UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN

TRANSFORMACIONES LINEALES

HERNÁN CALDERÓN ROMERO Y ALBERTO MARDONES GONZALEZ

Definicion 1

Sean V y W dos $\mathbb{K}$- espacios vectoriales. Se llama **Transformacion lineal** *de V en W a toda funcion f:$V \to W$ que verifica las siguientes condiciones:*

(1) *f(x+y)= f(x)+f(y),* $\forall x, y \in V$

(2) *f(λx)= λf(x),* $\forall x \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, *es decir, la imagen de la suma de vectores es igual a la suma de las imagenes de cada vector, y la imagen del producto escalar por la imagen del vector.*
Las transformaciones lineales (T.L.) se suelen denotar por letras mayusculas T,L,..., etc.
Las condiciones (1) y (2) son equivalentes a la siguiente:

(3) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \ \forall x, y \in V$

En efecto, para obtener (1) y (2) de (3) basta considerar $\alpha = \beta = 1$ y se tiene la condicion (1).
Si $\beta = 0$ se tiene la condicion (2).
La condicion (3) se obtiene aplicando la (1) seguida de la (2).

Propiedades

(1) *Sean T y L dos transformaciones lineales de V en W, entonces:*
   (a) *T(θ_V)= θ_W La imagen del vector nulo por una transformacion lineal es siempre el vector nulo.*
   (b) *T(-x)=-T(x)*
   (c) *T+L es una T.L.*
   (d) *λT es T.L., para todo $\lambda \in \mathbb{K}$*

(2) *Si T:V$\longrightarrow$ W y L:W$\longrightarrow$ Z son dos transformaciones lineales, entonces L o T: V$\longrightarrow$Z, es una T.L.*
En efecto:
Cualesquiera sean x,y en V y $\lambda \in \mathbb{K}$,
i) (L o T)(x+y)= L[T(x+y)]
=L[T(x)+T(y)] (Por ser T T.L.)
=L[T(x)]+L[T(y)]
=(L o T)(x)+(L o T)(y)
ii) (L o T)(λx)=L[T(λx)]
=L[λT(x)]
=λL[T(x)]
=λ(L o T)(x)

De i) y ii) se tiene que L o T es una T.L.
<u>Observacion</u>
Denotaremos por $\mathcal{L}(V,W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W donde V y W son espacios de dimension finita sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. De las letras c) y d) de la propiedad 1 se tiene que $\mathcal{L}(V,W)$ es un subespacio del espacio de todas las funciones de V en W donde la funcion nula es el vector nulo de $\mathcal{L}(V,W)$.
De ahora en adelante V y W seran espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$

Definicion 2

(1) *Sea T:V$\longrightarrow$W una T.L.*
Se llama **Kernel o Nucleo** *de T, al conjunto de todos los vectores de V tales que su imagen es el vector nulo de W, se denota por Ker(T), asi: Ker(T)=* $\{x \in V : T(x) = \theta_W\}$

(2) *Se llama* **Imagen** *de T al conjunto de las imagenes de todos los vectores de V, es decir, al recorrido de la funcion T. Se denota por Im(T). Asi:*
Im(T)=Rec(T)= $\{y \in V : \exists x \in V, T(x) = y\}$
o tambien
Im(T)= $\{T(x) : x \in V\}$

Proposicion 1

Sea T:V$\longrightarrow$W una T.L., entonces

(1) *Ker(T) es subespacio de V*
(2) *Im(T) es subespacio de W*

Definicion 3

Sea T:V$\longrightarrow$W una T.L. Se llama **Nulidad** *de T a la dimension del Ker(T) y se denota por η(T). Se llama* **Rango** *de T a la dimension de la Im(T) y se denota por ρ(T).*

Proposicion 2

Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es base del espacio V y T$\in \mathcal{L}$(V,W), entonces* $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *genera la Im(T).*

Proposicion 3

Sea T$\in \mathcal{L}$(V,W), entonces:
T es inyectiva si y solo si Ker(T)= $\{\theta_V\}$
<u>Observacion</u>:
Toda homotecia de razon "a", a$\neq$0 es inyectiva ya que ax= $\theta \Longrightarrow x = \theta$.

Propiedad*:*

Si T:V$\longrightarrow$W es una T.L. inyectiva y $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ *es L.I., entonces* $\{T(x_1), T(x_2), ..., T(x_p)\}$ *es L.I.En efecto: Si*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = \theta_W, \ \ entonces \ \ T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \theta_W$$

Como T es inyectiva, por la proposicion 3

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \theta_V$$

y por hipotesis, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$

Teorema de las dimensiones

Si T $\in \mathcal{L}$(V,W) entonces, dim(Ker(T))+dim(Im(T))=dim(V)

Teorema fundamental del algebra

Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, B=$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$*, base de V,* $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$*, conjunto <u>arbitrario</u> de vectores de W. Entonces existe una unica transformacion lineal T$\in \mathcal{L}$(V,W) tal que* $T(v_i) = w_i$*, i =1,2,...,n.*

Matriz asociada a una transformacion lineal

Sean V y W dos $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales,* $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ *bases de V y W respectivamente y T:V⟶W una transformacion lineal. Entonces:*

$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m$
$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m$
.
.
.
$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m$

La matriz

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

cuja j-esima columna esta formada por las coordenadas del transformado por T del j-esimo vector dfe la base B_1 *con respecto a la base* B_2 *se llama* **Matriz asociada a T con respecto a las bases** B_1 *y* B_2 *la denotaremos por* $M[T]_{B_1B_2}$ *o* $[T]_{B_1B_2}$ *o* $[T]_{B_1}^{B_2}$*. Observemos que el orden de* $[T]_{B_1}^{B_2}$ *es mxn donde m es la dimension de W y n es la dimension de V.*

Proposicion 1

Sean V y W dos $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ *bases de V y W respectivamente y A una matriz de orden mxn con elementos en* $\mathbb{K}$*. Entonces existe una unica transformacion lineal T de V en W tal que* $[T]_{B_1}^{B_2} = A$

Proposicion 2

Sean V y W dos $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ *bases de V y W respectivamente. Si T:V⟶W es una transformacion lineal, entonces:*

$$[T]_{B_1}^{B_2}[x]_{B_1} = [T(x)]_{B_2}$$

es decir, al multiplicar la matriz asociada a T por el vector coordenado de x respecto de la base B_1*, se obtiene el vector coordenado de la imagen de x por T respecto a la base* B_2 **Proposicion 3**

Sean V, W y y Z $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ *y* $B_3 = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ *bases de V, W y Z respectivamente.*

Si T:V⟶W y L:W⟶Z son transformaciones lineales, entonces:

$$[LoT]_{B_1}^{B_3} = [L]_{B_2}^{B_3} * [T]_{B_1}^{B_2}$$

Proposicion 4

Sean V y W dos $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales,* B_1 *y* B_2*, bases de V y W respectivamente.*

Si T:V⟶W y S:V⟶W son transformaciones lineales, entonces:

(1) $[T + S]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} + [S]_{B_1}^{B_2}$
(2) $[\lambda T]_{B_1}^{B_2} = \lambda[T]_{B_1}^{B_2}, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Proposicion 5

Si I es la transformacion lineal identica definida sobre un espacio vectorial V de dimension n y B una base de V, entonces

$$[I]_B^B = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

Proposicion 6

Sean T:V⟶V una transformacion lineal y B una base para V con dim(V)=n.
Si T es biyectiva entonces $[T]_B$ *es una matriz invertible y* $[T]_B^{-1} = [T^{-1}]_B$.

Definicion

Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ *y T:V⟶W una transformacion lineal.*
T es un **Isoformismo** *de V en W si T es una biyeccion. En este caso se dice que V es ISOMORFO a W o que los espacios son isomorfos.*

Proposicion 7

Sean V y W dos $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales con dim(V)=n y dim(W)=m,* $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *base de V y* $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ *base de W. Entonces,* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ *es isomorfo a* $M_{mxn}(\mathbb{K})$*, es decirc el espacio de las transformaciones lineales de V⟶W es isomorfo al espacio de las matrices de orden mxn con elementos en* $\mathbb{K}$

Matriz de transicion, matriz de cambio de base o matriz de paso

Definicion

Sea V un $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimension n,* $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *y* $B_2 = \{v_1', v_2', ..., v_n'\}$*, bases de V. Sea Id:V⟶V la transformacion identidad.*$[Id]_{B_1}^{B_2} = P = (p_{ij})_{nxn}$ *se llama MATRIZ DE TRANSICION, DE CAMBIO DE BASE O DE PASO DE LA BASE* B_1 *A LA BASE* B_2

$$Id(v_j) = v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \longrightarrow [Id]_{B_1}^{B_2} = P = (p_{ij})_{nxm}$$
$$Id(v_i') = v_i' = \sum_{j=1}^{n} q_{ji} v_j \longrightarrow [Id]_{B_2}^{B_1} = Q = (q_{ji})$$

La matriz Q corresponde a la matriz de transicion de B_2 *a* B_1
Observemos que $\forall v \in V$ *se tiene:*

(1)
$$[Id]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_2} = [Id(v)]_{B_2} = [v]_{B_2}$$
(2)
$$[Id]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_1} = [Id(v)]_{B_1} = [v]_{B_1}$$

$$\begin{aligned}[v]_{B_2} &=^{(1)} [Id]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_1} =^{(2)} [Id]_{B_1}^{B_2}[Id]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_2} \\ &= P * Q = Id\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}[v]_{B_1} &=^{(2)} [Id]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_2} =^{(1)} [Id]_{B_2}^{B_1}[Id]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_1} \\ &= Q * P = Id\end{aligned}$$

Luego P=Q^{-1} *o Q=*P^{-1}
P y Q son matrices no singulares