TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición 1. Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo, decimos que la función $T : V \to W$ es una *Transformación Lineal* si cumple las siguientes propiedades.

$$1.\ (\forall u, v \in V)\ T(u+v) = T(u) + T(v).$$
$$2.\ (\forall v \in V)(\forall \alpha \in K)\ T(\alpha v) = \alpha T(v).$$

Proposición 1. Si $T : V \to W$ es lineal, entonces:

$$1.\ T(\Theta_V) = \Theta_W.$$
$$2.\ (\forall v \in V)\ T(-v) = -T(v).$$

Definición 2. Dada $T : V \to W$ lineal, se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Ker(T) &= \{v \in V \mid T(v) = \Theta_W\} \\ Im(T) &= \{T(v) \mid v \in V\} \\ &= \{w \in W \mid (\exists v \in V)\ T(v) = w\} \end{aligned}$$

$Ker(T)$ se llama núcleo de T, y $Im(T)$ se llama imagen de T

Proposición 2. Dada $T : V \to W$ lineal, se cumple que:

1. $Ker(T)$ es un subespacio vectorial de V
2. $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W

Definición 3. Dada $T : V \to W$ lineal, se define:

1. $n(T) = \dim(Ker(T))$ y se llama nulidad de T.
2. $r(T) = \dim(Im(T))$ y se llama rango de T.

Observación 1. Dada $T : V \to W$ lineal, se cumple la siguiente equivalencia.

$$T \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow r(T) = \dim(W)$$

Teorema 1. Dada $T : V \to W$ lineal, se cumple la siguiente equivalencia.

$$T \text{ inyectiva } \Leftrightarrow n(t) = 0$$

Proposición 3. Dada $T : V \to W$ lineal, y $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V, se tiene que:

$$Im(T) = \langle\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}\rangle$$

Proposición 4. Si $T : V \to W$ es lineal e inyectiva, y $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto l.i.. entonces se tiene que el conjunto $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es también l.i.

Teorema 2 (núcleo-imagen). Dada $T : V \to W$ lineal, con V un e.v. de dimensión finita, se cumple

$$n(T) + r(T) = \dim(V)$$

Corolario 1. Si $\dim(V) = \dim(W)$, y $T : V \to W$ es lineal, entonces se cumple la siguiente equivalencia

$$T \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow T \text{ es inyectiva}$$

Observación 2. Dados dos espacios vectoriales V, W, se define el conjunto de las aplicaciones lineales de V en W por:

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}.$$

Con la suma y ponderación usuales de funciones resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

Proposición 5.1. Dada $T : V \to W$ lineal e invertible, resulta que $T^{-1} : W \to V$ es también lineal.

Proposición 5.2. Dadas $L : U \to V$ y $T : V \to W$ lineales, resulta que $T\,o\,L : U \to W$ es también lineal.

Definición 4.(Matriz Representante) Dada $T : V \to W$ lineal, $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ una base de W, se define la matriz representante de T respecto a B_V y B_W como sigue:

$$[T]_{B_V}^{B_W} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_{B_W} & [T(v_2)]_{B_W} & \dots & [T(v_n)]_{B_W} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Proposición 6. La matriz representante de T cumple que, para todo $v \in V$:

$$[T(v)]_{B_W} = [T(v)]_{B_V}^{B_W}[v]_{B_V}.$$

Proposición 7.1 Dada B_V una base de V se cumple que:

$$[id]_{B_V}^{B_V} = I_n$$

Proposición 7.2 Dada $T : V \to W$ lineal e invertible, dadas B_V base de V y B_W base de W, resulta que

$$[T^{-1}]_{B_W}^{B_V} = \left([T]_{B_V}^{B_W}\right)^{-1}$$

Proposición 7.3 Dadas $L : U \to V$ y $T : V \to W$ lineales, y dadas B_U base de u, B_V base de V y B_W base de W, resulta que:

$$[ToL]_{B_U}^{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W}[L]_{B_U}^{B_V}.$$

Proposición 7.4 $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(V)\dim(W)$.

Observación 3. Si consideramos dos distintas bases de V, B_1 y B_2, entonces la matriz representante de la función identidad de V en V ya no será la matriz identidad, será una matriz interesante que llamaremos matriz de paso de la base B_1 a la base B_2, y la denotamos por:

$$P_{B_1}^{B_2} = [id]_{B_1}^{B_2}.$$

Cumple una interesante propiedad que, para todo $v \in V$:

$$P_{B_1}^{B_2}[v]_{B_1} = [v]_{B_2},$$

además

$$P_{B_1}^{B_2} = \left(P_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}.$$

Si tenemos dos bases de W, B_{1W} y B_{2W}, y dos bases de V, B_{1V} y B_{2V} entonces:

$$[T]_{B_{1V}}^{B_{1W}} = P_{B_{2W}}^{B_{1W}}[T]_{B_{2V}}^{B_{2W}}P_{B_{1V}}^{B_{2V}}.$$

Definición 5. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define :

$$n(A) = \dim(\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \theta\}), \text{ la nulidad de A.}$$
$$r(A) = \dim(\{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\}), \text{ el rango de A.}$$

Proposición 8. Dada $T : V \to W$ lineal, B_V base de V y B_W base de W, se cumple que:

$$n([T]_{B_V}^{B_W}) = n(T)$$
$$r([T]_{B_V}^{B_W}) = r(T)$$

Lo cual implica que matrices que representan la misma transformación lineal tienen igual nulidad y rango.

Definición 6. Dos matrices A, B cuadradas en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dicen *semejantes* si existe una matriz

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = M^{-1}BM$

Proposición 9.

- Toda matriz cuadrada A es semejante a sí misma.
- Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
- Si A es semejante a B, y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Observación 4. Si $V = W$, y B_1, B_2 son dos bases de V, vemos que

$$[T]_{B_1}^{B_1} = \left(P_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} [T]_{B_2}^{B_2} P_{B_1}^{B_2}$$

Es decir, $[T]_{B_1}^{B_1}$ y $[T]_{B_2}^{B_2}$ son semejantes.

Proposición 10. A y B son semejantes *si y solo si* representan la misma transformación lineal.

Demostración. Si A y B representan la misma aplicación lineal, ya sabemos, de la observación anterior, que son semejantes.

Supongamos ahora que A y B son semejantes, y sea M la matriz que cumple $A = M^{-1}BM$.

Definimos $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ por $T(x) = Bx$, es claro que B es la matriz representante de T respecto a la base canónica C. Tomamos ahora la base B_2 consistente en los vectores columna de M.

Se tendrá que $P_{B_2}^{C} = M$, y que $P_{C}^{B_2} = M^{-1}$, por lo tanto

$$A = M^{-1}BM = \left(P_{B_2}^{C}\right)^{-1} [T]_{C}^{C} P_{B_2}^{C} = [T]_{B_2}^{B_2}$$

Es decir, A y B representan a T.

Proposición 11. Si A y B son semejantes, entonces:

1. $tr(A) = tr(B)$.
2. $\det(A) = \det(B)$.
3. $r(A) = r(B)$.
4. $n(A) = n(B)$.