UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN

TRANSFORMACIONES LINEALES

HERNÁN CALDERÓN ROMERO Y ALBERTO MARDONES GONZALEZ

Definicion 1

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea T:V$\longrightarrow$V un operador lineal.
Todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

(1)
$$T(v) = \lambda v$$

Para algun v$\in$V, v$\neq \theta$ se llama VALOR PROPIO O CARACTERISTICO de T.
Cada v$\in$V, v$\neq \theta$ que satisface (1) se dice un VECTOR PROPIO O VECTOR CARACTERISTICO de T asociado al valor propio λ.

Teorema 1

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, T:V$\longrightarrow$V un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T. Entonces los vectores propios asociados a λ son los vectores no nulos de Ker(T-λId).
Observacion
Notemos que el conjunto de todos los vectores propios de un operador lineal T:V$\longrightarrow$V asociados al valor propio λ, unido con el vector nulo es un subespacio de V. En efecto,
Sea

$$\begin{aligned} H &= \{v \in V | T(v) = \lambda v\} \cup \{\theta_V\} \\ &= \{v \in V | (T - \lambda Id)(v) = \theta\} \cup \{\theta_V\} \\ &= Ker(T - \lambda Id) \end{aligned}$$

Definicion 2

El conjunto H definido en la observacion anterior se llama ESPACIO PROPIO ASOCIADO al valor propio λ y se denota por S_λ

Teorema 2

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea T:V$\longrightarrow$V una transformacion lineal. Si B es una base para V, entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si y solo si $|[T - \lambda Id]_B| = 0$.
Observaciones

(1) Observemos que $|[T - \lambda Id]_B|$ es un polinomio en λ de grado n= dim V, llamado POLINOMIO CARACTERISTICO de t.
Por tanto, λ es un valor propio de T si y solo si λ es raiz de su polinomio caracteristico. Asi, toda T.L. definida sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial tiene n valores propios, donde n es la dimension del espacio; la multiplicidad de la raiz λ_i del polinomio caracteristico se llama multiplicidad algebraica de λ_i.

(2) La dimension del espacio propio correspondiente al valor propio λ se llama multiplicidad geometrica de λ

(3) Si λ es valor propio de T, entonces multiplicidad geometrica de $\lambda \leq$ multiplicidad algebraica de λ

(4) λ es valor propio de una matriz cuadrada A si λ es valor propio de T donde A es una matriz asociada a T respecto a cualquier base.

Observacion

Se puede probar que toda matriz simetrica tiene todos sus valores propios reales. Recordemos que una matriz a=$(a_{ij})_{nxn}$ es SIMETRICA si y solo si $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in 1, ..., n$.

Teorema 3

Los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son L.I.