NORMA Y PRODUCTO INTERIOR

Definición 1. Dado un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{C}$, decimos que la operación $\langle \ ; \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un *producto interno (p.i.)* si satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall u, v, w \in W,\ \langle u + v; w\rangle = \langle u; w\rangle + \langle v; w\rangle$
2. $(\forall u, v \in V)\ (\forall \lambda \in \mathbb{K})\ \langle \lambda u; v\rangle = \lambda\langle u; v\rangle$
3. $\forall u, v \in V,\ \langle u; v\rangle = \overline{\langle v; u\rangle}$
4. $\forall u \in V,\ \langle u; u\rangle \geq 0$
5. $\forall u \in V,\ \langle u; u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \Theta$

Proposición 1. Si $\langle \ ; \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K})$ es un producto interno, entonces se cumple lo siguiente: $(\forall u, v, w \in V)\ (\forall \lambda \in \mathbb{K}$

1. $\langle u; \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u; v\rangle$
2. $\langle u; v + w\rangle = \langle u; v\rangle + \langle u; w\rangle$

Proposición 2. Si $\langle \ ; \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un producto interno, entonces se cumple la siguiente desigualdad llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

$$(\forall u, v \in V)\ |\langle u; v\rangle| \leq \sqrt{\langle u; u\rangle}\sqrt{\langle v; v\rangle}$$

Definición 2. Dado un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, decimos que la función $||\ || : V \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ es una *norma* si satisface las siguientes propiedades.

- $\forall u \in V,\ ||u|| \geq 0$
- $\forall u \in V,\ ||u|| = 0 \Leftrightarrow u = \Theta$
- $(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ (\forall u \in V)\ ||\lambda u|| = |\lambda|\ ||u||$
- $\forall u, v \in V,\ ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

Ejemplo: en $V = \mathbb{R}^n$, la función $||u|| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u_i|$ es una norma.

Proposición 3. Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$, se cumple la función definida por

$$\forall u \in V,\ ||u|| = \sqrt{\langle u; u\rangle}$$

es una norma. Tal norma la llamaremos *norma inducida por* $\langle \ ; \ \rangle$

Proposición 4. Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle\ ;\rangle$ y una norma inducida $||\ ||$, se cumplen los siguientes

1. (Pitágoras) $\forall u, v \in V,\ ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ si y solo si $Re\langle u; v\rangle = 0$
2. (Ley del paralelógramo) $\forall u, v \in V,\ ||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$.

La primera propiedad nos sugiere que podemos considerar una noción de *ortogonalidad*, aunque será más conveniente pedir un poco más.

Definición 3. Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$ y norma inducida $||\ ||$, decimos que

1. u y v son ortogonales si $\langle u; v\rangle = 0$ y entonces denotamos $u \perp v$,
2. el conjunto $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es ortogonal si $(\forall i \neq j)\ u_i \perp u_j$ y $(\forall i \in \{1, \ldots, k\})\ u_i \neq \Theta$
3. el conjunto $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es ortonormal si es ortogonal y $(\forall i \in \{1, \ldots, k\})||u_i|| = 1$.

Proposición 5. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es ortogonal, entonces es l.i.

Proposición 6. Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es ortogonal, entonces es base de $U = \langle \{u_1, \ldots, u_k\}$ y para todo $u, v \in U$ se cumple que:

$$\langle v; w \rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v; u_i \rangle \overline{\langle w; u_i \rangle}}{||u_i||^2}$$
$$||v||^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v; u_i \rangle|^2}{||u_i||^2}$$

Además, la i-ésima coordenada de v en la base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es $\frac{|\langle v; u_i \rangle|}{||u_i||^2}$.

Definición 4. Dado un espacio vectorial V con producto interior $\langle \ ; \ \rangle$ y dado un conjunto $S \subseteq V$, definimos su espacio ortogonal por

$$S^{\perp} = \{u \in V \mid (\forall s \in S)\ u \perp s\}$$

Proposición 7. Dado un espacio vectorial V con producto interior, dados dos conjuntos $S, S' \subseteq V$, y dados un s.e.v. U de V, se cumplen los siguientes

1. $\{\Theta\}^{\perp} = V$
2. $V^{\perp} = \{\Theta\}$
3. $S^{\perp}$ es un s.e.v de V
4. $\langle S \rangle^{\perp} = S^{\perp}$
5. $S' \subseteq S \Rightarrow S^{\perp} \subseteq S'^{\perp}$
6. $U \cap U^{\perp} = \{\Theta\}$

Si además V tiene una dimensión finita, entonces se cumple:

1. $U \oplus U \perp = V$
2. $\langle S \rangle = (S^{\perp})^{\perp}$

Definición 5. Dado U un s.e.v. de V, y $v \in V$, se define la *proyección ortogonal* de v sobre U como el único vector $u \in U$ para el cual existe $w \in U^{\perp}$ tal que $v = u + w$. Se denota:

$$u = Proy_U(v).$$

Proposición 8. Si U está generado por el conjunto ortogonal $\{u_1, \ldots, u_k\}$, entonces la proyección ortogonal de v en U queda dada por:

$$Proy_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, u_i \rangle}{||u_i||^2} u_i.$$

Observación 1. Dado U, generado por el conjunto ortogonal $\{u_1, \ldots, u_k\}$, y $v \in V$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $Proy_U(v) \in U$
2. $v \ - \ Proy_U(v) \in U^{\perp}$

Esto nos permite definir un método para obtener un conjunto ortogonal a partir de un conjunto l.i.

Proposición 9. (Método de Gram-Schmidt) Dado un conjunto l.i. $\{u_1, \ldots, u_k\}$ en V, definimos el conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ por recurrencia, como sigue.

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_{i+1} &= u_{i+1} - Proy_{(\{u_1,\ldots,u_i\})}(u_{i+1}) \\ &= u_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} v_i \frac{\langle u_{i+1}; v_j \rangle}{||v_j||^2} \end{aligned}$$

Resulta que $\{v_1, \ldots, u_k\}$ es ortogonal y genera el mismo espacio que $\{u_1, \ldots, u_k\}$.
Corolario 1. Todo espacio de dimensión finita tiene alguna base ortonormal.