Vectores y Valores Propios

Definición 1. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *valor propio* de T si existe $v \in V,\ v \neq \theta_V$, tal que:

$$Tv = \lambda v.$$

Los valores propios también son llamados autovalores, valores característicos o valores espectrales de T.
Definición 2. Si λ es un valor propio de T, a cada $v \in V,\ v \neq \theta_V$ que satisfaga la igualdad anterior se le llama *vector propio* de T asociado (o correspondiente) a λ.
Observacion 1. Si λ valor propio de T, entonces:

1. Se llama *espectro* de T al conjunto

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ es valor propio de } T\}$$

2. Se define el *espacio propio* asociado a λ por:

$$S_\lambda := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

3. $S_\lambda = Ker(T - \lambda I)$

4. $\theta_V \in S_\lambda$, pero θ_λ no es un vector propio asociado a T

Teorema 1. Si V tiene dimensión finita y B es una base para V, entonces

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \det([T - \lambda I]_B) = 0$$

Definición 3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A si existe $x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq \theta$ tal que

$$Ax = \lambda x$$

Cada $x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq \theta$ que satisface la igualdad anterior se llama vector propio de A asociado a λ.
Teorema 2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

1. $\lambda \in \sigma(A) \iff \det(A - \lambda I) = 0$

2. $S_\lambda = Ker(A - \lambda I)$

Observacion 2. Si λ es valor propio de A, entonces

1. La expresión $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n en la variable λ, se llama polinomio característico de A; $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$.

2. La ecuacion $\det(A - \lambda I) = 0$ es la ecuación característica de A.

3. Cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene n valores propios en $\mathbb{C}$, contando su multiplicidad.

Proposición 1. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son similares (semejantes), entonces $\sigma(A) = \sigma(B)$
Teorema 3. Sea V un espacio vectorial con escalares $\mathbb{K}$, de dimensión finita y sea B cualquier base de V. Si $T : V \to V$ es un operador lineal con $\sigma(T) \subset \mathbb{K}$, entonces:

1. $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma([T]_B)$

2. $v \in S_\lambda(T) \Leftrightarrow [v]_B \in S_\lambda([T]_B)$, esto es

$$Tv = \lambda v \Leftrightarrow [T]_B[v]_B = \lambda[v]_B$$

Definición 4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sus valores propios diferentes, entonces

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

donde $r_1 + \dots + r_k = n$. Para cada valor propio $\lambda_i,\ i = 1, \dots, k$ se definen:

- la *multiplicidad algebraica* de λ_i por r_i;
- la *multiplicidad geométrica* de λ_i por $g_i := \dim S_{\lambda_i}$.

Proposición 2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces

1. Para cada $\lambda_i \in \sigma(A) : \quad g_i \leq r_i$
2. $\det(A) = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_k^{r_k}$
3. $\sigma(A^t) = \sigma(A)$
4. A es invertible $\Longleftrightarrow 0 \notin \sigma(A)$
5. Si A es invertible, entonces $\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1}$

Teorema 4. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sus valores propios diferentes. Si $x_1, \dots, x_k$ son vectores propios correspondientes, entonces $\{x_1, \dots, x_k\}$ es l.i.

Teorema 5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, entonces:

1. los valores propios de A son reales.
2. vectores propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales.
3. existe una base para $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A.

Observación 3. En el caso de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, el teorema anterior es válido tambien si A es una matriz hermitiana, es decir, $A = \overline{A}^t$

Definición 5. Sea V un espacio de dimensión finita. Un operador lineal $T : V \to V$ se dice *diagonalizable* si existe una base B para V tal que $[T]_B$ sea una matriz diagonal.

Teorema 6. Sea V un espacio de dimensión finita n. Si $T : V \to V$ es un operador lineal, entonces:

1. los vectores propios de T asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes.
2. si T tiene n valores propios diferentes, T es diagonalizable.

Teorema 7. Sean V un espacio de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sus valores propios diferentes y B_i una base para S_{λ_i}. Entonces, $B := B_1 \cup \dots \cup B_k$ es una base para $W := S_{\lambda_1} + \cdots + S_{\lambda_k}$

Teorema 8. Sean V un espacio de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sus valores propios distintos. Entonces, son equivalentes:

1. T es diagonalizable.
2. Para cada valor propio las multiplicidades, algebraica y geométrica, son iguales.
3. $V = S_{\lambda_1} + \dots + S_{\lambda_k}$
4. V tiene una base formada por vectores propios de T

Observación 4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si B es una base de V, formada por vectores propios de T, entonces

$$[T]_B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de T.
Definición 6. Una matriz A, cuadrada de orden n, se dice *diagonalizable* si es similar a una matriz diagonal.
Resultados análogos a los vistos para un operador diagonalizable valen para matrices diagonalizables. Como ejemplo considere los siguientes teoremas.
Teorema 9. Una matriz A de orden n es diagonalizable si, y sólo si, tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la forma diagonal de A es:

$$D := diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.
Teorema 10. Si una matriz A de orden n tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.