialcomplejo.$
(3) *Cualesquiera sean los vectores x e y de V, x+(-y) se escribe como x-y y se llama DIFERENCIA ENTRE x e y.*

Propiedades de los espacios vectoriales

(1) *El elemento neutro* θ_V *para la operacion suma, cuya existencia postula* V_3 *es unico.*
(2) *Para cada elemento x de V, el inverso -x para la operacion +, es unico.*
(3) *Ley de cancelacion*
$\forall x, y, z \in V, x + y = x + z \Rightarrow y = z$
(4) *El producto escalar 0 por cualquier vector es el vector nulo*
(5) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V, (-\alpha)x = -(\alpha x)$
(6) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \theta_V = \theta_V$
(7) $\alpha * x = \theta_V \Rightarrow (\alpha = 0 \vee x = \theta_V), \alpha \in \mathbb{K}, x \in V$

Subespacio

Definicion 3

Sea V un K- Espacio vectorial y S un subconjunto de V. Diremos que S es un SUBESPACIO VECTORIAL DE V, si S es un espacio vectorial sobre Kcon las mismas operaciones de suma y producto por escalar definidas en V.

Observacion

Cualquiera sea el espacio V, tanto θ_V *como V son subespacios de V llamados subespacios triviales.*

Teorema 1

Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V. Entonces S es un subespacio vectorial de V si y solo si:

(1) $S \neq \emptyset$
(2) $(x \in S \wedge y \in S) \Rightarrow x + y \in S$
(3) $(\lambda \in \mathbb{K}, x \in S) \Rightarrow \lambda x \in S$

Interseccion de subespacios

Teorema 2

Si S y T son dos subespacios vectoriales de un mismo K-espacio vectorial v, entonces la interseccion de S y T, $S \cap T$*, es un subespacio vectorial de V.*

Union de subespacios

En general la union de subespacios no es subespacio vectorial.

Teorema 3

Si S y T son subespacios de un K-espacio vectorial V, entonces $S \cup T$ *es subespacio si y solo si* $S \subseteq T \vee T \subseteq S$.

Suma de subespacios

Sean S y T dos subespacios del mismo K-espacio vectorial V, se llama SUMA DE S Y T al conjunto

$$S + T = \{v \in V / v = s + t, s \in S \wedge t \in T\}$$

Teorema 4

S+T es un subespacio vectorial de V

Observacion

Si $S \cap T = \{\theta_V\}$*, la suma de S+T se llama SUMA DIRECTA y se escribe:*

$$S \oplus T$$

Combinaciones lineales, dependencia lineal e independencia lineal

Definicion 4

Sean, V un K-espacio vectorial, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *vectores de V. El vector X es COMBINACION LINEAL (C.L.) de* $x_1, x_2, ..., x_n$ *si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tales que*

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

<u>Observacion</u>

El vector nulo es C.L. de cualquier conjunto de vectores. En efecto, $\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall x_1, x_2, ..., x_n \in V$*;* $\theta_V = 0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n$.

Teorema 5

Sean V un K-espacio vectorial y A= $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$*. el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de A es un subespacio vectorial de V.*

Definicion 5

Sean V un K-espacio vectorial y A= $\{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$*; A es un conjunto LINEALMENTE DEPENDIENTE (L.D.) si existen escalares no todos nulos* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{K}$ *tales que*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = \theta_v$$

Si A no es un conjunto L.D., se dice que es LINEALMENTE INDEPENDIENTE(L.I.)

Definicion 6

S es un conjunto LINEALMENTE INDEPENDIENTE si todo subconjunto finito de S es L.I.

<u>Observaciones</u>

(1) Que el conjunto A= $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ *sea L.I. significa que la unica C.L. de* $v_1, v_2, ..., v - r$ *que da como resultado el vector nulo es la trivial, es decir,*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = \theta_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$$

(2) Todo conjunto que consta de un unico vector distinto del nulo es L.I.
En efecto, si A=x, $x \neq \theta_V$ *entonces*

$$\alpha x = \theta_V \Rightarrow \alpha = 0$$

(3) Todo conjunto que contiene al vector nulo es L.D. basta observar que

$$1 * \theta_v + 0 * v_1 + ... + 0 * v_r = \theta_V \quad \forall v_1, v_2, ..., v_r \in V$$

(4) El conjunto $\emptyset es L.I.$
$Si \emptyset fuese L.D., existirian vectores v_1, ..., v_r$ *en* $\emptyset y escalares \alpha - 1, ... \alpha_r$ *no todos nulos tal que*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = \theta_V$$

Decir que existen vectores $v_1, v_2, ..., v_r \in \emptyset$ *es una contradiccion que proviene de suponer que* $\emptyset$ *es L.D. Por lo tanto* $\emptyset$ *es L.I.*

Observaciones

(1) *Si* $\{ v_1, ..., v_k \}$ *es un conjunto de vectores L.D., entonces uno de los vectores es C.L. de los restantes.*

(2) *Reciprocamente, si un vector v es C.L. de* $v_1, v_2, ..., v_k$*, entonces* $\{ v, v_1, v_2, ..., v_k \}$ *es L.D.*
En efecto, existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *tales que :*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k$$

Luego

$$1 * v - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - ... - \alpha_k v_k = \theta_V$$

Los escalares de la C.L. no son todos nulos, por lo tanto $\{ v, v_1, v_2, ..., v_k \}$ *es L.D.*

(3) *Todo subconjunto de un conjunto L.I. es L.I.*

(4) *Todo conjunto de vectores que contenga un subconjunto L.D. es L.D.*

(5) *Si el conjunto* $A = \{ v_1, v_2, ..., v_k \}$ *es un sistema de generadores de L.D. del espacio vectorial V, entonces existe* $v_j \in A$ *tal que A-* $\{ v - j \}$ *es un sistema de generadores de V*

Definicion 7

Un subconjunto A= $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ *del* $\mathbb{K}$ *-espacio vectorial V es L.I. MAXIMAL, si A es L.I. y si A* $\cup \{ w \}$ *es L.D., cualquiera sea* $w \in V$, $w \neq v_i$, *i=* $\overline{1, n}$

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definicion 8

Sea V un $\mathbb{K}$ *-espacio vectorial .*
A= $\{ v_1, v_2, ..., v_n \} \subseteq$ *V es una BASE DE V si:*

(1) *A es L.I.*

(2) *A es un sistema de generadores de V*

Observacion
Se conviene considerar una base como un conjunto ordenado de vectores

Teorema 6

Todo espacio vectorial posee base.

Teorema 7

Sea V un $\mathbb{K}$*-espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores* $v_1, v_2, ..., v_n$*. Entonces todo conjunto L.I. de vectores de V es finito y contiene a lo mas n vectores.*

Corolario

Dos bases cualesuiera de un mismo espacio vectorial tienen igual numero de elementos

Definicion 9

Se llama DIMENSION de un $\mathbb{K}$*-espacio vectorial V al numero de elementos de una base cualquiera de V. Se denota Dim V.*
Si V consiste unicamente en el vector nulo, diremos que su dimension es 0.
Observacion
De aqui en adelante considerademos mayoritariamente espacios vectoriales de dimencion finita

Proposiciones

(1) *En un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial V de dimension n , todo subconjunto S L.I. con n vectores es una base de V*

(2) *Toda base de un espacio vectorial es un conjunto L.I. maximal, es decir, si B es base y B´ es L.I. tal que* $B \subseteq B'$

Observaciones

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimension n, entonces:

1. *(1) Todo subconjunto de V con mas de n vectores es L.D.*
2. *(2) Todo subconjunto de V con menos de n vectores no genera a V*
3. *(3) Todo subconjunto de V con n elemntos que genera a V es una base de V*
4. *(4) Todo subconjunto de V, L.I. con n elementos es una base de V*
5. *(5) Todo subconjunto L.I. de V se puede extender a una base de V*
6. *(6) Si W es un subespacio de V, entonces dim $W \leq n$*
7. *(7) Si W es un subespacio de V y dim $W = n$, entonces $W = V$*

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimencion finita, B= $\{ v_1, v_2, ..., v_n \}$ una base de V. Entonces todo vector x de V se escribe en forma unica como C.L. de los vectores de B.

Observacion

Si B= $\{ v_1, v_2, ..., v_n$ base del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces

$$[v_i]_B = (0...0\ 1\ 0...0)^T es\ \ el\ \ i - esimo\ \ lugar$$