UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERIOR

HERNÁN CALDERÓN ROMERO Y ALBERTO MARDONES GONZALEZ

De ahora en adelante consideraremos espacios vectoriales $\mathbb{K}$ *donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. *Una aplicacion* $<,> : VxV \longrightarrow \mathbb{K}$ *se dice un* **Producto interior** *sobre V si verifica:*

(1) $< v, v > \geq 0 \;\; \forall v \in V, < v, v > = 0 \Longleftrightarrow v = \theta$

(2) $\forall v_1, v_2, w \; inV, \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$< \alpha v_1 + \beta v_2, w > = \alpha < v_1, w > + \beta < v_2, w >$$

(3) $< v, w > = \overline{< w, v >} \forall v, w \in V, donde"\text{—}"$ *indica el complejo del conjugado*

Propiedades

(1) $\forall v \in V : < v, v > = \overline{< v, v >}$ *entonces* $< v, v > \in \mathbb{R}$

(2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y v espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *entonces (3) anterior se transforma en* $< v, w > = < w, v >$

(3) $< v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \bar{\alpha_1} < v, w_1 > + \bar{\alpha_2} < v, w_2 >$, *en efecto:*

$$< v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 > = \overline{< \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, v >}$$
$$= \overline{\alpha_1 < w_1, v > + \alpha_2 < w_2, v >} = \bar{\alpha_1} \overline{< w_1, v >} + \bar{\alpha_2} \overline{< w_2, v}$$
$$= \bar{\alpha_1} < v, w_1 > + \bar{\alpha_2} < v, w_2 >$$

En particular si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *se tiene:*

$$< v, \alpha w_1 + \beta w_2 > = \alpha < v, w_1 > + \beta < v, w_2 >$$

Definicion

Si V es un espacio vectorial con producto interior sobre $\mathbb{R}$ *se dice que V es* **euclidiano**. *Si V es un espacio vectorial con producto interior sobre* $\mathbb{C}$ *se dice que V es* **unitario**.

Definicion

Sea V un espacio vectorial con producto interior, $v \in V$. *Se llama* **norma** *(o longitud) del vector v al numero* $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$

Propiedades

(1) $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = \vec{\theta}$

$\|v\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{< v, v >} = 0 \Longleftrightarrow < v, v > = 0 \Longleftrightarrow v = \theta$

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

$\|\alpha v\| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} < v, v >} = \sqrt{|\alpha|^2 < v, v >} = |\alpha| \sqrt{< v, v >} = |\alpha| \|v\|$

(3) $\forall v, w \in V, | < v, w > \leq \|v\| \|w\|$ *desigualdad de Cauchy-Schwartz*

(4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definicion

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior

(1) *v,w* $\in$ *V,* **v es ortogonal a w** *si* $< v, w >= 0$
(2) *un subconjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de V es un* **conjunto ortogonal** *si* $< v_i, v_j >= 0 \ \ \forall i \neq j$
(3) *un subconjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *de V es un* **conjunto ortonormal** *si es un conjunto ortogonal y* $\|v_i\| = 1 \ \ \forall i = 1, ..., n$

Lema

Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es L.I.*

Corolario

Si un vector w es C.L. de un conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *entonces w es igual a la C.L. particular*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{< w, x_k >}{\|x_k\|^2} x_k$$

Proceso de ortogonalizacion de Gram-Schmidt

Sea V un espacio vectorial con producto interior y sean $x_1, x_2, ..., x_m$ *vectores L.I. cualesquiera de V. Entonces se puede construir vectores ortogonales* $y_1, y_2, ..., y_m$ *en V tales que para cada k= 1,...,m*

$$< \{y_1, y_2, ..., y_k\} >=< \{x_1, x_2, ..., x_k\} >$$

Ejemplo(para n=4)

Si V es un espacio vectorial con producto interior y x_1, x_2, x_3, x_4 *son vectores L.I. de V, entonces los vectores ortogonales construidos con el proceso anterior son:*

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - \frac{< x_2, y_1 >}{\|y_1\|^2} y_1$$
$$y_3 = x_3 - \frac{< x_3, y_1 >}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{< x_3, y_2 >}{\|y_2\|^2} y_2$$
$$y_4 = x_4 - \frac{< x_4, y_1 >}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{< x_4, y_2 >}{\|y_2\|^2} y_2 - \frac{< x_4, y_3 >}{\|y_3\|^2} y_3$$

Corolario

Todo espacio vectorial de dimension finita tiene una base ortonormal

Definicion

Sean V un espacio vectorial con producto interior, W subconjunto no vacio de V. Se llama **complemento ortogonal** *de W y se denota como* $W^\perp$ *al conjunto:*

$$W^\perp = \{x \in V | < x, v >= 0 \ \ \forall v \in W\}$$

<u>*Observacion*</u>

(1) $W^\perp$ *es un espacio vectorial de V*
  (a) $< \theta, v >= 0 \ \ \forall v \in V$, *en particular* $< \theta, v >= 0, \forall v \in W$ *entonces* $\theta \in W^\perp \neq \phi$
  (b) $x \in W^\perp \Longrightarrow < x, v >= 0 \ \ \forall v \in W$
  $y \in W^\perp \Longrightarrow < y, v >= 0 \ \ \forall v \in W$
  $< x + y, v >=< x, v > + < y, v >= 0 + 0 \ \ \forall v \in W$ *entonces x+y* $\in W^\perp$
  (c) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in W^\perp$
  $< \lambda x, v >= \lambda < x, v >= 0 \ \ \forall v \in W$ *entonces* $\lambda x \in W^\perp$
  De (a), (b) y (c) $W^\perp$ *es un subespacio.*
(2) *Si W es un subespacio y x es ortogonal a todo vector de una base de W entonces* $x \in W^\perp$

Definicion

Sean S y P dos conjuntos de un espacio vectorial V.Diremos que P es **ortogonal a S** *si* $\forall u \in S, \forall v \in P \quad < u, v >= 0$

Se escribe $S \perp P$ *para indicar que S y P son conjuntos ortogonales.*