

GeoGebra Quickstart

Guía Rápida de Referencia sobre *GeoGebra*

Geometría dinámica, álgebra y análisis conforman el programa educativo *GeoGebra*, galardonado en numerosas ocasiones, un utilitario disciplinar que conjuga geometría y álgebra al mismo nivel de importancia.

Permite construir de modo muy simple, puntos, figuras, segmentos, rectas, vectores, cónicas y también gráficas de funciones dinámicamente modificables mediante el *mouse*. *GeoGebra* también admite expresiones como: $g: 3x + 4y = 7$ o: $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ y ofrece una gama de comandos entre los que cabe destacar la derivación y la integración.

La característica más destacable de *GeoGebra* es la doble percepción de los objetos: cada expresión de la Ventana de Álgebra se corresponde con un objeto de la Zona Gráfica y viceversa.

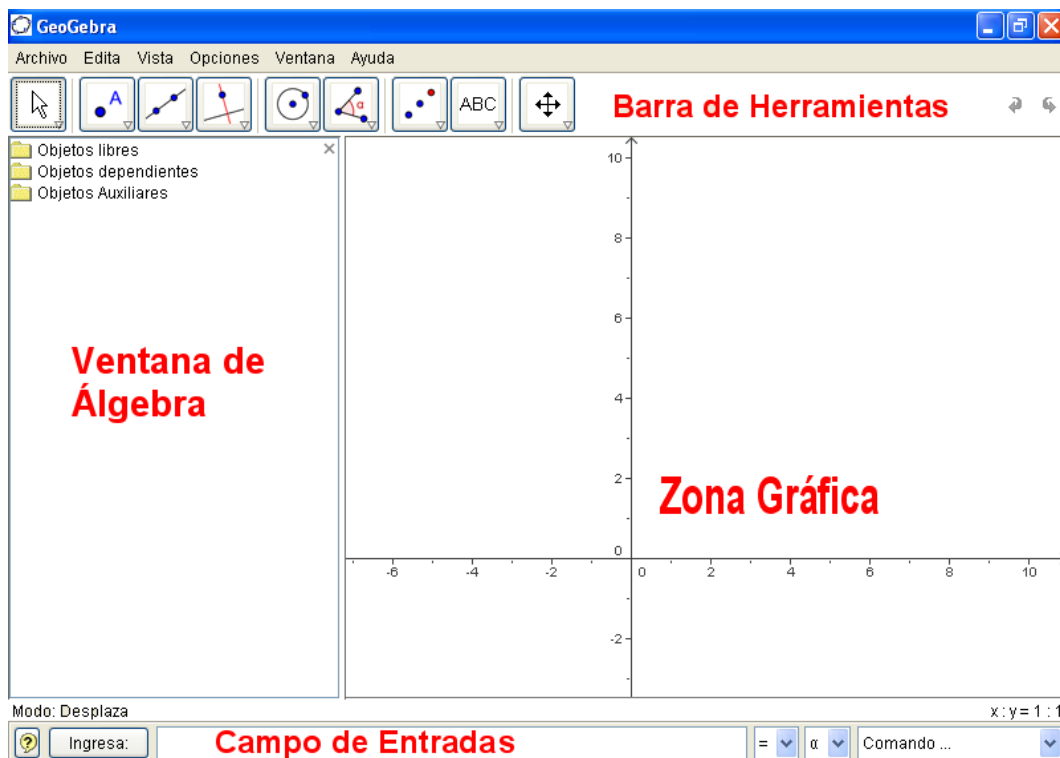
Esta guía se ofrece a quien quiera familiarizarse con *GeoGebra* activamente, examinando tres ejemplos para llevarse adelante consecutivamente, sin olvidar la comprobación experimental de las propuestas.

Ejemplo 1: Circunferencia que circunscribe un triángulo.

Ejemplo 2: Tangentes a una circunferencia.

Ejemplo 3: Derivada y tangente a la gráfica de una función.

Al iniciarse el programa se despliega una ventana como la siguiente:

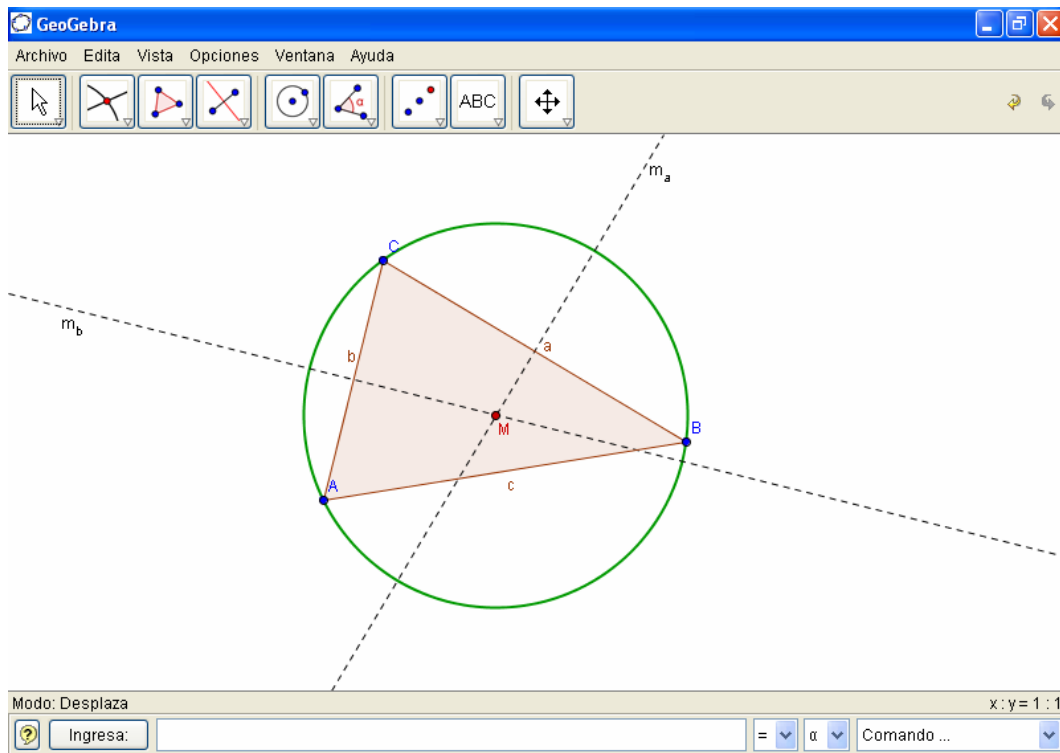


Guiando con el *mouse* los útiles de construcción (modos) de la *Barra de Herramientas* puedes construirse figuras sobre la *Zona Gráfica* cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen en la *Ventana Algebraica*.


En el *Campo de Entradas* o *Campo de Texto* pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la *Zona Gráfica* al ingresarse pulsando Enter (Intro en algunos teclados).


Primer Ejemplo: Circunferencia que circunscribe un triángulo


Tarea: Construir un triángulo ABC a circunscribirlo con su circunferencia.





Construcción mediante el *mouse*

 Al seleccionar con un *click* de *mouse*, la opción **Polígono** del menú que despliega la flechita del tercer ícono de la Barra de Herramientas, podemos pasar a la Zona Gráfica para construir el triángulo: basta dar *click* en tres puntos para crear sus vértices A, B y C y cerrarlo con un nuevo *click* sobre A.


 Activando la opción **Mediatriz** del menú que abre el cuarto icono, un *click* sobre sendos lados del triángulo, traza la correspondiente a cada uno de ellos.

 El centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo se construye al seleccionar la opción **Intersección de dos objetos** del segundo icono y dar *click* sobre el par de mediatrices recientemente trazadas. Rotulamos con una M al flamante circuncentro gracias a la opción **Renombra** del menú contextual que se despliega al pulsar el botón derecho del *mouse* sobre dicho punto, borrar la letra que lo identificaba y anotar en su lugar la M en la ventana que aparece.

 Para completar la construcción, seleccionamos la primera opción del menú del quinto ícono **Circunferencia dado el punto central...** y marcamos primero el circuncentro y luego damos *click* sobre cualquiera de los vértices del triángulo ABC.

 Cualquiera de los vértices es accesible al “tironeo”. La primera opción del ícono inicial establece el modo **Desplaza** que permite arrastrar con el *mouse* todo objeto libre, desencadenando la reacomodación de los dependientes, forzados, en este ambiente de **geometría dinámica**, a mantener las relaciones que los vinculan

Algunos trucos

- El ítem **Deshace** del menú **Edita** es muy útil para rectificar y anular la(s) última(s) operación(es).
- Todo objeto deviene invisible si lo señalamos y desactivamos la opción **Expone objeto** del menú desplegado al pulsar el botón derecho del *mouse*.
- El aspecto (color, grosor, estilo, etc.) de cualquier ítem se redefine en la ventana emergente de la opción **Propiedades** del menú contextual que se despliega con un *clic* derecho del *mouse* sobre el objeto a modificar.
- El menú **Vista** permite determinar si se va exponer u ocultar la Ventana de Álgebra, los ejes de coordenadas y la grilla o cuadrícula.
- Para desplazar la Zona Gráfica, basta seleccionar el modo correspondiente  y arrastrarla manteniendo pulsado el botón izquierdo del *mouse*
- **Protocolo de construcción** es un ítem del menú **Vista** en cuya ventana emergente se lista la secuencia de construcción (para revisarla paso a paso y cambiar el orden o modificar la seriación). En su menú **Vista** propio se fija la lista exhaustiva de datos a ostentar por cada paso de construcción.
- En la sección **Entrada Geométrica** de la **Ayuda** se ofrecen explicaciones detalladas para realizar construcciones con el *mouse*.

Construcción utilizando el campo de entradas

Veamos como construir el mismo triángulo desde el campo de entradas o campo de texto. Comenzamos por abrir una nueva hoja de trabajo (**Archivo – Nuevo**) e introducir los siguientes comandos en el campo de entradas (al pie de la pantalla), pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados) al final de cada línea.

```
A = (2, 1)
B = (12, 5)
C = (8, 11)
Polígono[A, B, C]
m_a = Mediatriz[a]
m_b = Mediatriz [b]
M = Intersección[m_a, m_b]
Círculo[M, A]
```

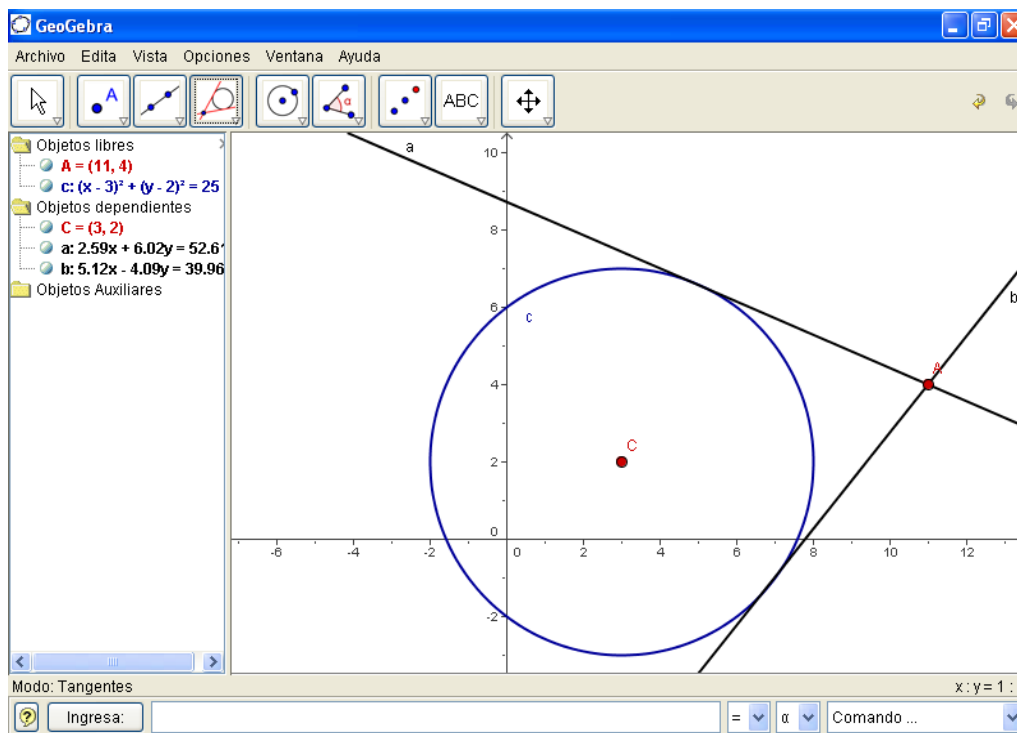
Algunos trucos

- Auto completado de comandos: después de ingresar las dos primeras letras de un comando, se completa una palabra sugerida. Si se trata del comando deseado, basta pulsar *Enter* pero si no es así, se continúa tecleando el nombre del comando.
- No es necesario teclear el nombre de cada comando: es posible seleccionarlos de la lista situada a la derecha del campo de entradas.
- Un *clic* sobre el botón **Ingresar** (a la izquierda) activa el modo **Campo de entradas** que permite introducir directamente un objeto, simplemente eligiéndolo con un *clic* en la **Ventana de Álgebra** o en la **Zona Gráfica**.
- Una ventana expone explicaciones más detalladas al respecto al pulsar el botón de **Ayuda** con un *clic* sobre el correspondiente botón de la izquierda.
- Combinando las ventajas de las dos formas de trabajo posibles, mediante el *mouse* y con la introducción de comandos, se obtendrán los mejores resultados con GeoGebra.

Segundo Ejemplo: Tangentes a una circunferencia

Objetivo: Representar con GeoGebra la circunferencia de ecuación

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y sus tangentes que pasan por el punto A de coordenadas (11, 4).



Construcción utilizando el campo de entradas y el *mouse*

Podemos introducir en el campo de entradas:

- la ecuación de la circunferencia $c: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y pulsar *Enter* (*Truco:* el signo 2 está disponible en el menú desplegable situado inmediatamente a la derecha del campo de entradas).

- el comando $C = Centro[c]$ y pulsar *Enter* (*Intro* en otros teclados)

- y $A = (11, 4)$ para dibujar el punto A

Pasamos a las opciones de los menús para proseguir al:



Seleccionar **Tangentes** en el menú del cuarto icono y marcar con *click* el punto A y la circunferencia c.



Marcar el ícono del modo **Desplaza** para arrastrar con el *mouse* el punto A y apreciar el movimiento de las tangentes o la circunferencia c y seguir su ecuación en la Ventana de Álgebra.

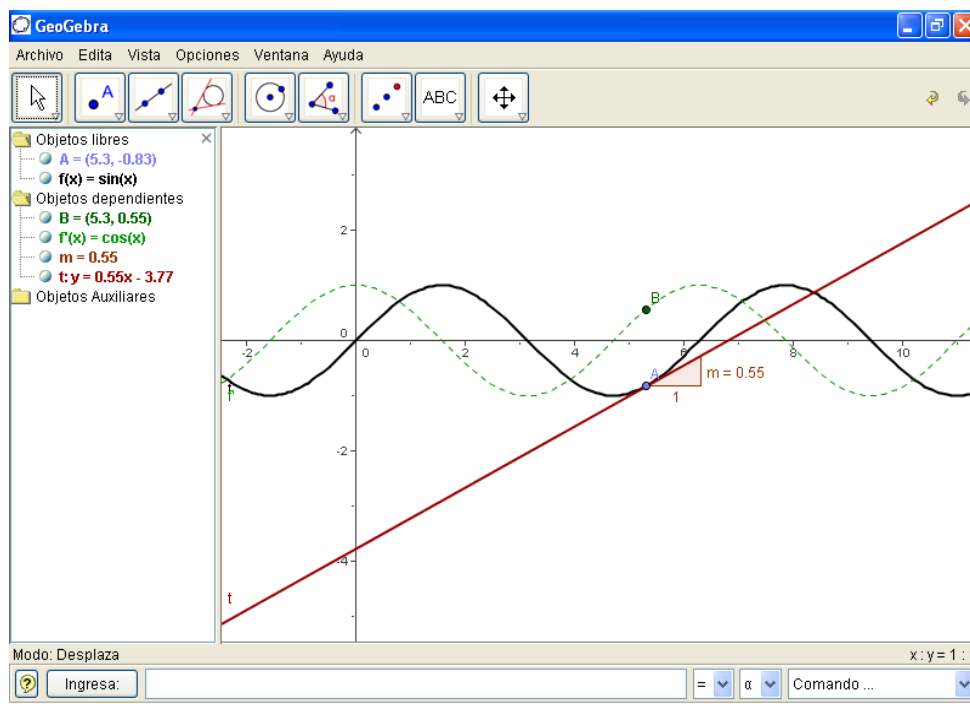
Algunos trucos

- Para acercar o alejar la imagen mediante el *zoom*: basta un *click* derecho sobre una área libre de la zona gráfica y seleccionar el grado deseado u obtener una ventana de *zoom* arrastrando con el botón derecho del mouse pulsado.
- Es posible cambiar la ecuación de la circunferencia en la ventana de álgebra haciendo *click* sobre ella.

La sección **Entrada Algebraica** de la **Ayuda** ofrece explicaciones más detalladas sobre las posibilidades del campo de entradas.

Tercer Ejemplo: Derivada y Tangente de una función


Objetivo: Representar gráficamente la función seno, su derivada y su tangente en un punto, así como el triángulo ilustrativo de la pendiente de la misma.




Versión 1: El punto está sobre la gráfica de la función


Teclear en el campo de entradas la función $f(x) = \sin(x)$ y pulsar Enter.

● **A** Seleccionar el modo **Nuevo Punto** y dar *clic* sobre la representación gráfica de la función f para crear un punto A sobre la gráfica de f .

 Activar el modo **Tangentes** y dar *clic* sobre el punto A y sobre la gráfica de f . Renombrar t a la tangente (*clic* derecho sobre ella y **Renombra**)
Teclear el comando $m = \text{Pendiente}[t]$.

 Seleccionar el modo **Desplaza** y arrastrar el punto A observando el movimiento de la tangente.

Teclear $B = (x(A), m)$ y activar la traza de este punto (*clic* derecho sobre B y **Activa trazo**).

 Seleccionar el modo **Desplaza** y arrastrar el punto A observando el trazado provocado por B .
Teclear el comando $\text{Derivada}[f]$.

Algunos trucos

- Ingresar una función diferente, por ejemplo $f(x) = x^3 - 2x^2$ en el campo de entradas; inmediatamente aparecerán su derivada y su tangente.
- Seleccionar el modo **Desplaza** y arrastrar la gráfica de f con el *mouse*. Observar los cambios en las expresiones de la función y de su derivada

Versión 2: Punto en $x = a$

Vamos a realizar la misma construcción anterior pero de otro modo. Para empezar, seleccionar **Archivo – Nuevo** para abrir una nueva hoja de trabajo. Luego introducir en el campo de entradas los comandos siguientes, tecleando Enter al final de cada línea:

```
f(x) = sin(x)
a = 2
A = (a, f(a))
t = Tangente[a, f]
m = Pendiente[t]
B = (x(A), m)
Derivada[f]
```

Seleccionar el modo **Desplaza** y dar *clic* sobre el número a. Pulsar las teclas de las flechas para modificar su valor. Inmediatamente el punto A y la tangente se desplazarán a lo largo de la gráfica de f.

Deslizadores : También puede controlarse el valor del número a utilizando un deslizador: *clic* derecho sobre a en la Ventana de Álgebra y activar Expone objeto.

Truco : los deslizadores y las teclas-flecha son especialmente útiles para trabajar con parámetros, por ejemplo p y q en la función cuadrática $y = x^2 + p x + q$.

Tangente sin recurrir al comando

GeoGebra también trabaja con vectores y ecuaciones paramétricas. Así será posible construir una tangente t sin necesidad de recurrir al comando *Tangente[]*. Para comprobarlo, suprimir la tangente de la figura, con *clic* derecho sobre la recta y seleccionando **Borra**. Luego introducir los comandos siguientes:

```
v = (1, f'(a))
t: X = A + r v
```

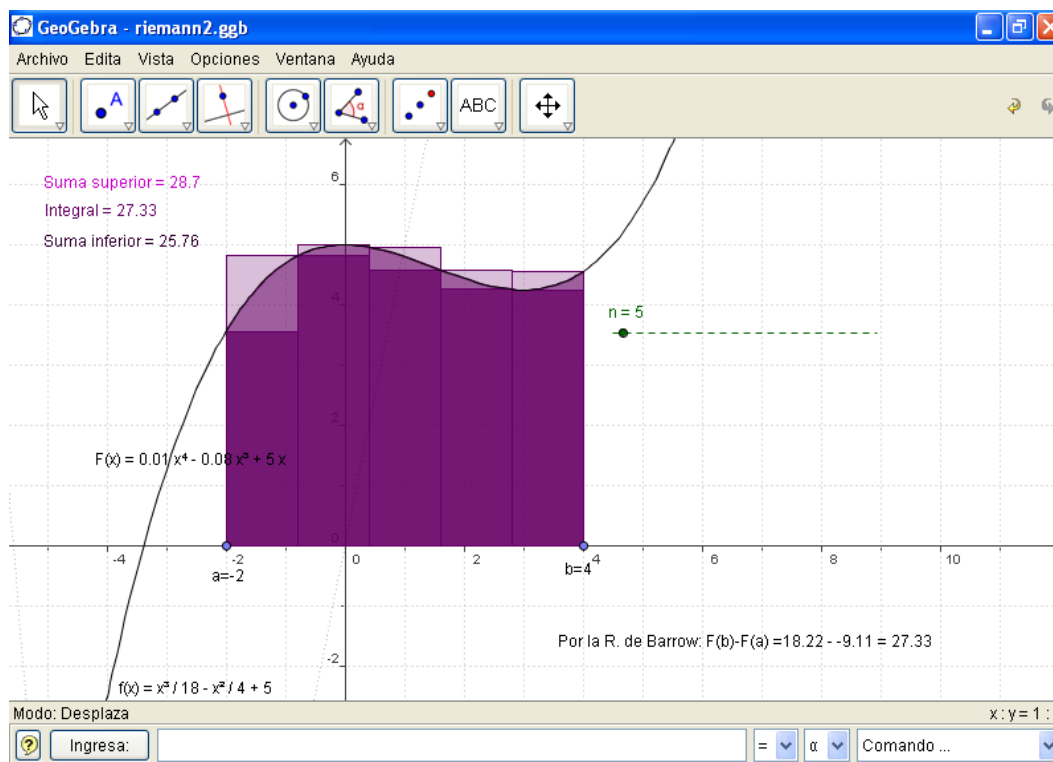
v es un vector direccional de la tangente t. Se puede utilizar, en lugar de r, cualquier otra letra como parámetro.

Algunos trucos

- Hay otra posibilidad más para construir la tangente a partir del vector direccional: $t = \text{Recta}[A, v]$.
- Probar también el comando *Integral[f]*
- La sección **Edición algebraica – comandos** de la **Ayuda** expone amplia información relativa a los comandos de *GeoGebra*. El documento de **Ayuda** (en formato pdf) puede ser descargado desde www.geogebra.at.

Para una mayor información

Quedan invitados a visitar la página web de GeoGebra www.geogebra.at en que encontrarán tanto información complementaria y diversificada como... ¡ la última versión del programa!



GeoGebra también permite crear fácilmente páginas web dinámicas porque no sólo exhiben sino que permiten la interacción desde cualquier navegador (como Firefox, Netscape, Safari o Internet Explorer). La página web de GeoGebra ofrece ejemplos de este tipo además de otras informaciones y recursos.

Página web de GeoGebra
Foro de Usuarios de GeoGebra
GeoGebraWiki – banco de ficheros educativos

www.geogebra.at
www.geogebra.at/forum
www.geogebra.at/en/wiki

Por cualquier sugerencia o aviso sobre el programa puede dirigirse en inglés o alemán al autor Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at a la traductora y coordinadora de la versión en español liliana.saidon@centrobabbage.com

Traducción al castellano de Manuel Sada msadaall@pnte.cfnavarra.es
Edición y revisión de Liliana Saidon liliana.saidon@centrobabbage.com